АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

9616—10619

№ 10 1959

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), профессор *В. В. Алпатов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология), докт. техн. наук *А. М. Васильев* (Электротехника), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *В. В. Покшишевский* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика)

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 2
Преподавание математики 4
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел 20
Алгебра 28
Многочлены и линейная алгебра 28
Группы 29
Поля, кольца и структуры 32
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 40
Теория функций действительного переменного 47
Теория множеств 50
Приближение функций полиномами и их обобщениями 51
Теория функций комплексного переменного . . 56
Дифференциальные уравнения 67
Обыкновенные дифференциальные уравнения 67
Уравнения в частных производных 75
Приложения к физике, технике и естественным наукам 82
Интегральные уравнения 92
Приложения интегральных уравнений . . . . —
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 93
Числовые ряды 98
Специальные функции 100
Интегральные преобразования и операционное исчисление 102
Приложения общих методов математического анализа 104
Функциональный анализ 105
Теория вероятностей 115
Математическая статистика 121
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 125
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 130
Геометрия 135
Приложения геометрии 136
Элементарная геометрия 138
Неевклидовы геометрии 139
Аналитическая геометрия 141
Алгебраическая геометрия 143
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 146
Геометрия *n*-мерного пространства 150
Теория относительности 155
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 158
Метрические методы в геометрии 160
Выпуклые многообразия 161
Численные и графические методы 164
Таблицы 170
Вычислительные машины и математические приборы 171
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 184
Авторский указатель 187

ОПЕЧАТКА

На странице 1, строка 9, напечатано:
рефераты 9616—10691
Должно быть:
рефераты 9616—10619

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF THE SCIENTIFIC INFORMATION. ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

EDITORS OF SERIES: corresponding member of the Academy of Sciences of the USSR *N. V. Ageev* (Metallurgiya), professor *V. V. Alpatov* (Biologiya), doctor of technical sciences *A. M. Vasiljev* (Electrotekhnika) professor *E. E. Zakharov* (Geologiya), professor *S. M. Nikolsky* (Matematika), professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomiya i geodeziya), professor *V. V. Pokshishevsky* (Geografiya), academician *L. I. Sedov* (Mekhanika), *V. V. Serpinsky* (Khimiya), candidate of technical sciences *V. Z. Freidberg* (Mashinostroenie), professor *I. A. Khvostikov* (Geofizika), professor *E. V. Shpolsky* (Fizika)

CONTENTS

General 1
History. Personalia 2
Teaching of mathematics 4
Foundations. Mathematical logic 6
Theory of numbers 20
Algebra 28
Polynomials, linear algebra 28
Groups 29
Fields, rings, lattices 32
Algebraic theory of communication and control circuits . . . . . —
Topology 40
Theory of functions of real variables 47
Theory of sets 50
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 51
Theory of functions of complex variables 56
Differential equations 67
Ordinary differential equations 67
Partial differential equations 75
Applications to physics, technology and natural sciences 82
Integral equations 92
Applications of integral equations . . . . —
Calculus of variations . . . . . —
Analysis (other aspects) 95
Numerical series 98
Special functions 100
Integral transforms, operational calculus . . 102
Applications of general methods of mathematical analysis 104
Functional analysis 105
Theory of probability 115
Mathematical statistics 121
Theory of games, operational research, mathematical economics 125
Applications of probabilities and statistical methods 130
Geometry 135
Applications of geometry 136
Elementary geometry 138
Non-euclidean geometry 139
Analytical geometry 141
Algebraic geometry 143
Differential geometry of 3-dimensional space 146
Geometry of *n*-dimensional space 150
Theory of relativity 155
Global theory of differentiable manifolds 158
Metric methods in geometry 160
Convex manifolds 161
Numerical and graphical methods 164
Tables 170
Computers and mathematical devices 171
Applications of computer devices 184
Author index 187

Editorial Office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, член-корреспондент АН СССР *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, профессор *Н. В. Смирнов*, профессор *П. С. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 9616—10691 **№ 10** **Октябрь 1959 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

9616. Состояние и задачи организации математической жизни в Народной Польше. Куратовский (Der Stand und die Aufgaben der Organisation des mathematischen Lebens in Volkspolen. Kuratowski Kazimierz. Hauptref. 8. Poln. Mathematikerkongr., Warschau, Sept. 1953. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1954, 1—9) (нем.)

9617. Математическая конференция в Смоленичах 15—20 сентября 1958 г. (Matematická konference ve Smolenicích, 15.—20. září 1958. F. H.), Mat. škole, 1958, 8, № 10, 626—632 (чешск.)

Сообщение о работе конференции словацких математиков, организованной Объединением чехословацких математиков. Задача конференции состояла в том, чтобы обсудить вопросы о преподавании математики и вопросы, касающиеся развития математики и технических наук в связи с решениями XI съезда КПЧ завершить в кратчайшее время в Чехословакии строительство социализма. Были прослушаны и обсуждены доклады: «О политико-воспитательной работе в математике» (Дубецки), «Об организации народного образования в ЧСР» (Елинек), «Основное содержание обучения математике в общеобразовательных школах» (Кабеле), «О политехнизации преподавания математики» (А. Дубец), «Некоторые взгляды на современную математику с точки зрения научной работы» (О. Борувка). Представители высших учебных заведений отчитались в научной деятельности своих институтов. Академик Гронец рассказывал о научных достижениях забытых словацких математиков. Гутя и Гарант сделали сообщение «О математических проблемах в технических и естественных исследованиях» и привели конкретные примеры сотрудничества работников Института прикладной математики с заводами и учреждениями. Доклад «О передовых традициях чехословацкой математики» прочитал Балада. Обращалось внимание на то, что имеется еще очень много неисследованных исторических документов в библиотеках и архивах. Предлагалось организовать работу по исследованию этих материалов. Доклады Крнялы и Юцовича, а также Рована были посвящены методике преподавания математики (способы введения понятия функции и определения понятий равенства, тождественного равенства и уравнения).

Т. Грушкова

9618. Математическая ассоциация в Америке. Официальные отчеты и сообщения (The Mathematical Association of America. Official reports and communications), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 9, 724—734 (англ.)

9619. Конференция, посвященная сообщениям о научной информации (Калифорния, 26—27 мая 1958 г.) (Conference on Communication of Scientific Information (Internat. Business Mach. Corp. San Jose, Calif., May 26th—27th, 1958)), IBM J. Res. and Developm., 1958, 2, № 4, 268—353 (англ.)

9620. Отчет о конференции по линейной алгебре (6—8 июня 1956 г.) (Report of a conference on linear algebras; June 6th—8th, 1956, New York. Washington, D. C., Nat. Acad. Sci.—Nat. Res. Council, 1957, 64 pp., 1. 50 doll.), Publishers' Weekly, 1958, 173, № 10, 72 (англ.)

9621. Аристотелева трактовка вероятности и знаков. Мадден (Aristotle's treatment of probability and signs. Madden Edward H.), Philos. Sci., 1957, 24, № 2, 167—172 (англ.)

Аристотель в своих трудах часто употребляет понятие «вероятность», хотя и не делает попытки точно разъяснить его. Автор считает, что аристотелева трактовка вероятности ближе к тому, что теперь называется статистической интерпретацией, хотя сильно отличается от таковой. Например, аристотелева вероятность не имеет непрерывной шкалы, но лишь три градации: высоко вероятно, мало вероятно и безразлично.

Аристотелево понятие «эндекса» (выбор из всех мнений, существующих по данному вопросу в данное время, какого-то одного) автор не считает возможным сравнивать с современной субъективной интерпретацией вероятности.

Что касается до распространенной ныне интерпретации вероятности, как степени подтверждения, то, по мнению автора, у Аристотеля нет ничего с ней сходного, хотя в ряде мест у него чувствуется потребность в чем-то подобном. Отсутствие такой интерпретации автор объясняет отсутствием в логике Аристотеля теории индуктивных выводов и наличием у него теории знаков и причин. С помощью последней ему удается оперировать с различными гипотезами там, где это необходимо, главным образом при разборе примеров, например, астрономических.

Б. Н. Пятницын

9622. Основные направления в математике в середине XX века. Лефшец (Las grandes corrientes en las matematicas del siglo XX. Lefschetz Solomon), Rev. mat., 1958, № 4, 21—28 (исп.)

Речь, произнесенная на конгрессе в Мексике в 1958 г. По мнению автора, наибольшим недостатком исследований Гильберта было чрезмерное увлечение построением алгебраической модели исследуемого объекта, не учитывая его топологических свойств. Автор показывает на ряде примеров, как появление топологии внесло изменения во всю систему математических наук. В преподавании математики автор предлагает отказаться от хотя и важных, но обладающих малой культурной и воспитательной ценностью тем, как, например, приведение конусов к нормальной форме, и рекомендует ввести первоначальные понятия и простейшие предложения таких актуальных наук, как топология, теория вероятности, статистика и др. В. К. Белов

9623. Об адекватной постановке проблем в основных математических исследованиях. Ответ. Виттенберг (Über adäquate Problemstellung in der mathematischen Grundlagenforschung. Eine Antwort. Wittenberg Alexander. Dialectica, 1954, 8, 152—157) (нем.)

9624 К. Статьи и доклады. 1. Функции комплексного переменного. 2. Функции действительного переменного. Заметки. Данжуа (Articles et mémoires. 1. La variable complexe. 2. Le champ réel. Notices. Denjoy Arnaud. Paris, Gauthier-Villars, 1955, X+1—507 p.; VI+509—1108 p.) (франц.)

Эти два тома воспроизводят средствами фотоофсетной печати 14 избранных работ автора о функциях комплексного переменного (т. 1), 15 избранных статей о разных проблемах теории функций действительного переменного, письмо Боку (T. J. Boks) и собственные «Заметки» автора относительно своих работ (т. 2).

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 698

9625 К. Игра с бесконечностью. Петер (Das Spiel mit dem Unendlichen. Mathematik für Außenstehende. 2. Aufl. Peter Rózsa. Übers. aus dem Ungar. Leipzig, Teubner, 1957, VI, 278 S., ill., 9. 80 DM) (нем.)

Цель книги: в увлекательной и доступной форме познакомить людей, далеких от математики, с математикой, ее задачами и методами. Она не содержит сложных математических формул и выкладок и доступна для лиц, не имеющих математической подготовки. Автор на простых примерах разъясняет сущность математических задач и пути их решения; доказательств очень мало. Книга охватывает большой и разнородный материал, объединенный стремлением разъяснить смысл математической трактовки понятия бесконечности.

Гл. I. От счета на десяти пальцах читателя подводят к понятию бесконечной последовательности натуральных чисел. Определение положительной степени натурального числа. Быстрое увеличение числа при возведении в степень, на примере известной задачи о числе зерен на шахматной доске, приводящей к сумме $S=1+2+2^2+2^3+...+2^{63}$. Читатель знакомится с идеей графика на примере: измерение температуры в определенные моменты времени. Разъясняется вопрос о сравнительной быстроте изменения функции. На примере подсчетов с помощью монет достоинством в 1, 2, 4, 8 денежных единиц показано, как записываются числа в двоичной системе. Подчеркиваются удобства шестидесятеричной системы, выводятся в десятичной системе признаки делимости на 5, 4, 8, 9. Вывод формулы суммы арифметической прогрессии несколькими способами, которые должны показать читателю разнообразие математических методов. Решается несколько простых комбинаторных задач, рассказывается о треугольнике Паскаля. Указывается, что каждое число можно представить в виде произведения простых чисел, что простых чисел бесконечно много, ставится вопрос об их распределении, рассказывается о решете Эратосфена. При решении простых задач вводятся линейные уравнения с одним и двумя неизвестными, показывается, как они решаются методом исключения неизвестного. Составляется и решается квадратное уравнение. Рассказывается о том, как решает высшая алгебра уравнения более высокой степени.

Гл. II. Введение отрицательных чисел при решении линейных уравнений с одним неизвестным. Изображение их на числовой оси. Понятие вектора. Сложение векторов. Умножение отрицательных чисел. Правила арифметических действий с дробями. Показывается, что всякое рациональное число является точкой накопления рациональных чисел. Счетность множества рациональных чисел, его равномощность с множеством целых чисел. Запись рациональных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Понятие о сходимости бесконечных рядов. Доказательство расходимости гармонического ряда. Несоизмеримость стороны квадрата с его диагональю. Введение действительных чисел. Доказательство несчетности множества действительных чисел. Определение отрицательной степени числа. Построение по точкам графика 2^x с целью показать, что с увеличением числа точек, по которым проводится построение, функция становится все более гладкой. Построение гиперболы $y=12/x$. Исследование ее поведения при $x \to \infty$ и $x \to 0$. Вводятся мнимые числа на примере уравнения $x^2=-9$. Рассказывается, что с введением комплексных чисел в математике установлена связь между тригонометрическими функциями и функцией e^x, доказана теорема, что уравнение степени n имеет n решений, разъясняется, почему радиус сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4$$

равен 1. Понятие о производной и об определенном интеграле в их элементарной трактовке.

Гл. III. Задача квадратуры круга, трансцендентность числа π. Понятие о неевклидовой геометрии. Вводится аксиоматически пространство четырех измерений. Характеристика интуиционизма. В трех последних параграфах (20—22) — элементы математической логики.

А. В. Дорофеева

9626 К. Математический анализ для специалистов по электронике. Ричмонд (Calculus for electronics. Richmond Addison Edward. New York—London, McGraw-Hill, 1958, viii, 407 pp., ill., 46 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 440, 12 (англ.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

9627. Методы записи чисел китайскими математиками. Ли Янь, Шусюэ тунбао, Shuxue tongbao, 1958, № 6, 1—5 (кит.)

9628. К проблеме бесконечно малых у древних атомистов. Мау (Zum Problem des Infinitesimalen bei den antiken Atomisten. Mau Jürgen. Philos. Veröff. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Inst. Hellen.-Röm, 1954, № 4, 48 S.) (нем.)

9629. Замечание к вычислению $\sqrt{2}$ древними греками. Стаматис (Eine Bemerkung zur Berechnung von $2\sqrt{2}$ nach den Alten. Stamatis E. Plato, 1953, **5**, № 2, 3 S.) (греч.)

9630. О работах Яна Брожека по теории чисел. Опяль (O pracach Jana Brożka z teorii liczb. Opial Zdzisław), Kwart. historii nauki i techn., 1958, **3**, № 4, 537—563 (польск.; рез. русск., англ.)

Польский математик Ян Брожек (1585—1652) в двух трактатах под общим заглавием «De numeris perfectis disceptatio» (первое издание первого трактата—1637 г., второго—1652 г.), показал, что 10 из 20 чисел вида $2^{n-1}(2^n-1)$, которые Бонгус («De mistici numerorum significatione»—Bergamo 1583) и другие математики считали совершенными, таковыми не являются. Для

этого достаточно было доказать, что соответствующие числа вида 2^n-1 не являются первыми. Брожек формулирует (не приводя доказательств) 25 признаков делимости числа ряда (2^n-1) через очередные первые числа от 3 до 101:

$$2^{2k}-1=0(\mathrm{mod}\,3);\qquad 2^{4k}-1=0(\mathrm{mod}\,5);$$
$$\ldots\ldots 2^{8k}-1=0(\mathrm{mod}\,17);$$
$$2^{100k}-1=0(\mathrm{mod}\,101);$$
$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Следовательно, это отдельные случаи малой теоремы Ферма.

Автор показывает, что Брожек, пользуясь ситом Эратосфена, мог простейшим образом открыть указанные выше признаки делимости и возможно обосновать их. Он выдвигает при этом гипотезу, что создание для чисел ряда (2^n-1) сита, аналогичного ситу Эратосфена для ряда натуральных чисел, было главным намерением Брожека и что 25 приведенных признаков являются началом именно такого сита. В связи с этим автор предлагает принять для упомянутых выше утверждений Брожека общее название сита Брожека. В качестве обоснования автор приводит несколько выдержек из обоих трактатов Брожека.

Много места отведено освещению той части истории математики на Западе Европы, которая непосредственно связана с темой трактатов Брожека. В частности, приведен ряд отрывков из переписки Ферма, Френикля, Мерсена и выдержки из трудов последнего.

Часть своего второго трактата Брожек посвятил рассуждениям по вопросам дружественных чисел. Ему принадлежит, в частности, одно правило, касающееся образования этого рода чисел. Однако в польской литературе, посвященной работам Брожека по математике,—монографии Франке (1884) и Дианни (1949),—результаты его работ в этой области теории чисел оценивались неправильно.

Автор подробно анализирует правило Брожека об образовании дружественных чисел и доказывает, что оно почти целиком непригодно для той цели, которой должно было служить. Кроме того, автор доказывает, что некоторые результаты, приведенные Брожеком (вторая по счету пара дружественных чисел 18416 и 17296, числа 120 и 672, для которых сумма делителей в два раза больше чисел и т. д.) и считавшиеся до сих пор его оригиальным достижением, были им взяты из известного труда Мерсена «Cogitata physico-mathematica».

И в этом случае автор приводит исчерпывающие сведения по истории теории дружественных чисел в первой половине XVII в. Из резюме автора

9631. Дж. Дж. Сильвестр и С. В. Ковалевская. Полубаринова-Кочина П. Я., В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 5. М., АН СССР, 1957, 156—162

Обстоятельно комментированная публикация двух писем Сильвестра: Миттаг-Леффлеру и С. В. Ковалевской, а также сонета Сильвестра «Музыка и математика» (опубликованного в английском журнале «Природа» 9 декабря 1886 г.), посвященного С. В. Ковалевской.

В письме Миттаг-Леффлеру 18 ноября 1886 г. Сильвестр сообщает, что он уже 20 лет владеет теоремой, позволяющей распространять интерполяционную формулу Гаусса на случай кратных интегралов любого порядка. В письмах к Ковалевской он указывает, что в его работе «О числах Гамильтона» (1887) находят применение статьи Ковалевской. Имеются в виду: 1) статья Ковалевской «Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen (1875) и работы, опубликованные в 1889 и 1890 гг., об открытом ею случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

А. В. Дорофеева

9632. Письма Ш. Эрмита к С. В. Ковалевской. Полубаринова-Кочина П., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1957, **19**, 650—690

Комментированная публикация пятнадцати писем Ш. Эрмита к С. В. Ковалевской на языке оригинала (французский) и в переводе на русский. В письмах 3, 5, 7 (1884) Эрмит предлагает Ковалевской опубликовать в Докладах Парижской Академии наук краткое содержание работы о преломлении света в кристаллических средах, сообщает о недавно открытой высшей Нормальной школе для женщин. В письме 6 (1884) он сообщает свои результаты, относящиеся к исследованию мероморфного решения уравнения Лапласа и к вопросу о приведении гиперэллиптических и эллиптических интегралов. Для уравнения $\Delta\varphi=0$ Эрмит, принимая во внимание, что его решение является мероморфным, полагает, что функция φ имеет следующий вид: $\varphi=\frac{u}{v}$, где u и v—целые функции.

В письме 10 (1888) Эрмит пишет о статье Кронекера, содержащей выпад против Вейерштрасса. В остальных письмах (написанных в 1882—1889 гг.) описываются хлопоты Эрмита о наградах для Пуанкаре, Аппеля и Миттаг-Леффлера, о награждении Вейерштрасса, которого Эрмит признает общим учителем французских математиков. А. В. Дорофеева

9633. История математических кафедр в Харьковском университете за 150 лет его существования. Марчевский М. Н., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1956, **65**, 7—29

9634. Диссертации по математике в Харьковском университете за 1805—1917 годы. Сушкевич А. К., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1956, **65**, 91—115

9635. А. М. Ляпунов в Одессе. Билимович Ан. Д., Publs, Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, **9**, 1—7

9636. Современное состояние и будущее математической физики. Пуанкаре (L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique. Poincaré Henri. Gaz. mat., 1955, **15**, № 60—61, 3—16) (франц.)

Перепечатка оригинала из Bull. sci. math., 1904, (2) 28, 302—324.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 697.

9637. Очерк математических работ Михаила Федоровича Субботина (К 65-летию со дня рождения). Мерман Г. А., Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1959, **7**, № 3, 233—255

9638. К 50-летию со дня рождения профессора Владимира Книхала (р. 1908). Бабушка (Padesátiny prof. dr. Vladimira Knichala. Babuška Ivo), Aplikace mat., 1959, **4**, № 1, 81—82 (чешск.)

9639. К 80-летию Вауде (р. 1876). Боттема (Van der Woude tachtig jaar. Bottema O.), Nieuw arch. wiskunde, 1956, **4**, № 1, 2—12 (гол.)

9640. Научные работы Казимежа Жоравского. Слебодзинский (L'oeuvre scientifique de Kazimierz Żorawski. Slebodziński W.), Colloq. math., 1956, **4**, № 1, 74—88 (франц.)

Подробный обзор наиболее важных работ бывшего профессора Варшавского университета и политехнического института К. Жоравского (1866—1953), составленный по разделам: теория дифференциальных (в том числе квадратичных) форм, теория интегральных инвариантов, теория движения непрерывных сред и твердых тел, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия. Список научных работ Жоравского (67 назв.)

К. А. Рыбников

9641. Дио Льюис Холл (1895—1954). Хинриксен, Тилман, Гауэнс (Dio Lewis Holl, 1895—1954. Hinrichsen J. L., Thielman H. P., Gouwens Cornelius. Proc. Iowa Acad. Sci., 1955, **62**, 71—72) (англ.)

9642. Памяти Феликса Бернштейна (1878—1956). Людвиг (Zum Gedächtnis Felix Bernsteins. Ludwig W.), Biometr. Z., 1959, **1**, № 1, 64 (нем.)

9643. Кинсаку Такано (1915—1958). Мацусита (Kinsaku Takano 1915—1958. Matusita Kameo), Ann. Inst. Statist. Math., 1958, **10**, № 1, I—II (англ.)

Некролог и список научных работ (22 назв.); все работы по теории вероятностей и теории информации.

9644. Доктор Серджо Сиспанов. Байдафф (Doctor Sergio Sispánov. Baidaff Bernardo I.), Bol. mat., 1958, **31**, № 6, 32—33 (исп.)

Извещение о смерти 12 октября 1958 г. в Асунсионе (Парагвай). Дата рождения не указана. Список работ (15 назв.). Тематика: интегрирование и специальные функции, решение неопределенных уравнений, теория чисел.

9645 К. История математики. Ч. 2. От Ферма и Декарта до открытия дифференциального и интегрального исчисления и создания новых методов. Гофман (Geschichte der Mathematik. Teil 2. Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung d. Calculus und bis zum Ausbau d. neuern Methoden. Hofmann Joseph Ehrenfried. Berlin, de Gruyter, 1957, 109 S., 2. 40 DM) (нем.)

Вторая часть трехтомной монографии (РЖМат, 1956, 2713 К). В исключительно сжатом виде изложены многочисленные факты истории математики XVII в. в странах Западной Европы и Англии. Материал разделен на две главы: расцвет барокко (около 1625—1665 гг.) и позднее барокко (около 1665—1730 гг.), в соответствии с основным стилистическим направлением в западноевропейском искусстве XVI—XVIII вв.

К первой из этих глав отнесены: очерк о работах Декарта и описание первых успехов в области анализа бесконечно малых. Вторая содержит обзор событий, сопровождающих открытие и первые этапы дифференциального и интегрального исчисления до 1695 г. Окончание периода позднего барокко перенесено в следующий том.

Хороший подбор надежно проверенных фактов, наличие указателей (имен, сочинений, журналов и тематического) делают этот том, как и первый, ценным справочным пособием по истории математики XVII в.

К. А. Рыбников

9646 К. История математики. Ч. 3. От дискуссии вокруг дифференциального и интегрального исчисления до французской революции. Гофман (Geschichte der Mathematik. Teil 3. Von den Auseinandesetzungen um d. Calculus bis zur Französischen Revolution. Hofmann Joseph Ehrenfried. Berlin, de Gruyter, 1957, 107 S., 2. 40 DM) (нем.)

Последняя часть монографии (РЖМат, 1956, 2713К; реф. 9645К) имеет целью, по-видимому, возможно более полный обзор событий истории математики XVIII в. в странах Западной Европы. Кроме того, около трех страниц отведено инфинитезимальной математике в Японии (около 1650—1770 гг.), где речь идет преимущественно о разложениях элементарными средствами тригонометрических функций в ряд и об определении приближенных значений числа π.

Весь материал этой части разбит на две главы: продолжение позднего барокко (1695—1730) и эпоха Просвещения (1700—1790). В первой из них завершается (начатый во 2-й части; реф. 9645К) обзор первых этапов развития математического анализа и споров, связанных со строгой трактовкой его основ и с вопросами приоритета. Кроме того, в эту главу включены материалы о развитии элементарной математики и упомянутая выше справка о математике в Японии. Последнюю главу составляют: окончание обзора элементарной математики и справки о деятельности ведущих математиков европейского континента.

Примечание референта. Краткость и отрывочность сообщаемых автором сведений особенно сильно сказываются в третьей части монографии, где рассматриваются более трудные вопросы математики, а сама математика является более сложной и разветвленной.

К. А. Рыбников

9647 К. Триумф математики. 100 знаменитых проблем из двухтысячелетней математической культуры. 5-е изд. Дёрри (Triumph der Mathematik. 100 berühmte Probleme aus 2 Jahrtausenden math. Kultur. 5. Aufl. Dörrie Heinrich. Würzburg, Physica-Verl., 1958, VII, 391 S., ill., 18. 50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 48, 3529 (нем.)

9648 К. Природа и греки. Шрёдингер (Nature and the Greeks. Schrödinger Erwin. Cambridge, Univ. Press, 1954, IV, 97 pp., 2.00 doll.) (англ.)

9649 К. Насиреддин Туси Мухаммед (Азерб. астроном и математик (1201—1274 гг.). Мамедбейли Г. Д. (Мүһәммәд Нәсирәддин Туси. Мәммәдбәйли. Бакы, Ушагкәнчнәшр, 1957, 154 сәһ, шәкилли, 4 р. 30 к.) (азерб.)

9650 К. Леонард Эйлер (1707—1783). Жизнь и творчество. Обрешков (Леонард Ойлер (1707—1783)). Живот и творчество. Обрешков Н., Дуйчев И. София, Нар. просвета, 1958, 55 с., ил., 1.05 лв.), Бълг. книгопис, 1958, **62**, № 11, 9 (болг.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

9651. Воспитательная сторона обучения математике. Елинек (Výchovné vyučování v matematice. Jelínek Miloš), Mat. škole, 1959, **9**, № 1, 1—9 (чешск.)

Автор поставил перед собой задачу показать, каким образом можно использовать специфику математики в процессе воспитания.

I. Математика должна содействовать созданию научного мировоззрения у учеников и воспитанию в них социалистического сознания и коммунистической морали. Конечная цель обучения математике в школе состоит в том, чтобы выпускники понимали логическую систему строения математики. Они никогда не должны эту умственную систему отрывать от действительности. Ученик должен узнать, каково взаимодействие математики и экспериментальных наук. Математика способствует развитию умственных способностей учащихся, учит их логически думать, точно формулировать свои мысли, замечать количественные и пространственные отношения. Она требует от них внутренней дисциплины, критичности и объективности в процессе мышления. Воспитание этих черт характера очень ценно для социалистического общества. II. Автор рассматривает три фактора, содействующих воспитательному влиянию математики: содержание обучения, методы работы учителя, учитель.

Т. Грушкова

9652. Определения в школьном курсе математики. Рупасов К. А., Уч. зап. Тамбовск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 13, 41—78

Автор: 1) разъясняет, что надо понимать под определением математических понятий (так как нередко определения смешиваются с другими видами математических предложений) и приводит ряд ошибок в определениях из учебников (одночлен и многочлен, абсолютная величина числа, параллельные прямые, вычитание, «относительные» числа); 2) излагает принципы построения определений в школьном курсе математики; 3) освещает вопрос методики введения новых математических понятий.

А. Я. Маргулис

9653. Из истории борьбы за проникновение аксиоматического метода в среднюю школу. Чистяков В. Д.,

Уч. зап. Витебск. пед. ин-та, 1957, вып. 6, 143—165

Статья посвящена ведущейся с начала XX в. борьбе двух направлений русской методической мысли: за построение школьного курса геометрии на основе аксиоматического метода и — против. Выражением этой борьбы явилась дискуссия на I и II Всероссийских съездах преподавателей математики в 1911—1913 гг. и полемика в методической печати. В настоящее время, по мнению автора, созданы предпосылки для внедрения аксиоматического метода в курс геометрии средней школы. Библ. 24 назв. В. П. Куликов

9654. Конкретно-индуктивный метод в преподавании математики, развитый в русской методике. К. Ф. Лебединцевым. Рупасов К. А., Уч зап. Тамбовск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 13, 163—178

Излагаются высказывания К. Ф. Лебединцева по поводу применения в преподавании математики «абстрактно-дедуктивного» (основанного на применении дедукции) и «конкретно-индуктивного» (основанного на применении индукции) методов. Приводятся аргументы в пользу большего применения индукции в школьном преподавании. А. Я. Маргулис

9655. Понятие «функция» в средней школе. Николов (Понятието функция в средното училище. Николов Ал.), Матем. и физика (Бълг.), 1958, 1, № 2, 10—17 (болг.)

9656. Углубление и систематизация основных сведений о рациональных числах как необходимый этап при переходе к числам иррациональным. Гольдберг Ю. И., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1958, 71, 73—82

Излагаются результаты эксперимента, осуществленного в 8-а классе средней школы № 585 г. Москвы. Цели эксперимента: проверить доступность для учащихся материала, обобщающего учение о рациональных числах, перед введением иррациональных чисел; проверить эффективность этой работы для введения иррациональных чисел и формирования понятия действительного числа. А. Я. Маргулис

9657. Содержание темы «Последовательности чисел», значение и задачи ее изучения. Молчанов Ф. И., Уч. зап. Тамбовского гос. пед. ин-та, 1958, вып. 13, 215—229

Дана характеристика раздела школьной программы «Последовательности чисел», указано его место и значение в курсе математики и задачи его изучения. Приведена предлагаемая автором программа раздела «Последовательности чисел и функции натурального аргумента. Пределы». А. Я. Маргулис

9658. Оценка числа корней иррациональных алгебраических уравнений некоторых видов. Томашев Б. И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1958, 63, 287—317

Рассматривается решение алгебраических иррациональных уравнений вида $F(x)=0$ в поле комплексных чисел при предположении, что функция $F(x)$ представляет собой сумму корней из рациональных функций. При этом многозначная в поле комплексных чисел иррациональная функция $F(x)$ заменяется совокупностью однозначных ветвей её. Доказывается, что произведение всех однозначных ветвей иррациональной функции

$$F(x)=R_0(x)+\sqrt[n_1]{R_1(x)}+\sqrt[n_2]{R_2(x)}+\ldots+\sqrt[n_m]{R_m(x)}, \quad (1)$$

где R_0, $R_1(x)$, $R_2(x)$, ..., $R_m(x)$ — рациональные функции от x, является рациональной функцией $\Psi(x)$. Показывается, что в поле комплексных чисел иррациональное уравнение $F(x)=0$ (2) равносильно рациональному уравнению $\Psi(x)=0$. Аналогично доказывается, что произведение всех однозначных ветвей функции

$$f(x)=\sqrt[n]{R_1(x)}+\sqrt[n]{R_2(x)}+\ldots+\sqrt[n]{R_m(x)} \quad (3)$$

является степенью с показателем n некоторой рациональной функции $\varphi(x)$, найденной по установленному автором алгоритму, что иррациональное уравнение

$$f(x)=0 \quad (4)$$

равносильно рациональному уравнению $\varphi(x)=0$. Далее показывается, что в случаях, когда рациональные функции $R_0(x)$, $R_1(x)$, ..., $R_m(x)$ являются многочленами P_0, P_1, ..., P_m от аргумента x, степени которых соответственно равны K_0, K_1, ..., K_m, то число корней иррационального уравнения (2) в полеп комплексных чисел не превышает $\max\left(\frac{k_i}{n_i}\right) n_1 \cdot n_2, \ldots, m\,(n_0)$ по определению считается равным 1), а число корней иррационального уравнения (4) имеет в поле комплексных чисел не более $\max(k_i)\, n^{m-2}$ корней. В заключение рассматривается решение иррациональных уравнений способом возведения обеих частей уравнения в степень с натуральным показателем и, наконец, производится точная оценка числа корней в поле комплексных чисел у иррациональных алгебраических уравнений частных видов

$$\sqrt{P_1(x)}+\sqrt{P_2(x)}=A\ , \quad (5)$$

$$\sqrt{P_i(x)}+\sqrt{P_2(x)}=\sqrt{P_3(x)}\ , \quad (6)$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ — многочлены, A — постоянное число. Для всех различных возможных случаев устанавливаются условия, необходимые для того, чтобы уравнение (5) или уравнение (6) не имело решений. Т. В. Масленникова

9659. Некоторые вопросы теории равносильности уравнений при решении трансцендентных уравнений. Грекулова А. Г., Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 21, 209—218

9660. О введении логарифмов в средней школе. Рыдл (K zavedení logaritmu na střední škole. Rýdl Lad.), Mat. škole, 1959, **9**, № 1, 9—16 (чешск.)

Автор излагает новый метод введения логарифмов в школе, предложенный голландским математиком Ван-дер-Варденом. Последний старается избежать неточностей, связанных с введением логарифма как решения уравнения $10^x=a$, которая получается вследствие того, что во многих странах функция 10^x определяется в школах только для $x=\pm\frac{m}{n}$, где m,n— натуральные числа, и для $x=0$. Метод заключается в следующем: рассматривается ветвь равнобочной гиперболы $y=\frac{1}{x}$, расположенная в первом квадрате. Натуральный логарифм числа $a>1$ определяется как площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью Ox и ординатами в точках $x=1$ и $x=a$. С помощью этого определения доказываются формулы для натурального логарифмирования произведения, степени и корня. После этого определяется показательная функция a^x для вещественного x и $a>0$. Десятичные логарифмы вводятся как решение уравнения $10^x=a$, левая часть которого теперь определена для любого действительного x, и логарифмы при произвольном основании z ($z>0$, $z\neq 1$) определяются как решение уравнения $z^x=a$. Автор напоминает, что аналогичные методы введения логарифма в школе, основанные на интеграле $\int_1^a \frac{dx}{x}$, предлагали и другие математики. Ф. Клейн, К. Груша, Э. Чех и А. И. Маркушевич.

Далее он замечает, что в изложенном методе Ван-дер-Варден не обращает внимания, что общее понятие площади криволинейной фигуры школьнику неизвестно, и приводит уточнения изложенного метода. Т. Грушкова

9661. Из истории проблемы повторения учебного материала по математике в школах. Аракелян О. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1958, **63**, 3—54

Рассмотрены три периода в развитии проблемы повторения: 1) в дореволюционное время, 2) в период 1917—1931 гг., 3) после постановления ЦК ВКП(б) от 5 сентября 1931 г. Указаны вопросы, требующие дальнейшей научной разработки.

Есть недочеты редакционного характера, библиографические погрешности и опечатки. Н. П. Бибикова

9662. Преподавание тригонометрических уравнений. Гадор, Ходи (A trigonometriai egyenletek tanítása. Gádor Endréné, Hódi Endre), Mat. tanítása, 1958, № 6, 161—170 (венг.)

9663. Измерения на учебной площадке. Штегер (Mérések a terepen. Stéger Ferenc), Mat. tanítása, 1958, № 6, 173—180 (венг.)

9664. О недостатках в знаниях по математике выпускников средних школ Якутской АССР. Эстеркес Р. И., Уч. зап. Якутского ун-та, 1958, вып. 5, 97—105

9665 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Ч. 1. Дифференциальное исчисление и основные формулы интегрального исчисления с приложениями. 17-е изд. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil 1. Differentialrechnung und Grundformeln d. Integralrechnung nebst Anwendungen. 17. Aufl. Rothe R. Leipzig, Teubner, 1958, 211 S., ill., 5. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 33, 2380 (нем.)

9666 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Ч. 2. Интегральное исчисление, бесконечные ряды, векторное исчисление с приложениями. 14-е изд. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil 2. Integralrechnung, Unendliche Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen. 14. Aufl. Rothe R. Leipzig, Teubner, 1958, 210 S., ill., 5. 60 DM.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 39, 2837 (нем.)

9667 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Часть 3. Поверхности в пространстве. Линейные и кратные интегралы. Обыкновенные уравнения и уравнения в частных производных с приложениями. 10-е изд. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil 3. Flächen im Raume. Linienintegrale und mehrfache Integrale. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. 10. Aufl. Rothe R. Leipzig, Teubner, 1958, 236 S., ill., 5. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 37, 2686 (нем.)

9668 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Ч. 4. Вып. 5—6. Упражнения с решениями к части 3., 8-е изд. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil 4, Heft 5—6. Übungsaufgaben mit Lösungen zu Teil 3. 8. Aufl. Rothe R. Leipzig, Teubner, 1958, 108 S., 3.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 29, 2074 (нем.)

9669 К. Основы практической математики. Розенберг, Льюис (Essentials of business mathematics. 5th ed. rev. Rosenberg Reuben Robert, Lewis Harry. New York—London, McGraw-Hill Book Co., 1958, XIII, 370 pp., ill., 24sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 465, 10 (англ.)

9670 К. Высшая математика для практиков. 9-е изд. Йос, Калуза (Höhere Mathematik für den Praktiker. 9. verb. Aufl. Jóos G., Kaluza Th. Leipzig, Barth, 1958, XII, 399 S., ill., 23. 10 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 11, 753 (нем.)

9671 К. Математика для мореплавателей. Штеппес, Гунделах (Mathematik für Nautiker (5. Aufl. d. «Mathematik f. Seefahrtschulen» v. Meldau und Steppes). Steppes Otto, Gundelach Erich. Bremen, Geist, 1958, 186 S., ill., 19.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 49, 3613 (нем.)

9672 К. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление и в аналитическую геометрию. Бегл (Introductory calculus with analytic geometry. Begle Edward G. New York, Henry Holt, 1954, X., 304 pp., 4.50 doll.) (англ.)

9673 К. Вводный курс в чистую математику. Суэйн (An introductory course in pure mathematics. Swaine Kenneth Bruce. London, Harrap, 1958, 335 pp., ill., 15 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 447, 10 (англ.)

9674 К. Алгебра и дифференциальное исчисление. Келер (Algebra und Differentialrechnung. Kähler Erich. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1958, S. 53—164) (нем.)

9675 К. Введение в математику (для 6-х классов лицеев, средних школ и дополнительных курсов). Жирар, Фурнье (Initiation aux mathématiques. Classe de 6e des lycées, collèges et cours complémentaires. Girard Robert, Fournier Pierre-Marie. Paris, A. Colin, 1958, 256 p., ill., cart., 670 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 50, 1223 (франц.)

9676 К. Математика, физика и химия. Маргенау, Мерфи (The mathematics of physics and chemistry. 2nd ed. Margenau Henry, Murphy George Moseley. Princeton, N. J., Van Nostrand, Co., 1956, xiv, 604 pp., ill.) (англ.)

9677 К. Введение в высшую математику для студентов и самостоятельно изучающих. Т. I. Числа, функции, пределы, аналитическая геометрия, алгебра, теория множеств. Т. II. Дифференциальное исчисление, бесконечные ряды, элементы дифференциальной геометрии и теории функций. Мангольдт, Кнопп (Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende und zum Selbststudium. Mangoldt H. von. II. Aufl. Neu herausgg. und erw. Knopp Konrad. Stuttgart, Hirzel, 1958, Bd 1. Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre, XVI, 563 S., ill., 23.—DM; Bd 2. Differentialrechnung, unendliche Reihen, Elemente d. Differentialgeometrie und d. Funktionentheorie, XIV, 624 S., ill., 23.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 44, 3220 (нем.)

См. также: 9717, 9719, 9720, 9726 К, 10330 К, 10354 К, 10355 К, 10377 К, 10575.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

9678. О конструктивном понимании математических суждений. Шанин Н. А., Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 1958, **52**, 226—311

Сформулировав тезис, согласно которому понимание любого конкретного математического суждения обусловлено теми предпосылками, на основе которых это суждение формулируется, автор подвергает подробному рассмотрению вопрос о конструктивном понимании математических суждений, формулируемых на основе

следующих предпосылок, представляющих собой основные черты конструктивного направления в математике: 1. В качестве объектов суждений фигурируют только конструктивные объекты, представляющие собой слова в некоторых алфавитах или по крайней мере допускающие задание (кодирование) посредством слов в некоторых алфавитах. 2. При рассмотрении конструктивных объектов допускается абстракция потенциальной осуществимости, но исключается применение абстракции актуальной бесконечности.

В параграфе, содержащем обзор истории вопроса, автор отмечает важную роль, которую сыграла предпринятая Брауэром критика закона исключенного третьего и некоторых других логических принципов классической логики. Брауэр впервые сформулировал следующие два принципа конструктивного понимания математических суждений: 1) суждение «существует натуральное число, удовлетворяющее условию $\mathfrak{A}$» можно признать обоснованным лишь в том случае, когда указан метод построения некоторого натурального числа, удовлетворяющего условию $\mathfrak{A}$; 2) суждение «$\mathfrak{A}_1$ или $\mathfrak{A}_2$ ... или $\mathfrak{A}_n$» можно признать обоснованным лишь тогда, когда среди суждений $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ выделено некоторое суждение $\mathfrak{A}_i$ и дано обоснование выделенного суждения. Там же автор подвергает критике выдвинутые Клини принципы конструктивного истолкования математических суждений. Отмечены следующие недостатки теории Клини: расшифровка суждения обычно сложнее самого суждения и, являясь суждением того же типа, сама нуждается в расшифровке; правила расшифровки не идемпотентны. В качестве основного источника недостатков теории Клини автор видит исходную установку Клини, согласно которой со всяким суждением связывается некоторая конструктивная задача, причем суждение считается обоснованным лишь тогда, когда эта задача решена. Основное отличие предлагаемого автором конструктивного понимания суждений от теории Клини состоит в том, что конструктивные задачи связываются не со всеми суждениями, а только с некоторыми.

Автор вводит в рассмотрение логико-математические языки определенного типа (они названы основными логико-математическими языками). В качестве основы определения любого конкретного основного логико-математического языка берется список алфавитов, удовлетворяющий некоторым условиям. Язык, соответствующий некоторому списку алфавитов, предназначается для записи суждений о словах в этих алфавитах и об алгорифмах над этими алфавитами (в качестве точного понятия алгорифма берется разработанное А. А. Марковым понятие нормального алгорифма). Формулы языка определяются обычным образом, исходя из элементарных формул, имеющих следующий вид: 1) $!\,\Theta$, где Θ — предметный терм; формула читается «имеет смысл Θ»; 2) $(\Theta_1 \simeq \Theta_2)$, где Θ_1 и Θ_2 — предметные термы; формула читается «значение терма Θ_1 условно равно значению терма Θ_2». Основные логико-математические языки определяются так, что если при разработке математической теории на некотором этапе потребуется ввести в рассмотрение новые конструктивные объекты и для их построения к списку ранее введенных алфавитов присоединить новые, то в этот момент произойдет переход к некоторому новому основному логико-математическому языку, причем термы и формулы старого языка окажутся соответственно термами и формулами нового языка.

Автор называет формулу $\mathfrak{A}$ нормальной, если логические знаки $\exists$ и $\vee$ не входят в $\mathfrak{A}$. Формула $\mathfrak{B}$ называется вполне регулярной, если $\mathfrak{B}$ — нормальная формула или же представима в виде $\exists S\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — нормальная формула. Формула $\mathfrak{C}$ называется регулярной, если $\mathfrak{C}$ вполне регулярна или же представима в виде дизъюнкции вполне регулярных формул. Предлагаемое автором конструктивное понимание формул (суждений или условий) имеет следующие основные черты:

Истолкование любых формул сводится определенным образом к истолкованию нормальных формул. В рамках основных логико-математических языков дальнейшее сведение не производится. Истолкование нормальных формул сводится к истолкованию нормальных опорных формул, которые представляют собой формулы некоторых специальных логико-математических языков. В этих формулах: а) логические связи $\exists$ и $\vee$ не фигурируют; б) единственным исходным предикатом является предикат графического равенства слов; в) в качестве операций над словами фигурируют лишь нормальные алгорифмы некоторого определенного типа, применимые к любому слову в своем алфавите. Автор ограничивается сведением истолкования любой формулы к истолкованию соответствующей нормальной опорной формулы и указывает, что определенный подход к истолкованию нормальных опорных формул открывает работа П. Лоренцена (РЖМат, 1956, 5052). Истолкование Лоренцена включает в себя характеристику условий, при выполнении которых формула считается истинной. Истолкование любой нормальной формулы сводится к истолкованию соответствующей нормальной опорной формулы посредством истолкования элементарных подформул данной нормальной формулы. Оно осуществляется без использования логических связей $\exists$ и $\vee$ и основывается на следующем принципе, выдвинутом А. А. Марковым в качестве приемлемого в конструктивной математике: если процесс применения алгорифма $\mathfrak{Q}$ к исходному данному P не является безгранично продолжимым, то алгорифм $\mathfrak{Q}$ применим к P.

2. Сформулированные выше принципы Брауэра сводят истолкование вполне регулярных и регулярных формул к истолкованию нормальных формул.

3. Если формула $\mathfrak{A}$ не является регулярной, то ее понимание основывается на определенной расшифровке, представляющей собой преобразование формулы $\mathfrak{A}$ по некоторым правилам в регулярную формулу. Алгорифм, осуществляющий расшифровку формулы $\mathfrak{A}$, объединяет в себе ряд принципов, выражающих конструктивное понимание некоторых сочетаний логических связей. Автор называет его алгорифмом выявления конструктивной задачи, поскольку он дает возможность ответить на вопрос о том, включает ли в себя задача обоснования суждения $\mathfrak{A}$ задачу о построении некоторых конструктивных объектов (ответ отрицательный, если „расшифровка“ суждения $\mathfrak{A}$ является нормальной формулой, и утвердительный в противном случае). При утвердительном ответе алгорифм выявления конструктивной задачи дает формулировку соответствующей задачи.

Автор дает также краткий обзор некоторых понятий и теорем конструктивной теории множеств, тесно связанных с вопросом о конструктивном понимании суждений и условий. Далее вводятся в рассмотрение некоторые расширения основных логико-математических языков, позволяющие упростить и приблизить к формулировкам разговорной речи символические записи суждений и условий определенных типов. Здесь же рассматривается вопрос о конструктивном понимании суждений и условий, записываемых посредством таких расширений основных логико-математических языков.

Автор отмечает, что при рассмотрении вопроса о конструктивном истолковании суждений он в значительной мере руководствовался потребностями конструктивного математического анализа. Предлагаемое истолкование позволяет выделять те понятия, отношения и теоремы, с которыми связаны конструктивные задачи, и дает возможность найти формулировки соответствующих конструктивных задач.

Н. М. Нагорный

9679. Об алгорифме конструктивной расшифровки математических суждений. Шанин Н. А., Z. math. Logik und Grundl. der Math., 1958, **4**, 293—303 (рез. нем.)

Вариант статьи (реф. 9678), изложенный применительно к логико-арифметическому языку, построенному на основе теории частично рекурсивных функций. Алгорифм выявления конструктивной задачи полностью не описывается, но действие его иллюстрируется на примере расшифровки формулы

$$(\forall x\,(\exists y_1 y_2 y_3 \mathfrak{A} \supset \exists z_1 z_2 \mathfrak{B}) \supset \neg \forall u_1 u_2\,(\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \mathfrak{E})),$$

где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ — нормальные формулы, на которые наложен ряд ограничений технического характера. Оказывается, что результат $\mathfrak{R}$ применения к этой формуле алгорифма выявления конструктивной задачи есть нормальная формула, и потому, хотя исходная формула содержит знаки $\exists$ и $\vee$, для ее обоснования никакой конструктивной задачи решать не нужно, а требуется лишь дать обоснование суждения $\mathfrak{R}$ в рамках той части теории Лоренцена, в которой рассматриваются только логические связи &, $\supset$, $\neg$, $\forall$. Автор утверждает то, что любая формула, выводимая в расширении интуиционистского логико-арифметического исчисления, получаемом посредством присоединения к аксиомам исчисления формулы Роза (G. F. Rose, РЖМат, 1954, 2488), является истинной формулой в смысле истолкования, предлагаемого автором. Н. М. Нагорный

9680. Проблема слов. Бун (The word problem. Boone William W.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 10, 1061—1065 (англ.)

Излагаются следующие результаты по проблеме тождества для групп с конечным числом образующих элементов и определяющих соотношений:

а) Дается построение группы с неразрешимой проблемой тождества более простое, чем в прежней работе автора (РЖМат, 1959, 78). Намечен путь доказательства со ссылкой на эту статью.

б) Дан способ построения по любому ассоциативному исчислению некоторой группы, обладающей тем свойством, что вопрос об эквивалентности любой пары слов в данном ассоциативном исчислении алгорифмически сводится к вопросу о равенстве определенным образом соответствующей пары слов в этой группе.

с) Дается способ построения довольно простой группы с неразрешимой проблемой тождества. Пусть I есть ассоциативная система, с образующими $g_1, \ldots, g_N$ и определяющими соотношениями $A_1 = B_1, \ldots, A_M = B_M$, и пусть P есть некоторый фиксированный элемент I. Строится группа I_P с $N + 9$ образующими элементами $g_1, \ldots, g_N$, q, t_1, t_2 k, a, b, c, d, e и $6N + M + 13$ нетривиальными определяющими соотношениями

$$qA_j = d^j e^j a c^j d^j q B_j b^j c^j a e^j \Theta^j \quad (j = 1, \ldots, M)$$

$$\xi g_i = g_i \xi \quad (i = 1, \ldots, N;\ \xi = q,\ a,\ c,\ e),$$

$$\left.\begin{aligned} g_i d &= d^{M+1} a d^{M+1} g_i \\ b g_i &= g_i b^{M+1} a b^{M+1} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, N),$$

$$t_u \eta = \eta t_u \quad (u = 1,2;\ \eta = a,\ c,\ d,\ e),$$

$$\zeta k = k \zeta \quad (\zeta = a,\ b,\ c,\ e),$$

$$t_1 q P k P^{-1} q^{-1} t_1^{-1} = t_2 q P k P^{-1} q^{-1} t_2^{-1}.$$

Для любого элемента W системы I равенство $W = P$ в I имеет место в том и только том случае, если в I_P имеет место равенство $t_1 q W k W^{-1} q^{-1} t_1^{-1} = t_2 q W k W^{-1} q^{-1} t_2^{-1}$ (в статье здесь опечатка: буквы q и q^{-1} отсутствуют). Если в I неразрешима проблема равенства слову P, то в I_P неразрешима проблема тождества. Указывается, что при помощи этой конструкции на основе конкретной ассоциативной системы, построенной Скотт (Scott D., J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 1, 111—112), может быть построена конкретная группа с неразрешимой проблемой тождества с 40 нетривиальными определяющими соотношениями, а кроме того, более сложными методами может быть построена неразрешимая группа, задаваемая 32 соотношениями, и которых, однако, одно очень длинное. (Небольшое усложнение доказательства позволяет упростить конструкции автора и выписать явно 22 соотношения, задающие неразрешимую группу. *Реф.*). Дается также очень простое построение неразрешимой группы с конечным числом образующих, задаваемой бесконечным (рекурсивным) множеством определяющих соотношений.

Г. С. Цейтин

9681. Алгорифмы Маркова и теория машин. Риге (Algorithmes de Markov et théorie des machines. Riguet Jacques), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 4, 435—437 (франц.)

Показывается, как для данного нормального алгорифма (РЖМат, 1956, 2716) можно построить в известном смысле эквивалентную ему машину Эшби или A-машину (РЖМат, 1955, 2428).

Пусть дан нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ в алфавите A и пусть схема $\mathfrak{A}$ состоит из n формул подстановок. Пусть x — слово в A. Тогда через $\Gamma_{\mathfrak{A},\,i}(x)$ обозначается результат подстановки правой части i-й формулы схемы $\mathfrak{A}$ вместо первого вхождения левой части той же формулы в x; если же левая часть формулы не входит в x, то $\Gamma_{\mathfrak{A},i}(x)$ равно пустому слову Λ.

Состояниями соответствующей машины $\sum_{\mathfrak{A}}$ являются пары (i, x), где $0 \leqslant i \leqslant n$. Машина $\sum_{\mathfrak{A}}$ является отображением множества состояний в себя, определяемым следующим образом:

$$\sum_{\mathfrak{A}}(i, x) = \begin{cases} (0, x), & \text{если } \Gamma_{\mathfrak{A},\,i}(x) = \Lambda \text{ и } i = 0 \\ & \text{или } i = n \\ (i + 1, x), & \text{если } \Gamma_{\mathfrak{A},\,i}(x) = \Lambda \text{ и } i \neq 0 \text{ и } i \neq n \\ (1, \Gamma_{\mathfrak{A},\,i}(x)), & \text{если } \Gamma_{\mathfrak{A},\,i}(x) \neq \Lambda \text{ и } i\text{-я фор-} \\ & \text{мула схемы } \mathfrak{A} \text{ простая,} \\ (0, \Gamma_{\mathfrak{A},\,i}(x)), & \text{если } \Gamma_{\mathfrak{A},\,i}(x) \neq \Lambda \text{ и } i\text{-я} \\ & \text{формула схемы } \mathfrak{A} \text{ заключительная.} \end{cases}$$

Тогда $\sum_{\mathfrak{A}}(1, x) = (0, y)$ равносильно тому, что нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову x и перерабатывает его в слово y.

В. К. Детловс

9682. Граф-схемы и рекурсивные функции. Петер (Graphschemata und rekursive Funktionen. Péter Rózsa), Dialectica, 1958, **12**, № 3-4, 373—393 (нем.)

Л. А. Калужниным введено понятие граф-схемы. Граф-схема есть конечный связный ориентированный граф G. В G выделены вершина E, в которую ни одно ребро не входит, и вершина A, из которой ни одно ребро не выходит. Каждой вершине G, отличной от E и от A, принадлежит хотя бы одно входящее ребро и точно одно или два исходящих; в первом случае вершина называется математической, во втором — логической. Одно из ребер, исходящих из логической вершины, помечено знаком ↑ („истинно"), другое — знаком ↓ („ложно").

С граф-схемой G связано некоторое множество $\mathfrak{M}$. Каждой математической вершине C соответствует функция $C(m)$, определенная на подмножестве $\mathfrak{M}$ и принимающая значения из $\mathfrak{M}$. Каждой логической вершине C соответствует предикат $C(m)$, определенный на подмножестве $\mathfrak{M}$. Эти функции и предикаты называются исходными.

Граф-схема G определяет функцию $\varphi(m)$, значения которой получаются конечным числом шагов, причем каждый шаг есть переход от пары (C, p) к паре (D, q) (C, D — вершины G; p, q, $\in \mathfrak{M}$) по следующему правилу: Если C — математическая вершина, то D — конец исходящего из C ребра и $q = C(p)$; если же C — логическая вершина и $C(p) = \alpha$ ($\alpha = \uparrow, \downarrow$), то D — конец исходящего из C ребра, помеченного знаком α и $q = p$. На первом шаге $C = E$ и $p = m$. Если на каком-либо шаге получается $D = A$, то процесс заканчивается и полагают $q = \varphi(m)$.

Рассматриваются граф-схемы, для которых $\mathfrak{M}$ есть множество всевозможных n-ок натуральных чисел с произвольным n (причем считается $k = (k)$), исходные функции имеют один из видов $\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r})$, $\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}, 0)$ или

$$\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}, \quad n_{i_{r+1}} + 1),$$

где $i_1, \ldots, i_r, i_{r+1}$ принимают значения из ряда $1, \ldots, l$ и $r = 1, 2, \ldots$, и исходные предикаты имеют вид

$$\Gamma(n_1, \ldots, n_l) \equiv n_i = n_j \quad (i, j = 1, \ldots, l).$$

Доказывается, что класс функций, определенных такими схемами и принимающих в качестве значений натуральные числа, совпадает с классом частично рекурсивных функций. Этот результат позволяет дать отрицательный ответ на поставленный Л. А. Калужниным вопрос о возможности использовать граф-схемы для классификации рекурсивных функций. А. В. Гладкий

9683. О равносильности и преобразованиях схем программ. Янов (On the equivalence and transformation of program schemes. Ianov Iu. I.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1958, **1**, № 10, 8—12 (англ.)

Перевод статьи автора из Докл. АН СССР (РЖМат, 1958, 70).

9684. О матричных схемах. Янов Ю. И., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 2, 283—286

Приводятся формулировки ряда теорем, доказательства которых опубликованы автором позже (реф. 9686).

9685. О матричных схемах. Янов (On matrix program schemes. Ianov Iu. I.) Communs Assoc. Comput. Mach., 1958, **1**, № 12, 3—6 (англ.)

Перевод с русского статьи автора (реф. 9684).

9686. О логических схемах алгоритмов. Янов Ю. И., В сб.: Пробл. кибернетики. Вып. I. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 75—127

Изучаются логические схемы алгоритмов — строчки символов операторов и логических условий, определяющих порядок выполнения операторов. В §1 приводится алгоритм, позволяющий для любой пары схем установить, предписывают они выполнение одной и той же последовательности операторов или нет (т. е. решается проблема равносильности), а также решается аналогичная задача, когда принимаются во внимание только конечные последовательности выполняемых операторов. В § 2 строится система преобразований, с помощью которых любая схема может быть переведена в любую другую, ей равносильную. В § 3 рассматриваются записи логической структуры алгоритмов в виде матриц. Для них также решаются вопросы равносильности и равносильных преобразований. С помощью матричных схем получается решение вопроса равносильности при помощи определяющего соотношения для операторов вида $A_i = A_j$. Как утверждает автор, распространение этих результатов на случай нескольких определяющих соотношений такого вида не имеет принципиальных трудностей. Первые два параграфа и третий являются соответственно подробным изложением заметок автора (РЖМат, 1958, 70; реф. 9684). О. Б. Лупанов

9687. Рекурсивные действительные числа. Мешковский (Rekursive reelle Zahlen. Meschkowski Herbert), Math. Z., 1956, **66**, № 2, 189—202 (нем.)

Шпеккер (Specker E., J. Symb. Logic, 1949, **14**, 145—158) ввел понятия примитивно-рекурсивного (п. р.) действительного числа, п. р. десятичной дроби и п. р. сечения и показал, что каждое следующее из этих понятий уже предыдущего. Райс (РЖМат, 1955, 2524) доказывал эквивалентность этих понятий, если в определения заменить п. р. функции через общерекурсивные (о. р.). Но это доказательство не было конструктивным; в нем игнорировались, например, трудности, возникающие при сравнении конструктивных чисел по величине. Опираясь на существование такой п. р. функции G, что ни (n) $(G(n)) = 0)$, ни отрицание этого утверждения не могут быть доказаны в рекурсивной арифметике (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, II, Berlin, 1939), автор строит о. р. действительное число, которое не является о. р. десятичной дробью, а также о. р. десятичную дробь, которая не является о. р. сечением. Этим устанавливается невозможность доказать результат Райса в рамках рекурсивной арифметики.

Петер (РЖМат, 1955, 5573К) в §§ 11 и 24 доказывает несколько теорем о так называемых последовательностях Кантора

$$C_n = a_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_1 \ldots b_n}$$

(где $b_i = b(i) \geqslant 2$ и $a_i = a(i) \leqslant b(i) - 1$ являются о.р. функциями), стремящимися к иррациональным числам. Но здесь также не выдерживается последовательно конструктивный подход: считается, что иррациональное число как-то „дано“ независимо от о. р. последовательности рациональных чисел, стремящейся к нему. Автор уточняет формулировки и доказательства этих теорем.

О. р. последовательность с о. р. регулятором сходимости называется регулярной. Доказывается, что каждой регулярной последовательности можно сопоставить систему вложенных интервалов с о. р. концами, длина которых стремится к нулю. Доказывается также, что для каждой регулярной последовательности можно построить о. р. последовательность, которая в классическом смысле стремится к тому же пределу, но не сходится рекурсивно, т. е. не имеет о. р. регулятора сходимости. Имеются опечатки. В. К. Детловс

9688. Об определениях вычислимых вещественных непрерывных функций. Гжегорчик (On the definitions of computable real continuous functions. Grzegorczyk A.), Fundam. math., 1957, **44**, № 1, 61—71 (англ.)

Приводится определение вещественной вычислимой непрерывной функции, сформулированное на основе разработанного автором понятия вычислимого функционала (РЖМат, 1959, 3428). Затем доказывается эквивалентность этого определения шести другим, сходным с определениями Мазура, Шпеккера и Лакомба. Н. М. Нагорный

9689. О возможностях расширения понятия рекурсивной функции на функции одной или многих действительных переменных. Лакомб (Sur les possibilités d'extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. Lacombe

Daniel), Raisonnement en math. et en sci. exptl. Paris, CNRS, 1958, 67—74. Discuss., 75 (франц.)

Пусть R — множество всех действительных чисел, R_0 — сегмент $[-1,1]$ и пусть R^* (R_0^*) означает множество рекурсивных действительных чисел, принадлежащих R (R_0), а Q (Q_0) — множество сегментов с рациональными концами, содержащихся в R (в R_0). Отображение φ Q_0 в Q называется функцией приближения (fonction d'approche), если: a) $s \subset s'$ влечет $\varphi(s) \subset \varphi(s')$; b) если s и s' — смежны (sont adjacents), то $\varphi(s)$ и $\varphi(s')$ — смежны или перекрываются (sont empiétants). Функция приближения φ совершенна в точке x, если для любого действительного числа $h > 0$ существует действительное число $k > 0$ такое, что если $x \in s$ и длина s меньше k, то длина $\varphi(s)$ меньше h. Множество точек R_0, в которых φ — совершенна, называется областью совершенства φ.

Каждая функция приближения φ естественным образом порождает функцию действительной переменной f, определенную в области совершенства φ. Если при этом φ совершенна на всем R_0 и общерекурсивна, автор называет соответствующую функцию f рекурсивной R_0-функцией. Далее, автор называет функцию, определенную на R_0^*, рекурсивной R_0^*-функцией, если она порождается с общерекурсивной функцией приближения, область совершенства которой содержит R_0^*.

Формулируются (без доказательств) две теоремы: 1. Если f — рекурсивная R_0-функция, $a, b \in R_0^*$, $m \in R^*$ и m заключено между $f(a)$ и $f(b)$, то существует точка $c \in R_0^*$, заключенная между a и b и такая, что $f(c)=m$. 2. Максимум и минимум значений рекурсивной R_0-функции принадлежат R^*. (При этом, однако, максимум минимум не обязательно достигаются в точках R_0^*).

А. В. Гладкий

9690. Синтез логических сетей, операторы которых описаны средствами исчисления одноместных предикатов. Трахтенброт Б. А., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 4, 646—649

Излагается метод синтеза логических сетей, операторы которых задаются t-формулами $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; t)$, где $X_1, \ldots, X_n$ — свободные предикатные переменные, а $t = 1, 2, \ldots$

t-формулы — это обычные формулы расширенного исчисления одноместных предикатов, обладающие двумя свойствами: 1) в них встречается в точности одна свободная переменная t; 2) все предметные кванторы t-контролируемы.

Понятие t-контролируемости определяется индуктивно: I. Кванторы $[x]_{x \prec t}$ t-контролируемы ($[x]$ обозначает (x) или (Ex), а $\prec$ обозначает $<$ или $\leqslant$). II. Если $[\tau]$ — t-контролируемый квантор, то все кванторы вида $[x]_{x \prec \tau}$ также t-контролируемы. III. Других t-контролируемых кванторов нет.

Еще дается понятие Λ-оператора, имеющего каноническую схему

$$Z(t) = \Phi[X_1(t), \ldots, X_n(t), \Gamma_1(t), \ldots, \Gamma_k(t)],$$

$$\Gamma_\nu(t+1) = \Psi_\nu[X_1(t), \ldots, X_n(t), \Gamma_1(t), \ldots, \Gamma_k(t)],$$

$$\Gamma_\nu(1) = \sigma_\nu,$$

где $X_i(\tau)$ — входной предикат (время $\tau = 1, 2 \ldots$) и $Z(\tau)$ — выходной предикат.

Так как переход от канонической схемы Λ-оператора к реализующей ее логической сети осуществляется эффективно известным методом (см., например, Трахтенброт Б. А., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 6 (РЖМат, 1959, 5468)), то синтез логической сети по существу заключается в описании алгоритма, который перерабатывает любую t-формулу в каноническую схему Λ-оператора. Излагается метод построения такого алгоритма. Указывается, что данный алгоритм применим также и для языка более широкого, чем тот, при помощи которого задается t-формула, например, при расширении языка за счет допущения „двустороннего" ограничения кванторов вида $[x]_{y<x<z}$ при естественном обобщении понятия t-контролируемости. Отмечается также, что, например, для языка, в котором допускаются обычные схемы примитивно-рекурсивных определений, проблема распознавания — задает ли формула $\mathfrak{A}$ Λ-оператор или нет, будет алгоритмически неразрешимой.

Я. Барздыньш

9691. Прослеживаемые множества. Деккер, Майхилл (Retraceable sets. Dekker J. C. E., Myhill J.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 3, 357—373 (англ.)

Рассматриваются множества натуральных чисел с естественным упорядочением. Говорим, что частично рекурсивная функция прослеживает (retraces) множество α, если она отображает всякий элемент α, кроме наименьшего, в непосредственно предшествующий ему элемент, а наименьший элемент α оставляет на месте. Множество называется прослеживаемым, если существует функция, прослеживающая его. Множество называется сводимым в себе (introreducible), если оно сводимо (в смысле Тьюринга) к любому своему бесконечному подмножеству. Всякое прослеживаемое множество сводимо в себе. Всякое сводимое в себе множество рекурсивно или иммунно.

Теорема 1. Существует c прослеживаемых множеств, среди них $\aleph_0$ рекурсивных, c гипериммунных и c иммунных, но не гипериммунных.

Теорема 2. Всякая степень неразрешимости может быть представлена прослеживаемым множеством.

Теорема 3. Всякая степень неразрешимости рекурсивно перечислимого (р. п.) множества представима р. п. множеством с прослеживаемым дополнением.

Теорема 4. Всякое прослеживаемое множество с р. п. дополнением рекурсивно или гипериммунно.

Теорема 5. Существуют два прослеживаемых множества, отделимые р. п. множествами и такие, что их объединение не прослеживаемо, но сводимо в себе. Через ε_k обозначим множество натуральных чисел, не превосходящих k.

Теорема 6. Пусть α и β — прослеживаемые множества и $\alpha \neq \beta$. Тогда α и β имеют общую прослеживающую функцию в том и только том случае, если имеет место одно из двух: (1) $\alpha \cap \beta$ пусто и α и β отделимы р. п. множествами, (2) $\alpha \cap \beta$ непусто, но, конечно и, если $k = \max(\alpha \cap \beta)$, то $\alpha \cap \varepsilon_k = \beta \cap \varepsilon_k$ и множества $\alpha \setminus \varepsilon_k$ и $\beta \setminus \varepsilon_k$ отделимы р. п. множествами.

Теорема 7. Для всякой частично рекурсивной функции класс бесконечных множеств, прослеживаемых ею, конечен, счетен или имеет мощность c. (Доказывается без континуум-гипотезы.)

В доказательстве теоремы 5 на стр. 369 имеется, по-видимому, неточность, впрочем, легко исправимая. В формулировке теоремы 6 у авторов ошибочно пропущено слово „конечно". На поставленный в конце вопрос о достаточности некоторого условия для существования бесконечного рекурсивного множества, прослеживаемого данной функцией, можно дать отрицательный ответ на основе результатов И. Д. Заславского (РЖМат, 1956, 5678, теорема 1).

Г. С. Цейтин

9692. О природе математических систем. Гудстейн (On the nature of mathematical systems. Good-

stein R. L.), Dialectica, 1958, **12**, № 3-4, 296—316 (англ.; рез. франц.)

Высказывается мысль, иллюстрируемая примерами, что корень разногласий между формалистами и интуиционистами лежит не в вопросе о существовании или несуществовании тех или иных объектов, а в различном употреблении термина „функция".

Автор отрицает законность отождествления класса „эффективно задаваемых" функций с классом функций общерекурсивных; последние он называет квазирекурсивными функциями. Для обоснования этой точки зрения он указывает, что при задании общерекурсивной функции остается не известным число шагов, требуемых для ее вычисления. (Приводится такое сравнение: „Возьмется ли кто-нибудь оплачивать почасно работу вычислителя, если требуется найти хотя бы $f(0)$, основываясь лишь на уверенности, что на выполнение этой операции потребуется только конечное время?"). Автор считает, что имеется соответствие между примитивно-рекурсивными и общерекурсивными свойствами с одной стороны и прямыми доказательствами и доказательствами приведением к абсурду — с другой. Заключительная часть статьи содержит утверждение, что математика, в основном, является некоторой творческой активностью, созидающей понятия. Рассуждения статьи кажутся референту несколько туманными.

Замечены опечатки. На стр. 302 функция β в 13-й строке сверху должна быть не двуместной, а трехместной. На стр. 306 в посылке формулы в 8-й строке снизу вместо $P(x)$ должно стоять $\neg P(x)$. Ю. Т. Медведев

9693. Исследование пропозиционального исчисления, использованного в некоторой логической системе. Харрон (An investigation of the propositional calculus used in a particular system of logic. Harrop R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 4, 495—512 (англ.)

Рассматривается исчисление **A**, полученное из исчисления высказываний Аккермана (Ackermann W., J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 33—57) исключением части аксиом. Показана (содержательная) эквивалентность этих исчислений, т. е. то, что они имеют одно и то же множество доказуемых формул.

Две формулы X и Y из **A** автор называет эквивалентными (в смысле исчисления **A**), если, каковы бы ни были формула $\Phi(X)$ и вхождение X в эту формулу, из доказуемости $\Phi(X)$ вытекает доказуемость формулы $\Phi(Y)$, полученной из $\Phi(X)$ заменой указанного вхождения X на Y. Доказывается (теорема 5), что никакие две (графически) различные формулы исчисления **A** не эквивалентны в указанном смысле. В то же время, если доказуемы формулы $X \to Y$, $Y \to X$, $\sim X \to \sim Y$ и $\sim Y \to \sim X$, то из доказуемости формулы $\Phi(X)$ следует доказуемость формулы $\Phi(Y)$, полученной из $\Phi(X)$ заменой всех вхождений формулы X на Y (теорема 2).

Доказывается теорема о дедукции для **A** (теорема 6). **A** — классическая система (среди ее аксиом имеется $\sim\sim a. \to a$). Однако, как показывает автор (одно из следствий теоремы 1), конъюнкция в **A** доказуема, если доказуемы оба ее члена, а дизъюнкция — если доказуем хотя бы один из ее членов. Из этого вытекает, что **A** не имеет полной (т. е. такой, в которой истинны в точности все доказуемые в **A** формулы) модели с конечным числом значений истинности.

Далее строятся два расширения **A**: исчисления **A′** и **A″**. Второе из них, рассматривавшееся ранее Аккерманом (Math. Z., 1952, **55**, 364—384), является собственным расширением первого (т. е. имеет существенно более широкий класс доказуемых формул) (теорема 8). Для обоих этих исчислений доказывается теорема о дедукции и правило замены эквивалентных (на сей раз X и Y считаются эквивалентными при условии доказуемости в соответствующем исчислении формулы $(X \to Y) \& (Y \to X) \& (\sim X \to \sim Y) \& (\sim Y \to \sim X)$. Конъюнкция (дизъюнкция) в **A′** и **A″** выражаются обычным образом через дизъюнкцию (конъюнкцию) и отрицание, а импликация и отрицание в этих исчислениях независимы (теоремы 9—11) (в **A** независимы все названные символы).

Проблема разрешения для **A** разрешима. Автор высказывает гипотезу о ее разрешимости для **A′** и **A″**. **A′** и **A″**, подобно **A**, не имеют полных конечнозначных моделей. Ю. А. Гастев

9694. Аксиомы Пирса для исчисления высказываний. Прайор (Peirce's axioms for propositional calculus. Prior A. N.), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 2, 135—136 (англ.)

В 1885 году Пирс (C. S. Peirce) предложил систему аксиом исчисления высказываний, записываемых через импликацию *Cpq* и *o* (ложное высказывание) следующим образом: 1. *Cpq*; 2. *CCpCqrCqCpr*; 3. *CCpqCCqrCpr*; 4. *Cop*; 5. *CCCpqpp*. В реферируемой статье приводится 4 таблицы для *Cpq* с тремя значениями истинности. Эти таблицы соответственно показывают независимость аксиом 2, 3, 4 и 5 Пирса. Отмечается также, что аксиома 1 не является независимой. С. И. Адян

9695. Об обобщении кванторов. Мостовский (On a generalization of quantifiers. Mostowski A.), Fundam. math., 1957, **44**, № 1, 12—36 (англ.)

Рассматриваются операторы, представляющие обобщение логических кванторов. Для этих обобщенных кванторов формулируются проблемы, соответствующие классическим проблемам исчисления предикатов первого порядка. Некоторые из этих проблем решаются в реферируемой статье.

§ 1 посвящен определению обобщенных кванторов. Пусть I есть произвольное множество. Через I^* обозначим множество всевозможных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ элементов I. Через $\vee$ и $\wedge$ обозначаются значения истинности. Пропозициональной функцией на I называется отображение F множества I^* в $\{\vee, \wedge\}$, удовлетворяющее следующему условию: существует такое конечное множество номеров K, что из $x = (x_1, x_2, \ldots) \in I^*$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in I^*$ и $x_j = y_j$ для $j \in K$ следует $F(x) = F(y)$ (т. е. F по существу определяется конечным числом аргументов). Если минимальное множество K с указанным свойством содержит единственный элемент, то F есть функция одного аргумента. Пусть φ есть взаимно однозначное отображение I на множество I', которое может совпадать с I. Если $x = (x_1, x_2, \ldots) \in I^*$, то через $\varphi(x)$ обозначим $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots)$. Если F есть пропозициональная функция на I, то через F_φ обозначим пропозициональную функцию на I' такую, что $F_\varphi(y) = F(\varphi^{-1}(y))$. Квантор, ограниченный множеством I, есть функция Q, которая каждой пропозициональной функции F на I ставит в соответствие один из элементов $\vee$, $\wedge$ и удовлетворяет условию инвариантности

$$Q(F) = Q(F_\varphi)$$

для каждой функции F и каждой перестановки φ множества I. Пусть (m_ξ, n_ξ) есть последовательность всех пар кардинальных чисел, удовлетворяющих уравнению $m_\xi + n_\xi = \overline{\overline{I}}$, где $\overline{\overline{I}}$ означает мощность множества I. Для каждой функции T, приписывающей каждой паре (m_ξ, n_ξ) некоторое значение истинности, положим

$$Q_T(F) = T(\overline{\overline{F^{-1}(\vee)}}, \overline{\overline{F^{-1}(\wedge)}}).$$

Если $Q = Q_T$, то мы говорим, что функция T определяет квантор Q.

Теорема 1. Q_T есть квантор, ограниченный множеством I; для каждого квантора, ограниченного множеством I, существует такое T, что $Q_T = Q$.

Неограниченный квантор (или просто квантор) есть функция, которая приписывает каждому множеству I квантор Q_I, ограниченный множеством I, и которая удовлетворяет уравнению $Q_I(F) = Q_{I'}(F_\varphi)$ для каждой пропозициональной функции F на I с одним аргументом и для каждого взаимно однозначного отображения I на I'. Кванторы есть функции, значениями которых являются значения истинности $\vee$ и $\wedge$; поэтому естественным образом можно определить булевы операции над ними.

В § 2 приводятся некоторые примеры кванторов. В частности, если $\{T(m_\xi, n_\xi) = \vee\} \equiv \{m_\xi \neq 0\}$, то Q_T есть обычный квантор существования $\exists$, ограниченный множеством I. Если $\{T(m_\xi, n_\xi) = \wedge\} \equiv \equiv \{m_\xi \neq 0\}$, то Q_T есть обычный квантор общности $\forall$, ограниченный множеством I. Определяются также числовые кванторы и кванторы S, S_0, P.

Числовыми кванторами называются кванторы $\sum^{(m)}$ и $\prod^{(n)}$, определенные функциями

$$\{T'(m_\xi, n_\xi) = \vee\} \equiv \{m_\xi = m\},$$

$$\{T''(m_\xi, n_\xi) = \vee\} \equiv (n_\xi = n),$$

где m и n — фиксированные неотрицательные целые числа, а также все кванторы, полученные из них конечным числом применений булевых операций.

Квантор S определяется функцией

$$\{T_1(m_\xi, n_\xi) = \vee\} \equiv (m_\xi < \aleph_0),$$

квантор S^0 — функцией

$$\{T_2(m_\xi, n_\xi) = \wedge\} \equiv (m_\xi < \aleph_0 \text{ или } n_\xi < \aleph_0),$$

квантор P — функцией

$$\{T(m_\xi, n_\xi) = \vee\} \equiv (m_\xi \leqslant \aleph_0).$$

§ 3 посвящен описанию формальных исчислений с обобщенными кванторами. Пусть (S) есть формальное исчисление, построенное как исчисление предикатов первого порядка (с равенством), в котором роль обычных кванторов играют s кванторных символов $Q^1, Q^2, \ldots, Q^s$.

Обычным образом вводятся понятия связанной переменной и замкнутой формулы. Определяются понятия: формула Z исчисления (S) истинна (выполнима) на множестве I. Формула Z называется истинной (выполнимой), если она истинна (выполнима) на любом множестве I. Квантор Q^1_I называется определимым в I в терминах кванторов $Q^2_I, \ldots, Q^s_I$, если найдется формула Z исчисления (S), не содержащая символа Q^1, имеющая единственную свободную переменную F и такая, что формула $(Q^1x)\,F(x) \equiv Z$ истинна в I. Если это условие выполнено для каждого I и одного и того же Z, то автор говорит, что Q^1 определимо в терминах $Q^2, \ldots, Q^s$.

В § 4 исследуется проблема полноты для обобщенных кванторов $Q^1, \ldots, Q^s$ (для кванторов $Q^1_I, \ldots, Q^s_I$, ограниченных множеством I), заключающаяся в нахождении ответа на вопрос: будет ли рекурсивно-перечислимым множество истинных формул (формул, истинных на I). Квантор Q обладает свойством (E), если для каждого счетного множества I функция T, определяющая Q_I, удовлетворяет условию: множества $E_n[T(n, \aleph_0) = \wedge]$, $E_n[T(n, \aleph_0) = \vee]$ оба счетны.

Теорема 2. Если среди $Q^1, \ldots, Q^s$ есть кванторы общности и существования и, по крайней мере, один квантор Q со свойством E, то проблема полноты для этих кванторов имеет отрицательное решение.

Теорема 3. Если среди $Q^1, \ldots, Q^s$ имеются кванторы $\exists$, $\forall$, S или $\exists$, $\forall$, S^0, то проблема полноты для этих кванторов так же, как и проблема полноты для тех же кванторов, ограниченных некоторым счетным множеством, имеет отрицательное решение.

При этом следует заметить, что кванторы $\exists$, $\forall$, S и S^0 не обладают свойством (E).

Теорема 4. Пусть кванторы $\exists$, $\forall$ содержатся среди $Q^1, \ldots, Q^s$ и I есть счетное множество. Для положительного решения проблемы полноты для кванторов $Q^1_I, \ldots, Q^s_I$ необходимо и достаточно, чтобы все эти кванторы были числовыми.

Автор показывает, что метод, которым он доказывает эти теоремы, не годится уже для решения проблемы полноты для кванторов $\exists$, $\forall$, P (теорема 5).

§ 5 посвящен поискам условий, при которых в исчислениях (S) имеет место аналог теоремы Левенгейма — Сколема. Автор говорит, что Q не различает бесконечные мощности, если для любых двух бесконечных множеств I_1, I_2 функции T_1, T_2, которые определяют Q_{I_1}, Q_{I_2}, удовлетворяют уравнениям

$$T_1(n, \overline{\overline{I_1}}) \quad T_2(n, \overline{\overline{I_2}}),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$T_1(\overline{\overline{I_1}}, n) = T_2(\overline{\overline{I_2}}, n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$T_1(m_1, n_1) = T_2(m_2, n_2) \text{ для}$$

$$m_i + n_i = \overline{\overline{I_i}},\ m_i, n_i \geqslant \aleph_0,\ i = 1, 2.$$

Теорема 6. Если ни один из кванторов $Q^1, \ldots, Q^s$ не различает бесконечные мощности, то каждая замкнутая формула, выполнимая в некотором бесконечном множестве, выполнима также в счетном множестве.

Теорема 7. Если среди кванторов $Q^1, \ldots, Q^s$ есть $\exists$ и $\forall$ и если хотя бы один из этих кванторов различает бесконечные мощности, то найдется замкнутая формула, выполнимая в несчетном множестве, но не выполнимая в счетном.

Теорема 8. Если среди $Q^1, \ldots, Q^s$ есть $\exists$ и $\forall$ и если каждая формула исчисления (S), выполнимая в некотором бесконечном множестве, выполнима также в любом другом бесконечном множестве, то для каждого множества I кванторы $Q^1_I, \ldots, Q^s_I$ все определимы в терминах кванторов $\exists$ и $\forall$.

В § 6 рассматривается подсистема (S^M) формул системы (S), содержащих только функциональные переменные с одним аргументом. Через (S^M_n) обозначается подсистема формул системы (S^M), содержащих только функциональные переменные $F_1, \ldots, F_n$.

Теорема 9. Существуют кванторы $Q^1, \ldots, Q^s$ такие, что множество таких формул системы (S^M), которые выполнимы в счетном множестве, не рекурсивно.

В то же время верна

Теорема 11. Для каждого $n \geqslant 1$ множество истинных формул системы (S^M_n) и множество формул (S^M_n), которые истинны в любом заданном множестве I, рекурсивны.

Автор отмечает, что теорема 11 не имеет практических приложений, так как доказательство его не является эффективным.

Теорема 10. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots < m_s$ есть s кардинальных чисел таких, что $m_2, \ldots, m_s$ бесконечны, а m_1 либо есть 1, либо бесконечно. Пусть $Q^1, Q^2, \ldots, Q^s$ есть такие кванторы, что для каждого I

$$\{Q_I^j(F) = \vee\} \equiv \overline{\overline{I}} \geqslant m_j), \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Тогда множество истинных формул соответствующей системы (S^M) рекурсивно. Вопрос об общей характеристике кванторов, для которых множество истинных формул (S^M) рекурсивно, остается открытым.

Отметим еще один вопрос, поставленный в реферируемой работе: Пусть дано множество целых чисел A. Через $H(A)$ обозначим множество чисел p, удовлетворяющих условию: существуют в A $n_1, n_2, \ldots, n_p$ такие, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_p \in A$. Можно ли найти такое рекурсивное A, чтобы соответствующее $H(A)$ было не рекурсивно.

В результате своих исследований автор приходит к мысли, что вообще невозможно задать формальное исчисление, в котором были бы доказуемы все истинные утверждения, содержащие обобщенные кванторы. Несмотря на это, он считает изучение этих кванторов весьма целесообразным, так как уверен, что „построение формальных исчислений есть не единственная и даже не самая важная задача символической логики". С. И. Адян

9696. Редукция систем аксиом со схемами аксиом к системам, не содержащим схем аксиом. Сколем (Reduction of axiom systems with axiom schemes to systems with only simple axioms. Skolem Th.), Dialectica, 1958, 12, № 3-4, 443—450 (англ.)

В книге Гильберта и Аккермана „Основы теоретической логики" (см. стр. 139) различаются два типа систем аксиом, построенных на основе узкого исчисления предикатов: 1) системы аксиом первой ступени, в которых аксиомы могут содержать только индивидуальные предикаты; 2) системы аксиом второй ступени, где аксиомы уже могут содержать и переменные предикаты (такие аксиомы фактически являются схемами аксиом первого типа). Там же было отмечено, что хотя во второй аксиоме тождества встречается переменный предикат, все же во всякой конкретной системе аксиом она может быть заменена аксиомами без переменных предикатов.

Цель реферируемой статьи заключается в том, чтобы показать, каким образом всякую систему S аксиом второй ступени перевести в систему S' аксиом первой ступени. Для этой цели автор к области индивидов системы S добавляет в качестве индивидов системы S' всевозможные конечные последовательности индивидов системы S и еще новые индивиды, соответствующие переменным предикатам системы S (последние, в отличие от остальных индивидов, автор называет индивидами второго типа). Далее вводятся 4 индивидуальных предиката системы S': 1) отношение принадлежности $\in$; 2) отношение равенства $=$; 3) отношение „равной длины" λ и 4) отношение сцепления C. Приводятся 8 аксиом; описывающих эти четыре индивидуальных предиката и утверждающих существование тех или иных индивидов S' второго типа. Из этих аксиом автор выводит в качестве примеров существование в S' индивидов второго типа, соответствующих отношениям системы S: 1) $A(x, y) \& B(z)$, 2) $(Ey)\,A(x, y) \& B(y, z)$. В заключение автор отмечает, что аналогичная редукция возможна также для систем аксиом, построенных на основе исчислений предикатов высших ступеней. С. И. Адян

9697. Формальные системы конструктивной математики. Лёб (Formal systems of constructive mathematics. Löb M. H.), J. Symbolic Logic, 1956, 21, № 1, 63—75 (англ.)

В опубликованной ранее статье (РЖМат, 1954, 3589), примыкающей к работе Майхилла (Myhill J. R., J. Symbolic Logic, 1950, 15, №3, 185—196), автор построил конструктивную формальную арифметику K_1, в которой основными понятиями являются две буквы a, b, равенство, объединение (образование нового „слова" приписыванием одного „слова" за другим (concatenation)), конъюнкция, дизъюнкция, ограниченный (по длине слов) универсальный квантор и квантор существования.

В данной работе строится система Σ, не содержащая конъюнкции и дизъюнкции как основных понятий, но в остальном эквивалентная с K_1. Доказывается, что все формулы (statement — matrices) системы Σ могут быть приведены к виду

$$(E\alpha_1)(\beta)\alpha_1(E\alpha_2)\ldots(E\alpha_n)(\gamma = \delta),$$

где $(\beta)\alpha_1$ означает: для всех слов β, длина которых не превышает α_1. Это соответствует результату Дейвиса (РЖМат, 1954, 1532). Построена также эквивалентная Σ система Σ_μ, в рамках которой вводится отношение порядка для слов; основными понятиями в Σ_μ являются только буква b, равенство, объединение и оператор μ, дающий первое слово с указанным свойством.

Согласно Майхиллу (см. цитированную работу), формальная система S называется финитной, если гёделевы номера теорем S являются значениями некоторой общерекурсивной функции. Всякая такая система может быть представлена в Σ_μ в следующем смысле: Σ_μ содержит предикат Thm_S такой, что $Thm_S(\mathfrak{a})$ выводимо в Σ_μ в точности тогда, когда в S выводима формула p с гёделевым номером $\mathfrak{a}$. В. К. Детловс

9698. Метатеорема о системе *SLK*. Секи (A metatheorem on *SLK*. Seki Setsuya), Comment math. Univ. Sancti Pauli, 1954, 3, № 1, 31—36 (англ.)

Рассматривается обобщение генценовской системы *LK* — система *SLK*, описанная в предыдущей работе автора (РЖМат, 1956, 5042). Доказывается метатеорема: Пусть Γ — последовательность формул *LK*. Если секвенция $\Gamma \to$ доказуема в *SLK*, то она доказуема и в *LK*. Доказательство метатеоремы основывается на „основной метатеореме" *SLK* (аналоге теоремы Генцена об устранимости сечений) и использует описываемый в работе оператор $\mathfrak{C}$, применимый к термам, формулам и секвенциям *SLK* и перерабатывающий их, соответственно в термы, формулы и секвенции *LK*. Применение $\mathfrak{C}$ к каждой секвенции данного доказательства $\Gamma \to$ в *SLK* и дает искомое доказательство $\Gamma \to$ в *LK*. Ю. А. Гастев

9699. Об аксиомах порядка и следования. Бинг (On the axioms of order and succession. Bing Kurt), J. Symbolic Logic, 1957, 22, № 2, 141—144 (англ.)

Рассматривается система аксиом **B**, описанная Гильбертом и Бернайсом (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, vol. 1, Berlin (Springer), 1934, 273), над узким исчислением предикатов:

(J_0) $0 \equiv 0$;
(J_2) $a \equiv b \to (A(a) \to A(b))$;
$(<_1)$ $\overline{a < a}$;
$(<_2)$ $a < b \;\&\; b < c \to a < c$;
$(<_3)$ $a < a'$;
(Ind) $A(0) \& (x)(A(x) \to A(x')) \to A(a)$;
(Cov) $a < b \to a' \equiv b \vee a' < b$.

Хазенйегер (Hasenjaeger G., Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1950, 1, 30—31) показал, что если в **B** аксиому (J_0) заменить на $a \equiv a$ (J_1), то в полученной системе (Cov) оказывается зависимой от других

аксиом (независимость (Cov) в B показана Гильбертом и Бернайсом).

Пусть B_1 — система, получающаяся из B заменой (J_0) на (J_1) и исключением (Cov). Пусть, далее, B′ (B′$_1$) — система, получающаяся из B (B_1) исключением схемы аксиом (Ind). В работе доказываются следующие теоремы.

1. B_1 эквивалентна B.
2. B_1 независима.
3. (J_2) независима в B′ (даже, если рассматривать B′ в исчислении предикатов второй ступени). То же относится к аксиомам $a \neq b \to a < b \vee b < a$ (Trich) и $a' \equiv b' \to a \equiv b$ (P_2), в то время как $a \equiv b \to a' \equiv b'(P_3)$ доказуема, по Гильберту и Бернайсу, при помощи $a' \equiv a'$ и (J_2).

В заключение автор приводит простой пример конечной и ω-неполной системы аксиом, состоящей всего из двух аксиом: (J_0) и (P_3). Ю. А. Гастев

9700. Определение отрицания в расширенной базисной логике. Фитч (A definition of negation in extended basic logic. Fitch Frederic B.), J. Symbolic Logic, 1954, № 1, 20—36 (англ.)

Для расширенной базисной логики K′ (Fitch F., J. Symbolic Logic, 1948, **13**, 95—106) проводится упрощение, аналогичное проведенному в предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 4189) для базисной логики K (Fitch F., J. Symbolic Logic, 1942, **7**, 105—114). В частности, показано, что отрицание определяется в K′ в терминах других понятий K′. Этот же метод можно использовать для определения в K′ U-выражения, представляющего сам класс K′.

Доказано высказанное ранее (РЖМат, 1955, № 4189) утверждение, что K′ позволяет ввести в рассмотрение трансфинитную индукцию, необходимую для определения K′. Указана возможность построения систем K*′ и K+′, относящихся к K′ так, как K* и соответственно K+ (см. последнюю из цитированных работ автора) относятся к K. В частности, K*′ есть минимальный бесконечный класс для любых отношений (с любым числом мест).

Примечание референта. На стр. 29 (17 строка сверху) вместо K′ следует читать K. Ю. А. Гастев

9701. Рекурсивные функции в базисной логике. Фитч (Recursive functions in basic logic. Fitch Frederic B.), J. Symbolic Logic., 1956, **21**, № 4, 337—346 (англ.)

В исчислении K* базисной логики (РЖМат, 1955, 4189) обычным образом вводятся натуральные числа, примитивно-рекурсивные, а затем и обще- и частично-рекурсивные функции. Затем, способом, аналогичным примененному ранее автором для системы K′ (реф. 9700), в K* вводится оператор отрицания „∼“, удовлетворяющий обычным для такого рода операторов требованиям. Ю. А. Гастев

9702. Определение существования в терминах абстрактов и дизъюнкции. Фитч (A definition of existence in terms of abstraction and disjunction. Fitch Frederic B.), J. Symbolic Logic, 1957, **22**, № 4, 343—344 (англ.)

Работа примыкает к предыдущим работам автора по базисной логике (J. Symbolic Logic, 1948, **13**, 95—106; РЖМат, 1955, 4189; реф. 9700, 9701), в которых дано следующее определение.

Одноместным абстрактом (у автора — abstraction) называется такое U-выражение c, что $ca \leftrightarrow (\ldots a \ldots)$; это выражение обозначается $\hat{x}\,(\ldots x \ldots)$ (обычно термин „абстракт“ относят как раз к такому способу обозначения). Аналогично определяется дву- и трехместные абстракты. В ранней работе автора (J. Symbolic Logic, 1942, **7**, 105—114) было показано, что такой абстракт существует для любого U-выражения $(\ldots x \ldots)$, находящего в K.

В реферируемой работе в терминах двуместных абстрактов и при помощи оператора дизъюнкции $\vee$, также определенного ранее, определяется оператор существования E. Ю. А. Гастев

9703. Расширенная разновидность расширенной базисной логики. Фитч (An extensional variety of extended basic logic. Fitch Frederic B.), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 1, 13—21 (англ.)

В работе и двух приложениях к ней описана система базисной логики KE′, получающаяся из „расширенной базисной логики“ K′ (Fitch F., J. Symbolic Logic, 1948, **13**, 95—106; реф. 9700) добавлением принципа объемности в следующей форме: **6.37.** Если a и b имеют одинаковую неотрицательную степень n, и для всех $c_1, \ldots c_n$ выполнены следующие четыре условия:

$ac_1 \ldots c_n \vdash bc_1 \ldots c_n$,

$bc_1 \ldots c_n \vdash ac_1 \ldots c_n$,

$\sim (ac_1 \ldots c_n) \vdash \sim (bc_1 \ldots c_n)$,

$\sim (bc_1 \ldots c_n) \vdash \sim (ac_1 \ldots c_n)$,

то $\mathbf{O} \vdash [a = b]$.

Здесь **O** — пустой класс U-выражений; степень U-выражения определена по индукции в начале работы. Обозначения см. РЖМат, 1955, 4189. Ю. А. Гастев

9704. Функциональные построения в k-значной логике. Яблонский С. В., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1958, **51**, 5—142

Статья носит обзорный характер.

В первой главе излагаются основы алгебры логики и теории контактных схем. Рассматривается множество P_2 функций, аргументы которых принимают значения 0 и 1 и которые также принимают лишь значения 0 и 1 (функции алгебры и логики) и приводятся некоторые свойства элементарных функций из P_2. Приводится теорема о полноте системы функций алгебры логики (система функций из P_2 называется полной, если у нее путем образования суперпозиций можно получить все функции из P_2) (Post E., Amer. J. Math., 1921, **43**, 163—185; Яблонский С. В., Матем. сб., 1952, **30(72)**, 329—348). Даже описываются основные результаты (полученные до 1956 г.) о представлении функций из P_2 дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами (т. е. дизъюнкциями конъюнкций переменных или их отрицаний и конъюнкциями дизъюнкций переменных или их отрицаний) и дается обзор методов упрощения нормальных форм. Затем вводится математическое определение контактной схемы и описываются методы синтеза контактных схем К. Е. Шеннона („метод универсальных многополюсников“) и Г. Н. Поварова („метод каскадов“). В конце главы приводится доказательство (К. Е. Шеннона и Г. Н. Поварова (асимптотических выражений для числа n-местных операторов (классов функций, каждая из которых получается из некоторой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_2 путем переименования переменных и типов функций n переменных (определение отличается от определения оператора тем, что допускается навешивание отрицаний на переменные).

Вторая глава содержит обзор основных результатов, связанных с функциональными построениями в k-значной логике, полученных автором реферируемой статьи и другими авторами Изучается класс P_k функций, аргументы и значения которых принадлежат множеству $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Основным рассматриваемым объектом являются классы функций из P_k, замкнутые относительно операции суперпозиции (замкнутые классы). Полнота системы функций в P_k определяется так же, как в P_2 (и аналогично для произвольного замкнутого класса). Приводится ряд условий полноты системы функций в P_k. Сформулируем два утверждения о необходимых и достаточных условиях полноты.

Теорема (А. В. Кузнецова). Можно эффективно построить систему замкнутых классов в P_k

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_s,$$

каждый из которых целиком не содержит ни одного из остальных классов и такую, что подсистема функций из P_k полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_s$.

Теорема (критерий полноты). Для того чтобы система функций из P_k ($k \geqslant 3$), содержащая все функции одного переменного из P_k, выпускающие хоть одно значение, была полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k, зависящую существенно от $n > 1$ переменных и принимающую k значений.

Далее рассматриваются замкнутые классы, порождаемые конечными системами функций. Показывается, что на них переносятся многие результаты, справедливые для P_k. Конец главы посвящен описанию некоторых семейств предполных классов (замкнутый класс $\mathfrak{M}$ называется предполным, если $\mathfrak{M} \neq P_k$ и добавление к $\mathfrak{M}$ любой функции, не принадлежащей $\mathfrak{M}$, превращает $\mathfrak{M}$ в систему, полную в P_k).

В третьей главе дается полученное ранее автором решение проблемы полноты для P_3 (трехзначного исчисления) (РЖМат, 1955, 27). Именно, описываются все предполные классы в P_3 (18 классов). Для того чтобы система функций была полна в P_3, необходимо и достаточно, чтобы она не принадлежала целиком ни одному из этих классов. Библ. 39 назв.

О. Б. Лупанов

9705. Заметка о представлении общерекурсивных функций и оператора μ. Роз (A note on the representation of general recursive functions and the μ quantifier. Rose Alan), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, 55, № 2, 145—148 (англ.)

Ранее автором было построено некоторое бесконечнозначное расширенное исчисление высказываний и доказано, что в этом исчислении представимы все примитивно-рекурсивные функции (РЖМат, 1956, 8534). Реферируемая статья посвящена распространению этого результата на общерекурсивные функции и оператор μ. Теорема 1. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть произвольная общерекурсивная функция. Тогда существует формула $\Psi(p_1, \ldots, p_n, q)$ такая, что $\Psi(p_1, \ldots, p_n, q)$ принимает значение истинности $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$, когда $p_1, \ldots, p_n, q$ принимают значения истинности $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ соответственно и при этом $\psi(2^{-\alpha_1}, \ldots, 2^{-\alpha_n}, 2^{-\omega}) = 1$, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \omega$, а во всех остальных случаях $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = 0$. Теорема 3 указывает каким образом в рассматриваемом исчислении можно представить оператор μ.

С. И. Адян

9706. Алгебраический анализ многозначных логик. Чжан (Algebraic analysis of many valued logics. Chang C. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 2, 467—490 (англ.)

Изучается специальный класс алгебр (MV-алгебр), тесно связанный с многозначными логиками, в частности, с $\aleph_0$-значным пропозициональным исчислением Zukasiewicz J., Tarski A., Compt. rend. Séances Soc. Sci. et Lettres Varsovie, cl. III, 1930, 23, 30—50). Алгебра $< A, +, \cdot, -, 0, 1 >$, где $+$, $\cdot$ и $-$ соответственно бинарные и унарная операции на A и $0, 1$ — выделенные элементы в A, называются MV-алгеброй, если она удовлетворяет следующей системе аксиом:

Ax. 1. $x + y = y + x$, Ax. 1′. $x \cdot y = y \cdot x$,
Ax. 2. $x + (y + z) = (x + y) + z$, Ax. 2′. $x(y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
Ax. 3. $x + \bar{x} = 1$, Ax. 3′. $x \cdot \bar{x} = 0$,
Ax. 4. $x + 1 = 1$, Ax. 4′. $x \cdot 0 = 0$,
Ax. 5. $x + 0 = x$, Ax. 5′. $x \cdot 1 = x$.
Ax. 6. $[x + y]^- = \bar{x} \cdot \bar{y}$, Ax. 6′. $[x \cdot y]^- = \bar{x} + \bar{y}$,
Ax. 7. $x = [\bar{x}]^-$, Ax. 8. $\bar{0} = 1$,

Определение 1. $1.\ x \vee y = (x \cdot \bar{y}) + y$, $x \wedge y = (x + \bar{y}) \cdot y$.
Ax. 9. $x \vee y = y \vee x$, Ax. 9′. $x \wedge y = y \wedge x$,
Ax. 10. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, Ax. 10′. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
Ax. 11. $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$,
Ax. 11.′ $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$.

Множество L классов $[P/\equiv]$ эквивалентных формул в $\aleph_0$-значном пропозициональном исчислении образует MV-алгебру, если положить: $[P/\equiv] + [Q/\equiv] = [BPQ/\equiv]$; $[P/\equiv] \cdot [Q/\equiv] = [LPQ/\equiv]$; $[P/\equiv]^- = [NP/\equiv]$; $[P/\equiv] = 1$; $[Q/\equiv] = 0$ соответственно тогда и только тогда, когда $\vdash P$, $\vdash NQ$ (т. е. доказуемы); $[P/\equiv] \vee [Q/\equiv] = [APQ/\equiv]$, $[P/\equiv] \wedge [Q/\equiv] = [KPQ/\equiv]$ (реф. 9707). Множество S действительных чисел $x \in [0, 1]$, необязательно всех, становится MV-алгеброй $< S, +, \cdot, -, 0, 1 >$, если в S ввести операции: $x + y = \min(1, x + y)$, $x \cdot y = \max(0, x + y - 1)$, $\bar{x} = 1 - x$ и предположить, что $0 \in S$, $1 \in S$ и S замкнуто относительно этих операций. (При этом $x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$. В частных случаях: $S = S(m) = \left\{0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}, 1\right\}$, m — целое > 0, $S = S(\infty) =$ множеству всех рациональных чисел $\in [0, 1]$, $S = [0, 1]$.

Определения. Индуктивно: $0 \cdot x = 0$, $(n + 1) \cdot x = n \cdot x + x$; $x^0 = 1$, $x^{n+1} = (x^n) \cdot x$. Наименьшее m, для которого $m \cdot x = 1$, называется порядком элемента x и обозначается через $\mathrm{ord}(x)$. MV-алгебра называется локально конечной, если всякий ен элемент, отличный от 0, имеет конечный порядок. $x \leqslant y$ равнозначно $x \vee y = y$. Понятие атома такое же, как в булевой алгебре. Важную роль в рассуждениях играет функция $d(x, y) = \bar{x} \cdot y + \bar{y} \cdot x$, называемая расстоянием между элементами x и y. (Ее свойства здесь во многом отличны от свойств симметрической разности в булевых алгебрах: отсутствует, например, ассоциативность). Изучается арифметика MV-алгебр и их строение. Доказывается, что локально конечная MV-алгебра, содержащая атом порядка m, изоморфна алгебре $< S(m), +, \cdot, -, 0, 1 >$ (теорема 3.12 и 3.19). Для безатомных, локально конечных MV-алгебр удается лишь показать, что они плотно упорядочены (теорема 3.21). Автор высказывает предположение: если A счетна, локально конечна и не содержит атомов, то A изоморфна подалгебре MV-алгебры $< [0, 1], +, \cdot, -, 0, 1 >$, отмечая однако, что он не умеет ни доказать, ни опровергнуть это предположение.

Раздел 4-й статьи „Идеалы, конгруэнтности и проблема представления". Подмножество $I \subseteq A$ называется идеалом в A, если I удовлетворяет условиям: $0 \in I$, если $x, y \in I$, то $x + y \in I$, если $x \in I$ и $y \leqslant x$, то $y \in I$. Отметим теоремы: 4.4. Существует собственный идеал I такой, что $x \in I$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ord}(x) = \infty$; 4.7. Пусть M — идеал в A, тогда эквивалентны условия: (i) M максимален, (ii) для всякого элемента $x \notin M$ существует n, что $\bar{x}^n \in M$, (iii) A/M локально конечна. Далее вводится следующее определение: MV — алгебра называется представимой, если она изоморфна подалгебре прямого произведения локально конечных MV-алгебр. Доказывается, что MV-алгебра представима тогда и только тогда, когда пересечение всех ее максимальных идеалов равно $\{0\}$. Приводится пример не представимой MV-алгебры, который к тому же показывает, что класс K представимых MV-алгебр не является универсально аксиоматизируемым (теорема 4.1).

Последний раздел статьи посвящен приложениям полученных результатов к *MV*-алгебре *L*. Основной является теорема 5.3:
Для того, чтобы $\aleph_0$-значная логика была полной, необходимо и достаточно, чтобы *MV*-алгебра *L* была представимой. Автор отмечает, что в данный момент у него нет простого и прямого доказательства представимости *L*, и потому попытка получить алгебраическое доказательство полноты $\aleph_0$-значной логики — один из побудительных мотивов всего исследования — оказывается лишь частично успешной. Тем не менее, доказывается теорема 5.4:
Если $x = P(Y_1, \ldots, Y_s) \in L$ и $P(Y_1, \ldots, Y_s)$ тождественна, то $x + x = 1$. Наконец, устанавливаются некоторые связи между $\aleph_0$-значной логикой и *n*-значными логиками. Доказательство теоремы 5.3 ведется с помощью *MV*-алгебры $< S(\infty); +, \cdot, —, 0, 1 >$. Д А. Захаров

9707. Фрагменты исчислений многозначных предложений. Роз, Россер (Fragments of many-valued statement calculi. Rose Alan, Rosser J. Barkley), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 1—53 (англ.)

Статья является дальнейшим развитием идей Лукасевича и Тарского (Lukasiewicz J., Tarski A., Comptrend. Séances Soc. sci. et lettres Varsovie. Cl. III, 1930, 23, 30—50).

Через *I* обозначается множество значений истинности. На *I* налагаются следующие ограничения: Если $x \in I$, то $0 \leqslant x \leqslant 1$. *I* — непусто. *I* — замкнуто относительно функций *c* и *n* $c(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$, $n(x) = 1 - x$. *I* должно содержать 0 и 1 и может содержать только их. Если *I* содержит *M* чисел, то оно должно состоять из рациональных чисел:

$$0, \frac{1}{M-1}, \frac{2}{M-1}, \ldots, \frac{M-2}{M-1}, 1.$$

Если *I* — бесконечное множество, то оно состоит из всех рациональных чисел или всех действительных чисел интервала [0, 1]. *I* делится на множество выделенных и множество невыделенных значений. Если *S* — действительное число $0 \leqslant S \leqslant 1$, то все значения из *I*, меньшие *S*, относятся к множеству невыделенных значений, а значения большие *S* — к множеству выделенных значений (относительно самого *S*, если $S \in I$, это оговаривается особо). При этом всегда должно быть, что 0 — значение невыделенное, 1 — выделенное.

Проблема состоит в следующем: как выбрать *I*, *S* и систему неопределяемых функций, а затем построить систему аксиом и правил, так чтобы в полученном исчислении были выводимы те и только те функции, которые принимают только выделенные значения. Приведены фрагменты общей теории, для специальных случаев дано полное решение рассматриваемой проблемы.
Т. Л. Майстрова

9708. Зависимость аксиомы Лукасевича. Мередит (The dependence of an axiom of Lukasiewicz. Meredith C. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 54 (англ.)

Доказана выводимость аксиомы А5 (реф. 9707) из схем аксиом А1—А4.

Для доказательства схемы А5 используются схемы аксиом А1 — А3, их следствия и утверждение $\vdash CCQPCQR \equiv CCPQCPR$, полученное из схем аксиом А1 — А4 в указанной статье Роза и Россера. Возникает вопрос, можно ли доказать аксиому А5, используя исчисление, основанное только на схемах аксиом А1—А3.
Т. Л. Майстрова

9709. Доказательство аксиомы Лукасевича. Чжан (Proof of an axiom of Lukasiewicz. Chang C. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 55—56 (англ.)

Дано доказательство выводимости аксиомы А5 из аксиом А1—А4 и их следствий (см. §10 работы Роза и Россера; реф. 9707).
Т. Л. Майстрова

9710. Логическое строение арифметики. Чеконни (L'organizzazione logica dell'aritmetica. Cecioni Francesco), Archimede, 1958, **10**, № 2-3, 81—89 (итал.)

В статье, являющейся извлечением из 1-й части книги автора «Lezioni sui fondamenti della matematica» (CEDAM, Padova) излагаются с комментариями системы аксиом арифметики натуральных чисел Пеано и Пьери. (Система Пьери отличается от системы Пеано тем, что аксиома индукции заменена аксиомами: (α) всякое число, отличное от 0, имеет предшествующее; (β) во всяком непустом классе чисел имеется число, не следующее ни за каким числом этого класса). Примеры арифметических теорем отсутствуют. Новых результатов статья не содержит.
А. В. Гладкий

9711. О счетных базисах формальных систем. Ван Хао (On denumerable bases of formal systems. Wang Hao), Math. Interpretation Formal Systems. Amsterdam, N. V. Noord-Holl. Uitg., 1955, 57—84 (англ.)

Обзор по различным вопросам, связанным, по утверждению автора, с понятием базиса. Класс множеств *K* называется базисом некоторой формальной теории множеств, если утверждение «все множества принадлежат классу *F*» истинно в этой теории тогда и только тогда, когда для всех $a \in K$ истинны утверждения «множество *a* принадлежит классу *F*».

Обсуждается возможность перечислять средствами формальной системы все элементы модели этой системы, используя для этого декванторизованную систему аксиом и функции Сколема (РЖМат, 1958, 59) и ε-оператор Гильберта (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, 2, 1939, Berlin, Springer). Но при этом система может уже не быть финитно аксиоматизируемой, если не ввести дальнейших новых понятий. Можно пытаться строить перечисление модели, исходя сначала только из тех аксиом, в которых содержится утверждение о существовании множеств (например, аксиома бесконечности, аксиома о сумме множеств) и после этого проверить выполнение остальных аксиом (например, принципа протяженности, axiom of extensionality). Подчеркивается отличие аксиомы выбора от обычных аксиом для ε-оператора Гильберта (см. цитированную работу).

Для избавления от парадокса Левенгейма — Сколема предлагается либо мириться с расхождением между формальными результатами и нашей интуицией, либо отказаться от понятия абсолютной, безотносительной несчетности множества. Дается исторический обзор различных доказательств теорем Левенгейма и Сколема и смежных утверждений. Из этих результатов просто выводится полнота исчисления предикатов.

В конце статьи обсуждается вопрос о том, что такое произвольное множество, произвольная функция. Автор пытается занять промежуточную позицию между последовательно конструктивным подходом и канторовой теорией трансфинитных чисел. Автор признает только эстетическую ценность этой теории и считает, что в «полезной» математике вполне достаточно понятия счетной бесконечности, поскольку несчетность в анализе и теории меры означает, как правило, только невозможность перечислить множество при помощи определенных средств. Упоминается система Σ автора (РЖМат, 1957, 1996) и дается описание понятия конструктивного порядкового числа в понимании автора. Библ. 30 назв. В. К. Детловс

9712. К аксиоматике теории множеств. (Аксиома фундирования и аксиома выбора). Шпеккер (Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom). Specker Ernst), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1957, **3**, № 3-4, 173—210 (нем.)

Результаты этой работы относятся к аксиоматической системе Бернайса для теории множеств. В этой системе различаются множества и классы, причем элементом множества или класса может быть только множество.

Работа состоит из трех частей. В первой части доказывается независимость аксиомы фундирования. (Эта аксиома утверждает, что во всяком непустом множестве M имеется элемент x, пересечение которого с M пусто; она фактически эквивалентна следующему принципу индукции: Если из того, что некоторое предложение P верно для всех элементов произвольного множества M, вытекает, что P верно для M, то P верно для любого множества).

Во второй части доказывается независимость аксиомы выбора в ослабленной системе, не содержащей аксиомы фундирования. Доказательство состоит в построении модели, не удовлетворяющей ни аксиоме фундирования, ни аксиоме выбора. Аксиома фундирования нарушается просто из-за существования множеств, совпадающих со своим единственным элементом. Помимо этих аксиом, модель показывает независимость следующих предложений: 1) Множество всех подмножеств каждого множества конечно или содержит счетную часть; 2) для мощностей $m \geqslant 5$ имеет место $m^2 < 2^m$.

Эти результаты, за исключением независимости 1) и 2), сами по себе не новы—они встречались, например, в работе Мендельсона (РЖМат, 1959, 1365). Однако представляют интерес сами модели, которые рассматривает автор. Независимость 2) является следствием независимости аксиом выбора и фундирования, поскольку в более ранней работе (РЖМат, 1958, 9701) автор вывел аксиому выбора из 2), не пользуясь аксиомой фундирования.

В третьей части исследуются некоторые гипотезы, которые можно постулировать взамен аксиомы выбора. Одна из них, гипотеза K, состоит в том, что множество всех подмножеств множества произвольной мощности m является объединением счетного числа множеств мощности m. Автор показывает, что из непротиворечивости K вытекает непротиворечивость гипотезы о существовании недостижимого кардинального числа в смысле Тарского (т. е. „экзорбитантного числа" по терминологии П. С. Александрова и некоторых других авторов). Из K следует также, что всякое множество входит в класс тех множеств, которые можно получить, отправляясь от счетных множеств, путем последовательного объединения счетных множеств ранее построенных множеств (речь идет о трансфинитной конструкции).

Рассматривается также гипотеза H, получающаяся из K при $m = \aleph_0$; из нее следует несравнимость континуума и $\aleph_1$. А. С. Есенин-Вольпин

9713. О рекурсивных моделях формализованной арифметики. Мостовский (On recursive models of formalised arithmetic. Mostowski A.) Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, 5, № 7, 705—710 (англ.)

Пусть S — непротиворечивая формальная арифметика с основными понятиями $=, 0, 1, +, \dot{-}, \varphi_4, \varphi_5, \ldots$, где φ_j является обозначением для некоторой арифметической функции, и функции 0, 1, +, $\dot{-}$ обозначаются также через φ_0, φ_1, φ_2, φ_3. Пусть дано также конкретное множество примитивно рекурсивных функций $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2(x, y) = x + y$, $f_3(x, y) = x \dot{-} y$, f_4, $f_5, \ldots$, причем все функции, появляющиеся в правых частях рекурсивных равенств, определяющих f_j $(j = 4, 5, \ldots)$, также принадлежат этому множеству, т. е. множество функций рекурсивно замкнуто. Тогда говорится, что система S адекватна для функций f_j $(j = 0, 1, \ldots)$, если в S выводимы: (I) все тождественно истинные формулы узкого исчисления предикатов с тождеством, (II) элементарные свойства неравенств (приводится точный список 9 свойств), определяемых обычным образом при помощи f_0, f_1, f_2, f_3, (III) рекурсивные равенства определения f_j после замены всюду f_i на φ_i $(i = 0, 1, \ldots)$, и (IV) если $f_i(\ldots, n, \ldots) = \prod_{h=0}^{n} f_j(\ldots, h, \ldots)$, то, в S выводима формула

$$\{\varphi_i(\ldots, n, \ldots) = 0\} \equiv (\exists \eta)\{\eta \leqslant n \,\&\, \varphi_j(\ldots, \eta, \ldots) = 0\}.$$

Счетная модель системы S называется рекурсивной относительно функциональных переменных $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, если рекурсивными являются множества

$$\underset{k,l}{E}[z_k \approx z_l), \quad \underset{k, k_1, \ldots, k_{p_i}}{E}[z_k \approx M_i(z_{k_1}, \ldots, z_{k_{p_i}})],$$

где M_i — функции, сопоставляемые переменным φ_i в модели M с множеством элементов $Z = \{z_0, z_1, \ldots\}$, $\approx$ — отношение, сопоставляемое в модели M равенству и через $\underset{x_1, \ldots, x_t}{E} P(x_1, \ldots, x_t)$ обозначается множество кортежей $(x_1, \ldots, x_t)$, удовлетворяющих предикату P. Через $M/\approx$ обозначается модель, полученная из M после замены Z через множество классов эквивалентности $[z_k] = \underset{m}{E}[z_k \approx z_m]$ с соответствующим изменением определения функций M_i. Модель M называется классической, если $z_k = k$, $M_0 = 0$, $M_1 = 1$, $M_2(x, y) = x + y$, $M_3(x, y) = x \dot{-} y$.

Теорема 1. Существует шесть таких примитивно рекурсивных функций $f_4, \ldots, f_9$, что если система S адекватна для рекурсивно замкнутого множества функций $f_0, \ldots, f_9$ и M является счетной моделью для функциональных переменных $\varphi_0, \ldots, \varphi_9$, то $M/\approx$ изоморфна с классической моделью.

Дается решение проблемы, поставленной Вотом, т. е. установлено, что если V', V'' являются множествами гёделевых номеров формул узкого исчисления предикатов с тождеством, истинных а) во всякой рекурсивно перечислимой модели и б) во всякой примитивно рекурсивной модели, то всякое множество Z, удовлетворяющее условию $V' \subset Z \subset V''$, арифметически неопределяемо.

Открытым остается вопрос о существовании модели, отличной от классической, для системы S_0 с основными понятиями 0, 1, +, ×, = и всеми истинными арифметическими утверждениями в качестве аксиом. Если бы предикаты $y = f_i(x_1, \ldots, x_{p_i})$ для функции $f_0, \ldots, f_9$ из доказательства теоремы 1 оказались диофантовыми (РЖМат, 1954, 1532), то ответ на этот вопрос был бы отрицательным. В. К. Детловс

9714. Заметка о прямых произведениях. Новак-Гал (A note on direct products. Novak Gál L.), J. Symbolic Logic, 1958, 23, № 1, 1—6 (англ.)

Строится такая последовательность реляционных систем $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ (РЖМат, 1956, 3597), что каждая из них разрешима, а их прямое произведение $\mathfrak{P}_{i=1}^{i=\infty} \Gamma_i$ неразрешимо (РЖМат, 1956, 3599). При этом используется не рекурсивный предикат $(\exists y) R(x, y)$ с рекурсивным R.

Далее строится последовательность строго разрешимых реляционных систем, прямое произведение которых разрешимо, но не строго разрешимо. Обсуждается понятие явно заданной реляционной системы (РЖМат, 1959, 77).

Имеются опечатки: в определении (29) надо квантор заменить на двойственный, в высказывании (2. 10) надо знак дизъюнкции заменить на двойственный и на стр. 3, 11-я строка сверху надо D_∞ заменить на ∞.

Ю. А. Шиханович

9715. Теория моделей с бесконечно-местными операциями и отношениями. Сломинский (Theory of models with infinitary operations and relations. Słomiński J.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 7, 449—456, XXXVI—XXXVII (англ.; рез. русск.)

Моделями автор называет реляционные системы (РЖМат, 1956, 3597) вида $<A, f_0, f_1, \ldots, f_\zeta, \ldots; R_0, R_1, \ldots, R_\xi, \ldots> (\zeta<\alpha, \xi<\beta)$, где f_ζ — операция, R_ξ — отношение; алгебрами—реляционные системы вида

$$<A, f_0, f_1, \ldots, f_\zeta, \ldots> (\zeta < \alpha).$$

В первой части работы (§§ 2, 3) изучаются алгебры с бесконечно-местными операциями, указывается вид подалгебры, порожденной данным подмножеством, определяется абсолютно свободная алгебра с заданным множеством свободных образующих. Формулируются обычные (для свободных алгебр с конечно-местными операциями) теоремы.

Во второй части работы (§§ 4 — 6) изучаются модели с бесконечно-местными операциями и отношениями. При помощи понятия абсолютно свободной алгебры для произвольного класса всех подобных между собой моделей (и для произвольных порядковых чисел η, τ) строится некоторая алгебра $P_{\eta,\tau}$, называемая логикой. Понятие логики является аналогом понятия формальной теории, соответствующей классу моделей (РЖМат, 1956, 3697). Логика (в смысле автора) содержит импликацию, отрицание, бесконечно-местные и конечно-местные конъюнкции и дизъюнкцию, но не имеет кванторов.

Изучается подалгебра O логики $P_{\eta,\tau}$, состоящая из формул, содержащих лишь импликации и отрицания. В подалгебре O строятся аналоги дедуктивных исчислений. Доказывается аналог теоремы Гёделя о полноте (всякая совместная O-система имеет модель). Приводится пример совместной O-системы с равенством, не имеющей модели с равенством. Формулируются необходимые и достаточные условия для того, чтобы O-система с равенством имела модель с равенством.

В § 6 дается характеристика классов моделей, определяемых в логике $P_{\eta,\tau}$. Ю. А. Шиханович

9716. Представление алгебр отношений. II. Линдон (The representation of relation algebras. II. Lyndon Roger C.), Ann. Math., 1956, **63**, № 3, 294—307 (англ.)

Абстрактная алгебра отношений называется представимой, если она изоморфна собственной алгебре отношений (определения см. РЖМат, 1959, 6564).

Строится бесконечная система $\mathfrak{E}$ эквациональных аксиом (equational axioms) и доказывается следующий основной результат: абстрактная алгебра отношений тогда и только тогда представима, когда она удовлетворяет системе аксиом $\mathfrak{E}$ (теорема 5. 6). Тем самым дается конструктивное доказательство теоремы 2.4 Тарского (РЖМат, 1956, 3597).

Новым рабочим инструментом автора является понятие полярного предиката в булевой алгебре с операторами. Именно, пусть $\varphi(x, u, v, \ldots)$ — некоторый предикат в такой алгебре, который мы запишем, игнорируя другие свободные переменные, как $\varphi(x)$; тогда поляры предиката $\varphi(x)$ определяются как

$$(\Delta^m x \mid y)\varphi. \quad (y_1, \ldots, y_m)\,[y \subset y_1 \cup \ldots \cup y_m \rightarrow \varphi(y_1) \vee \ldots \vee \varphi(y_m)], \quad 1 \leqslant m < \omega,$$

$(\Delta^\omega x \mid y)\varphi. = \wedge_{1<m<\omega} (\Delta^m x \mid y)\varphi$ — бесконечная конъюнкция. Если $\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi^\omega(x)$, то свойство φ называется разделительным (divisible) по переменной x.

Сама аксиоматика и доказательства довольно сложны (особенно доказательство достаточности).

В конце статьи, в специальном добавлении, автор останавливается на неточностях и ошибках (указаны Скоттом и Тарским) своей первой статьи (Ann. Math., 1950, **51**, № 3, 707 — 729). Приводится пример Тарского (полной атомной булевой алгебры множеств, в которой не всякий элемент некоторого множества принадлежит атому), вскрывающий ошибочность рассуждений автора. В связи с этим теорема 1 доказана не для полных, а лишь для конечных алгебр отношений. Теорема 4 оказывается неверной. Вводится понятие строгой представимости: алгебра отношений называется строго представимой, если она изоморфна собственной алгебре отношений, в которой наибольшее отношение есть теоретико-множественное объединение атомов. Вместо теоремы 4 формулируется результат: класс строго представимых атомных алгебр отношений невозможно определить универсальными аксиомами. Д. А. Захаров

9717. Комбинаторная логика и теория связей Уайтхеда. Фитч (Combinatory logic and Whitehead's theory of prehensions. Fitch Frederic B.), Philos. Sci., 1957, **24**, № 4, 331—335 (англ.)

Доклад, прочитанный на заседании Восточного отделения Американской философской ассоциации. Излагается некоторая абстрактная концепция, оперирующая весьма общим понятием связи (prehension) по Уайтхеду, и еще более общим понятием модуса совместности (modes of togetherness) по автору. Эти понятия включают в себя отношения между функцией и аргументом, частью и целым (у автора—ingression), сущностью и проявлением. Автор отмечает возможность постулативного изложения своей концепции и многочисленные точки соприкосновения ее с методами так называемой комбинаторной логики (см., например, Shönfinkel M., Math. Ann., 1924, **92**, 305—316). Ю. А. Гастев

9718. Аналитическая истина и «неявные определения». Пап (Analytic truth and «implicit definitions». Pap Arthur), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam-Louvain, 1953, 151—155 (англ.)

Автор отмечает, что распространенная характеристика традиционного понятия аналитической истины как «истины, удостоверяемой при помощи определений» не более ясна и определенна, чем значение самого термина «определение». Попытки заменить неявные определения явными для четкого различения синтетических (априорных) и аналитических истин приводят к своего рода порочному кругу. Рассматривая возникающие в таких случаях ситуации и карнаповскую концепцию «логической истины», автор приходит к выводу, что при явных определениях (так же, как и при неявных) мы заранее выделяем нужные нам для получения ожидаемых результатов свойства. Таким образом, в случае простых описательных предикатов, «истинных по самому своему смыслу», различие между аналитическими и синтетическими истинами оказывается весьма условным. Ю. А. Гастев

9719. О методологии исследований по основаниям математики. Гонзет (Sur la méthodologie des recherches sur les fondements des mathématiques. Gonseth F.), Raisonnement en math. et en sci. exptl. Paris, CNRS, 1958, 97—107 (франц.)

Методологический очерк развития мысли в основаниях математики. Утверждается, в частности, что отправная точка исследований заранее не дана и не должна быть математической. Научные исследования не имеют характера чисто дедуктивного или чисто индуктивного, или смешанного. Описываются четыре фазы, через которые приблизительно проходят научные исследования и эта мысль развивается в применениях к основаниям математики. А. С. Есенин-Вольпин

9720. «Cogito ergo sum»— рассуждение или интуиция? **Бет** («Cogito ergo sum»—raisonnement ou intuition? Beth E. W.), Dialectica, 1958, **12**, № 3—4, 223—235 (франц.; рез. нем., англ.)

Рассматривается вопрос о том, к логике или интуиции относится известное положение Декарта: «я мыслю, следовательно, я существую»?

С одной стороны, это положение может быть получено путем силлогизма: «всякий, кто мыслит, существует. Декарт мыслит. Следовательно, Декарт существует». С другой стороны, оно может быть признано достоверным и без этого силлогизма — и именно на этом настаивал Декарт.

Автор различает два случая убедительности рассуждений: 1) когда рассуждение не допускает противоречащего примера, имеющего ту же логическую форму, и 2) когда рассуждение опирается на конкретную интуицию, относящуюся только к рассматриваемому случаю.

В первом случае рассуждение, по мнению автора, может быть возведено в логический закон. (Это заключение, по-видимому, основано на некритическом применении закона исключенного третьего — *Реф.*).

Второй случай имеет место, например, при обосновании принципа индукции. Он же имеет место в генценовском доказательстве непротиворечивости формальной арифметики (при использовании трансфинитной индукции до ε_0). Он же имеет место в онтологическом доказательстве существования бога (поскольку в этом случае речь идет о заключении единичного характера, не претендующем на логическую общезначимость своего метода).

Эту конкретную интуицию автор рассматривает с исторической стороны. Мнение, что она основана на врожденных идеях, он считает поколебленным развитием науки. В процессе развития науки возникают доводы новой природы, которые по началу изолированы и единичны; в этой стадии они являются доводами конкретной интуиции. В дальнейшем они могут найти себе место в общей системе знания и стать логическими.

Так произошло с геометрической интуицией. В некоторых случаях доводы конкретной интуиции в дальнейшем отвергаются, как произошло с онтологическим доказательством существования бога, которое теперь «полностью покинуто».

Автор допускает неточность, относя к доводам конкретной интуиции доказательство того, что число 30 допускает единственное разложение на множители (с точностью до их порядка) на том основании, что в этом случае достаточно рассмотреть конечное число (шесть) различных разложений 30, отличающихся лишь порядком.

А. С. Есенин-Вольпин

9721. Об одном до сих пор еще не использовавшемся расширении конечной установки. Гёдель (Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Gödel Kurt), Dialectica, 1958, **12**, №3-4, 280—287 (нем.; рез. англ.)

Как неоднократно указывал Бернайс, для того чтобы доказать непротиворечивость классической арифметики, необходимо расширить гильбертову конечную установку таким образом, чтобы наряду с комбинаторными понятиями, относящимися к символам, были допущены некоторые абстрактные понятия. Абстрактные понятия, применявшиеся до сих пор для этой цели—это понятия конструктивной теории порядковых чисел и интуиционистской логики.

Показывается, что вместо этого можно использовать понятие вычислимой функции конечного простого типа, причем для построения такой функции необходимы только простая рекурсия по числовой переменной и суперпозиция (с тривиальными функциями в качестве исходных).

Резюме автора

9722. Общая схема понятия независимости в математике. Марчевский (A general scheme of the notions of independence in mathematics. Marczewski E.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 12, 731—736 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается алгебра (A, F), состоящая из некоторого множества A и множества F основных операций определенных в A. Через $A^{(n)}$ обозначается множество алгебраических операций, зависящих от n переменных, т. е. функций n переменных, являющихся суперпозициями основных операций.

Множество N, содержащееся в A, является множеством независимых элементов, если для произвольной системы различных элементов $a_1,\ldots,a_n \in N$ и любой пары $g, h \in A^{(n)}$ из равенства $g(a_1,\ldots,a_n) = h(a_1,\ldots,a_n)$ следует, что g и h тождественны в A.

Как частные случаи этого понятия получаются классические понятия: арифметическая независимость чисел, алгебраическая независимость чисел, линейная независимость векторов, независимость в смысле теории множеств, логическая независимость и алгебраическая независимость полиномов. Понятие независимости в теории вероятностей другого характера и не содержится в рассматриваемой схеме.

Резюме автора

9723. О машинах, доказывающих теоремы. Бет (On machines which prove theorems. Beth E. W.), Simon Stevin, 1958, **32**, № 2, 49—60 (англ.)

Обсуждается вопрос о возможных путях использования автоматических вычислительных машин для доказательства теорем. Автор подчеркивает, что для «логической машины» очень важен удобный выбор обозначений, и указывает на преимущества, которыми обладает в этом отношении метод семантических таблиц. (Метод семантических таблиц введен автором для распознавания тождественной истинности формулы (РЖМат, 1959, 8747). В отличие от обычной таблицы истинности семантическая таблица строится не «от частей к целому», а «от целого к частям»). Этот метод, первоначально созданный для исчисления высказываний, может применяться и в более сложных областях логики, в частности, в узком исчислении предикатов. На основе метода семантических таблиц можно строить особого рода формальные системы, тесно связанные с системами генценовского типа.

Автор указывает три типа задач, с которыми может иметь дело «логическая машина»: (I) Проверить данное доказательство; (II) Доказать данную теорему, исходя из данных посылок; (III) Открывать теоремы, выводимые из данных посылок. По мнению автора, в настоящее время наиболее многообещающим является изучение случая (I).

Имеются ссылки на более ранние работы, посвященные машинному доказательству теорем.

А. В. Гладкий

9724. Выражение экспериментальной подтверждаемости в формализованных рассуждениях. Фейс (Expression de la vérifiabilité expérimentale dans le raisonnement formalisé. Feys Robert), Raisonnement en math. et en sci. exptl. Paris, CNRS, 1958, 109—114. Discuss., 114—115 (франц.)

Рассматривается вопрос о возможности формализовать понятие экспериментальной подтверждаемости предложения с помощью различных формальных систем, а именно, модальной системы *S4* (Lewis C. I., Langford C. H., Symbolic Logic, N.-Y, London, 1932), интуиционистской логики, минимальной логики Иоганссона (см., например, Клини, Введение в метаматематику, М., 1957, стр. 94), а также систем в определенном смысле двойственных интуиционистской и минимальной логикам. Например, в системе *S4* предлагается интерпретировать модальную операцию L_p (p необходимо) как „p экспериментально подтверждено"; тогда операция

Mp (p возможно) интерпретируется как „p не опровергнуто экспериментально". При переходе к интуиционистской логике используется интерпретация этой последней в системе $S4$, предложенная Гёделем; в этой интерпретации $\neg p$ переходит в $\overline{Lp}$, $p \wedge q$ в $Lp \& Lg$, (где $\neg, \&$ означают соответственно отрицание и конъюнкцию в классическом смысле); аналогично интерпретируются остальные операции.

В дискуссии высказаны различные точки зрения по вопросу о применимости модальных систем в экспериментальных науках. В частности, Детуш отметил, что модальности используются в рассуждениях, относящихся к квантовой физике. Тарский высказал мнение, что в настоящее время возможности приложений модальных систем ограничены, поскольку эти системы распространяются только на исчисление высказываний, и что приложения возможны скорее к методологии экспериментальных наук, чем к самим экспериментальным наукам. А. В. Гладкий

9725 К. Фундаментальное исследование математики. **Нитто** (The fundamental study of mathematics. Nitto Sotato, Tokyo, Maruzen Co., Ltd. 1956, 83 pp.) (англ.)

Брошюра посвящена критике некоторых понятий современной математики. Считая их неудовлетворительными с философской и логической точки зрения, автор предлагает взамен свою систему — так называемый объективный анализ. Критике подвергаются следующие вопросы: теория пределов, теорема о существовании взаимно однозначного соответствия между множеством всех натуральных чисел и множеством чётных чисел, теорема о несчетности множества вещественных чисел, теорема Римана об условно сходящихся рядах. Теорию пределов автор считает не имеющей объективного смысла и потому непригодной для обоснования дифференцирования. Путем „трансцендентного исследования в согласии с концепциями" он, в частности, приходит к заключению о дифференцируемости всякой непрерывной функции. Столь же радикально переделываются основы теории множеств и теория условно сходящихся рядов. Выводы автора брошюры обусловлены непониманием математических фактов и не могут быть признаны научно-состоятельными.

Ю. Т. Медведев

9726 К. Логические исследования. Сб. статей. [Ин-т филос. АН СССР]. М., АН СССР, 1959, 466 стр., илл., 18 р. 50 к.

См. также: 10523

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

9727. Многочлены с малым $G(f)$. Нечаев В. И., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1958, **71**, 291—300

Пусть $\psi(x)$ — многочлен с целыми значениями, p — простое число, β — такое наименьшее целое число $\geqslant 0$, что существует целое b_0, при котором для любых целых m и $s \geqslant 1$ разрешимо сравнение $\psi(x) \equiv b_0 + mp^\beta \pmod{p^s}$ с целым x.

Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $d(d')$—наибольший общий делитель значений $f(x)$ (соответственно $f'(x)$) при целых x; $r = G(f)$ — наименьшее натуральное число, для которого всякое достаточно большое натуральное число N представимо в форме $N = \sum_{i=1}^{r} f(x_i)/d$; $g(f; p^\beta)$ — наименьшее r, для которого при любом целом N разрешимо сравнение $N \equiv \sum_{i=1}^{r} d^{-1} f(x_i) \pmod{p^\beta}$; $r_0 = \max_{p \mid d'} g(f; p^\beta)$.

Автором были получены оценки для r_0 в случае, когда $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, с помощью которых оценивается $G(f)$.

Рассматривается проблема Варинга для многочленов вида $f_1(x) = \varphi_n(x)/n! + \sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]} b_i \varphi_i(x)/i!$, где $\varphi_i(x) = (x + a_i + 1)(x + a_i + 2)\ldots(x + a_i + i)$, a_i и b_i — целые числа, n — натуральное число $\geqslant 2$, а также для многочленов вида $\varphi_2(x) = (\varphi_n(x)/n!)^2$, причем для r_0 получены оценки: 1) $r_0(f_1) < 2n$; 2) если $n \neq p - 1$, то $r_0(f_2) < 4n$; 3) если $n = p - 1$, то $n^2 + 2n \leqslant r_0(f_2) \leqslant n^2 + 2n + 2$. Н. В. Гордеев

9728. Замечание к работе Давенпорта и Хейльброна. Бабаев Г., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 6, 63—64

Пусть p — некоторое простое число; x, k — натуральные числа, причем $k \geqslant 2$. Давенпорт и Хейльброн доказали, что плотность множества M натуральных чисел, не представимых в виде $p + x^k$, равна нулю.

В заметке элементарно доказывается бесконечность множества M. Н. В. Гордеев

9729. О методе решета и некоторых его приложениях. Ван Юань (Wang Yuan), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, 8, № 3, 413—429 (кит.; рез. англ.) Scientia sinica, 1959, 8, № 4, 357—381 (англ.)

Дается подробное доказательство ранее опубликованных теорем.

Теорема 1. Каждое достаточно большое четное число может быть представлено в виде суммы двух чисел > 1, одно из которых имеет не более 2 простых множителей, другое—не более 3.

Теорема 2. Для каждого данного четного числа k существует бесконечно много чисел n таких, что n и $n + k$ имеют не больше 3 простых множителей и $n(n + k)$ является произведением не более 5 простых множителей.

Теорема 3. Каждое достаточно большое нечетное число может быть представлено как $2N + 1 = 2P + Q$, где число простых делителей P и Q не больше трех и PQ является произведением не более 5 простых множителей.

В доказательстве используются методы Бруна, Бухштаба и А. Сельберга. А. И. Виноградов

9730. О равномерном распределении системы функций, являющейся решением системы линейных конечноразностных уравнений первого порядка. Полосуев А. М., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 3, 405—406

Формулируются две теоремы, полученные методом работы А. Г. Постникова (РЖМат, 1958, 9509). Приведем одну из них. Пусть система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ является решением системы s уравнений:

$$\Phi_1(x + 1) = a_{11}\Phi_1(x) + \ldots + a_{s1}\Phi_s(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Phi_s(x + 1) = a_{1s}\Phi_2(x) + \ldots + a_{ss}\Phi_s(x)$$

с целыми коэффициентами при условии, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{s1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1s} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

отличен от нуля.

$N_p(v)$ — число точек $M(\{\varphi_1(x)\},\ldots,\{\varphi_s(x)\})$, попавших при $x=1, 2, \ldots, p$, в область v единичного гиперкуба

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, \quad 0 \leqslant x_s \leqslant 1, \tag{3}$$

объем которой $|v|$.

Теорема 1. Система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$, являющаяся решением системы (1), равномерно распределена в s-мерном пространстве, если ни один из корней характеристического многочлена матрицы (2) по модулю не равен единице и если для любого гиперкуба объема $|v|$ со сторонами, параллельными координатным осям, целиком лежащего внутри единичного гиперкуба (3), выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{N_p(v)}{p} < c|v|,$$

где c — некоторая постоянная. А. Ф. Лаврик

9731. Видоизменение доказательства Ландау теоремы о простых числах. Эррера (Une modification de la démonstration de Landau du théorème des nombres premiers. Errera A.), Mathesis, 1958, **67**, № 9-10, 321—337 (франц.)

Подробно излагается история вопроса (до 1955 г.) о доказательствах теоремы, выражающей асимптотический закон простых чисел. Доказательство теоремы с некоторыми изменениями проводится по методу Ландау — Икеара, именно, доказывается: $\psi(x) \sim x$, где $\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p^m \leqslant x} \log p$ — функция Чебышева. Доказательство сопровождается подробными объяснениями. В § 3 из формулы $\psi(x) \sim x$ выводится обычная формула $\pi(x) \sim x/\log x$. В. А. Голубев

9732. Опровержение предположения Пойа. Хазелгров (A disproof of a conjecture of Pólya. Haselgrove C. B.), Mathematika, 1958, **5**, № 10, 141—145 (англ.)

Пусть $L(x) = \sum_{n<x} \lambda(n)$, где $\lambda(n)$ — функция Лиувилля. Пойа предположил: (A) $L(x) \leqslant 0$ для всех $x \geqslant 2$. Отсюда следует (B) верность гипотезы Римана и простота комплексных нулей для $\zeta(s)$ — функции Римана. Принимая (B) (в противном случае (A) уже неверно), положим

$$A(u) = e^{-u/2} L(e^u) \tag{1}$$

и $A_T^*(u) = a_0 + 2R \sum_{0<\gamma_n<T} (1-\gamma_n/T)\, a_n e^{i\gamma_n u}$,

где $n = 1, 2, \ldots$, $T > 0$, $a_0 = 1/\zeta(1/2)$, $\rho_n = 1/2 + i\gamma_n$ — комплексные нули $\zeta(s)$, и $a_n = \zeta(2\rho_n)/\rho_n \zeta'(\rho_n)$. Справедливо неравенство

$$A_T^*(u) \leqslant \overline{\lim_{u\to\infty}} A(u). \tag{2}$$

С помощью быстродействующих вычислительных машин ЭДСАК-1 и МАРК-1 найдены значения T и u, для которых

$$A_T^*(u) > 0. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) следует, что $L(e^u) > 0$ для произвольно больших значений u, т. е. что предположение Пойа ошибочно.

Аналогичным методом опровергается предположение Турана $\sum_{n<x} \lambda(n)/n \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 1$.

Б. М. Бредихин

9733. О системе мультипликаторов функции Римана—Дедекинда η. Линт (On the multipliersystem of Riemann—Dedekind function. Lint J. H. van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 5, 522—527; Indagationes math., 1958, **20**, № 5, 522—527 (англ.)

$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n\tau})$ при $\operatorname{Im}\tau > 0$ — модулярная форма типа $\{\Gamma(1), -1/2, v\}$, где v — система мультипликаторов. Радемахер определил систему мультипликаторов с помощью сумм Дедекинда. Петерсон (РЖМат, 1956, 8544) нашел простые формулы для v. Автор доказывает формулы Петерсона, не опираясь на суммы Дедекинда. Для этого изучаются характеры группы $\Gamma(1)$ и используется результат Гекке относительно системы мультипликаторов функции $\eta(p\tau)/\eta^p(\tau)$ (Hecke E., Math. Ann., 1943, **119**, ...).

Б. В. Левин

9734. О некотором семействе арифметических функций. Мак-Карти (On a certain family of arithmetic functions. McCarthy Paul J.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 8, Part 1, 586—590 (англ.)

Пусть n, $r > 0$ — целые числа, $T_r(n)$ — число таких чисел $k \leqslant n$, что наибольший общий делитель (k, n) не делится на r-ю степень простого числа (r-свободно). Очевидно, при $r = 1$ $T_1(n)$ совпадает с числовой функцией Эйлера $\varphi(n)$.

Изучаются арифметические и асимптотические свойства числовой функции $T_r(n)$:

1. Числовое значение $T_r(n)$ содержится в арифметической прогрессии, элементы которой r-свободны.

2. $T_r(n)$ — мультипликативная числовая функция. Для всех n

$$T_r(n) = n \sum_{d^r \mid n} \frac{\mu(d)}{d^r}.$$

3. Пусть

$$T_r^*(n) = \sum_{m=1}^{n} T_r(m), \quad r > 1.$$

Тогда

$$T_r^*(n) = \frac{n^2}{2\zeta(2r)} + O(n),$$

где $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана.

4. Вероятность того, что наибольший общий делитель двух целых чисел r-свободен, равна $1/\zeta(2r)$.

Метод доказательства этих свойств обычный. Асимптотическая формула для $T_r^*(n)$ ранее была известна только для случаев $r = 1, 2$ (РЖМат, 1957, 2015).

Б. М. Уразбаев

9735. Дальнейшие тождества и сравнения для коэффициентов модулярных форм. Ньюман (Further identities and congruences for the coefficients of modular forms. Newman Morris), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 577—586 (англ.)

Пусть n — целое неотрицательное число, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} p_r(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^r$, в противном случае $p_r(n) = 0$. В работе доказываются три тождества и два сравнения для $p_r(n)$. Часть результатов автора была получена ранее Линтом (Lint J. H., Hecke Operators and Eiler Products, Dissert., 1957, University of Utrecht). Типичная для работы теорема 1: Для всех целых n

$$p_r(np^2 + r\nu) - \gamma_n p_r(n) + p^{r-2} p_r\left(\frac{n - p\nu}{p^2}\right) = 0,$$

где $\gamma_n = p_r(r\nu) + \left(\frac{r\nu}{p}\right) p^{(r-3)/2} a_4 - \left(\frac{r\nu - n}{p}\right) p^{(r-3)/2} a,$

p — простое, $\left(\frac{x}{p}\right)$ — символ Лежандра, $a = \alpha_p \exp \times$

$$\times \left(-i\pi r \frac{p-1}{4}\right),$$

$$\alpha_p = \begin{cases} 1, & p \equiv 1 \pmod 4 \\ i, & p \equiv 3 \pmod 4, \end{cases} \quad \nu = \frac{p^2-1}{24}.$$

В конце работы приведены таблицы $p_r(r\nu)$ для нечетных $5 \leqslant r \leqslant 23$ и $3 \leqslant p \leqslant 23$. Б. В. Левин

9736. Решение некоторых диофантовых неравенств. Давенпорт, Рот (The solubility of certain diophantine inequalities. Davenport H., Roth K. F.), Mathematika, 1955, 2, 81—96 (англ.)

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — действительные числа, не все одинакового знака (скажем, $\lambda_1\lambda_2 < 0$) и не все множители отдельного иррационального числа рациональны. Пусть χ — произвольное действительное число и ε положительно. Используя результат Давенпорта и Хейльбронна (Davenport, Heilbronn, J. London Math. Soc. 1946, **21**, 185—193), показано, что существует абсолютная константа C такая, что если $k \geqslant 12$ и $s > Ck\log k$ или если $k = 3$ и $s = 8$, то неравенство

$$|\lambda_1 x_1^k + \ldots + \lambda_s x_s^k + \chi| < \varepsilon$$

имеет бесконечно много решений в положительных целых $x_1, \ldots, x_s$. W. J. LeVeque

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 8, 829.

9737. Некоторые диофантовы неравенства. Морделл (Some diophantine inequalities. Mordell L. J.), Mathematika, 1955, 2, 145—149 (англ.)

Доказана очень общая теорема, из которой вытекает более или менее типичное следствие: Пусть $f(x) = |x_1 \ldots x_n| g(x)$, где

$$g(x) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_r x_s + \sum_{r=1}^{n} a_r x_r + a_0.$$

Предположим, что $g(x) > 0$ для всех точек x, координаты которых численно меньше 1, и что $a_{rr} \geqslant 0$ для $r = 1, \ldots, n$. Тогда существует точка x, конгруэнтная любой заранее указанной точке (mod 1), такая, что

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{r=1}^{n} a_{rv} + \frac{1}{2^n} a_0.$$

Последняя теорема обобщает результат Берча и Суиннертона-Дайера (РЖМат, 1957, 2877).

W. L. LeVeque

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 8, 816.

9738. Моменты числа точек решетки в ограниченном множестве. Роджерс (The moments of the number of points of a lattice in a bounded set. Rogers C. A.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1955, **A 248**, № 945, 225—251 (англ.)

Пусть S — ограниченное n-мерное измеримое по Жордану множество; $\rho(\Lambda)$ — число целых точек решетки Λ, принадлежащих S; k — натуральное число, удовлетворяющее условию

$$\max_{m=1,\ldots,k} [m^2(k-m)+1] < n.$$

Дается формула для среднего значения $\{\rho(\Lambda)\}^k$, понимаемого как предела, если он существует,

$$\lim_{\omega \to +0} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \{\rho(\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \omega))\}^k d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1},$$

причем $\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \omega)$ — решетка, порожденная векторами $(\omega, 0, \ldots, 0, \alpha_1\omega^{-n+1})$, $(0, \omega, \ldots, 0, \alpha_2\omega^{-n+1})$, $\ldots$ $\ldots$, $(0, 0, \ldots, \omega, \alpha_{n-1}\omega^{-n+1})$, $(0, 0, \ldots, 0, \omega^{-n+1})$. Формула весьма сложна, она содержит объемы некоторых множеств размерности $n, 2n, \ldots, kn$, связанных с S.

В качестве применения доказанной формулы приводится следующее уточнение теоремы Минковского-Главка (Hlawka E., Math. Z., 1943, **49**, 285) при $n \geqslant 6$. Если n-мерное симметричное множество S не содержит начала координат и имеет объем по Жордану $< 2 + \frac{2}{3}[4 + 633(1/2)^n]^{-1}$, то существует n-мерная решетка с определителем 1, не имеющая точек в S. В замечании при корректуре отмечается, что Шмидт (РЖМат, 1959, 3479) другим методом получил несколько лучший результат. И. П. Кубилюс

9739. О теореме Чеботарева. Вудс (On a theorem of Tschebotareff. Woods A. C.), Duke Math. J., 1958, 25, № 4, 631—637 (англ.)

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — линейные формы переменных u_1 $u_2, \ldots, u_n$ с действительными коэффициентами a_{ij} такими, что определитель, составленный из коэффициентов a_{ij}, по модулю равен единице. Для данного множества фиксированных действительных чисел $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_n$ полагаем

$$M = \inf \prod_{i=1}^{n} |L_i + c_i|$$

(произведение берется по всем целым рациональным значениям переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$).

Гипотеза Минковского утверждает, что $M \leqslant 2^{-n}$. Для случаев $n = 2, 3, 4$ это было доказано; в общем же случае вопрос остается нерешенным.

Н. Чеботарев (Уч. зап. Казанск. ун-та, 1934, **94**, 7) доказал, что $M < 2^{-n/2}$. Результаты Морделла и Давенпорта: $M < (2^{n/2} + (2 - 2^{1/s})^n)^{-1}$ и $M < (\gamma_n 2^{n/2})^{-1}$, где $\gamma_n > 1$ и $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 2e - 1$. Доказывается, что $M \leqslant 2^{-n/2}(2 - (2 - \sqrt{2})^n)^{-1}$. Е. П. Ожигова

9740. Неопределенные квадратичные формы от многих переменных. II. Давенпорт (Indefinite quadratic forms in many variables. II. Davenport H.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 29, 109—126 (англ.)

Доказана теорема, уточняющая результат предыдущей статьи (РЖМат, 1957, 5327): Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$ — вещественная квадратичная форма, представимая суммой r положительных и $n - r$ отрицательных квадратов вещественных линейных форм. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|Q(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

разрешимо в целых числах $x_1, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю, если а) $r \geqslant 16$ и $n - r \geqslant 16$ или если б) $13 \leqslant r \leqslant 15$ и $n > (9r - 20)/(r - 16)$.

В процессе доказательства, между прочим, с помощью теории последовательных минимумов выпуклого тела оцениваются экспоненциальные суммы

$$S(\alpha) = \sum_{x_1=P_1}^{2P_1} \ldots \sum_{x_n=P_n}^{2P_n} e^{2\pi i \alpha Q(x_1 \ldots x_n)},$$

где $\alpha > 0$ — вещественное число, а $Q(x_1, \ldots, x_n)$ — вещественная квадратичная форма. А. В. Малышев

9741. Об одном классе квадратичных полиномов от n переменных. Фостер (On a class of quadratic polynomials in n variables. Foster D. M. E.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 36, 241—256 (англ.)

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_n$ — однородные линейные формы от n переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$ с действительными коэффициентами и с определителем $\Delta \neq 0$, и пусть c — любое действительное число.

Обозначим

$$\rho = \rho(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \pm L_1^2 \pm L_2^2 \pm \ldots \pm L_{n-1}^2 + L_n + c, \quad (1)$$

$$q = q(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \pm L_1^2 \pm \ldots \pm L_{n-1}^2, \quad (2)$$

где q — сингулярная квадратичная форма ранга $n-1$, $s = 2r + 1 - n$, обозначает число положительных знаков в (2).

Если ρ и ρ' — два таких полинома, говорят, что они эквивалентны, если они могут быть преобразованы один в другой при помощи целой неоднородной унимодулярной подстановки от переменных.

Теорема 1. Если коэффициенты $\rho - c$ не все являются рациональными дробями, то ρ может принимать сколь угодно малые значения для целых $u_1, \ldots, u_n$.

Теорема 2. Если коэффициенты $\rho - c$ — рациональные дроби, то найдутся целые числа $u_1, u_2 \ldots, u_n$, удовлетворяющие неравенству

$$|\rho| < (|\Delta|/2)^{2|(n+1)},$$

за исключением, может быть, случая, когда $|s| = n-1$ и $n \geqslant 10$. Е. П. Ожигова

9742. Кубические формы от тридцати двух переменных. Давенпорт (Cubic forms in thirty-two variables. Davenport H., Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1959, **A251**, № 993, pp. 193—232 (англ.)

Классическая теорема Мейера (Meyer A., Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 1884, **29**, 202—222) о том, что неопределенные квадратичные формы от пяти и более переменных с целыми коэффициентами представляют нуль нетривиально, является источником теорем о представимости нуля формами высших степеней. Использование методов, применявшихся при решении проблемы Варинга, позволило доказать возможность представления нуля формами типа $c_1 x_1^k + \ldots + c_n x_n^k$ с целыми коэффициентами $c_1, \ldots, c_n$ при $k \geqslant 3$. Недавно Льюис (РЖМат, 1958, 8553), основываясь на теореме Брауэра (Brauer R., Bull Amer. Math. Soc., 1945, **51**, 749—755), доказал существование числа N такого, что всякая кубическая форма от n переменных с целыми коэффициентами представляет нуль, если $n \geqslant N$. Независимо от него Берч (РЖМат, 1958, 8551) пришел к тому же результату и распространил его на все формы нечетной степени, указав на зависимость числа N от степени формы. В реферируемой работе устанавливается, что в случае кубической формы $N = 32$. Именно, доказывается следующая теорема.

Пусть $C(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_i x_j x_k$ — какая-нибудь кубическая форма от n переменных с целыми коэффициентами. Тогда, если $n \geqslant 32$, то уравнение $C(x_1, \ldots, x_n) = 0$ разрешимо в целых $x_1, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю

Доказательство основывается на методе Харди-Литлвуда и осуществляется путем постепенного перехода от проблемы представимости нуля общей кубической формой $C(x_1, \ldots, x_n)$ к соответствующей проблеме для формы типа $d_1 y_1^3 + \ldots + d_8 y_8^3$ с целыми, отличными от нуля коэффициентами $d_1, \ldots, d_8$. Разрешимость уравнения $d_1 y_1^3 + \ldots + d_8 y_8^3 = 0$ в целых $y_1, \ldots, y_8$, не равных одновременно нулю, автор доказывает, используя результаты предыдущей работы, посвященной проблеме Варинга (Davenport H., Acta math., 1939, **71**, 123—143). В настоящей работе широкое применение находят экспоненциальные суммы, содержащие общую кубическую форму от n переменных. Метод, которым пользуется автор для оценки таких сумм, является развитием указанного им ранее метода (РЖМат, 1957, 5327; 1958, 9740) в связи с экспоненциальными суммами, содержащими общую квадратичную форму. Из большого количества лемм, на которые опирается доказательство теоремы, некоторые представляют самостоятельный интерес. Таковы, например, первые две леммы, имеющие место для формы любой степени от многих переменных с целыми коэффициентами. Они устанавливают существование арифметического инварианта формы в виде наибольшего общего делителя h всех определителей наивысшего порядка, порождаемых двумерной матрицей, которая составляется из строк любого направления симметрической пространственной матрицы, ассоциированной с рассматриваемой формой (предполагается, что $h = 0$, если все упомянутые выше определители равны нулю). Для невырожденной формы, т. е. неэквивалентной форме с меньшим числом переменных, этот инвариант не равен нулю.

Автор отмечает большие трудности, которые возникают при попытке решения вопроса о представимости нуля формой четной степени $2r$ ($r > 1$). Библ. 17 назв. Н. П. Соколов

9743. Заметка о числе классов квадратичных полей. Карлиц (Note on the class number of quadratic fields. Carlitz L.), Duke Math J., 1955, 22, № 4, 589—593 (англ.)

Анкени, Артин и Човла (Ankeni N. C., Artin E. Chowla S., Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 1951, **37**, 524—525) в случае вещественного квадратичного поля с фундаментальным дискриминантом $d = mp$ ($m \geqslant 1$ — целое, p — простое) и основной единицей $(t + u\sqrt{d})/2$ доказали для числа классов $h(d)$ при $p > m$ сравнение

$$-2h(d)\frac{u}{t} \equiv C_{(p-3)/2} \pmod{p}, \quad (1)$$

где

$$\frac{1}{e^{mx} - 1} \sum_{s=1}^{m-1} \left(\frac{m_0}{s}\right) e^{sx} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \quad m_0 = (-1)^{(p-1)/2} m$$

и $\left(\frac{m_0}{s}\right)$ — символ Кронекера. Полагая

$A = \prod_{0<a<d} a^{(m_0/a)}$, $B = \prod_{0<b<d} b^{(m_0/b)}$ при $(a/p) = 1$ и $(b/p) = -1$, автор получает для $m > 1$ $(B-A)/p = 2(m/p) \cdot \sum_{s=1}^{m-1} (m_0/s) B_{(p-1)/2}(s/m)$ или вместе с (1) для $p > m$

$$2h(d)\frac{mu}{t} \equiv \frac{B-A}{p} \pmod{p}. \quad (2)$$

Аналогичное сравнение получается в случае $d < 0$.

Примечание референта. Соотношение (1) было доказано А. А. Киселевым (Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук, 1949, вып. 16, 20—31) для любого p так, что (2) имеет место для $p \geqslant 3$. И. Ш. Славутский

9744. Об определении основной единицы некоторого вещественного квадратичного поля. Дегерт (Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reellquadratischer Zahlkörper. Degert Günter), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, 22, № 1-2, 92—97 (нем.)

Доказывается, что $E_1 = \{(4n^2+2r)/|r| + 4n\sqrt{D}/|r|\}/2$ есть основная единица квадратичного поля $R(\sqrt{D})$, если свободное от квадратов число $D > 5$ представимо в виде $D = n^2 + rc$ $|r| \leqslant n$ и $r \mid 4n$, $|r| \neq 1, 4$,

при этом оказывается, что норма $N(E_1) = +1$. Рассуждения элементарны.

Из 61 свободного от квадратов числа $D \leqslant 101$ указанный способ определения E_1 (вместе с тривиальными случаями $|r| = 1,4$) пригоден для 37.

И. Ш. Славутский

9745. Таблица вещественных кубических полей. Годуин, Самет (A table of real cubic fields. Godwin H. J., Samet P. A.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 108—110 (англ.)

Краткое сообщение о составленной авторами таблице вещественных кубических полей, имеющих дискриминанты, меньшие 20 000. При составлении таблицы использовались неравенства $a^2 - 3b \leqslant \Delta^{1/2}$; $a < 3 + 2\Delta^{1/2}$; $c \leqslant (9ab - 2a^3)/27$, где $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ — уравнение, определяющее поле и Δ — его дискриминант.

В таблице приведены значения Δ, a, b, c, базис поля и число классов идеалов для $19\,000 < \Delta < 20\,000$. Всего в рассмотренном интервале находится 830 полей, из них 24 циклических. В интервале (19 000, 20 000) 44 поля с одним классом идеалов, 3 поля с тремя классами идеалов и по одному с двумя и четырьмя классами идеалов.

В. Д. Подсыпанин

9746. К теории целых алгебраических чисел, зависящих от корня неприводимого уравнения четвертой степени. Гребенюк Д. Г., УзССР Фанлар Акад. ахбороти физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем. н., 1958, № 6, 27—47 (рез. узб.)

Рассматривается вопрос о фундаментальном базисе алгебраических чисел четвертой степени.

Фундаментальный базис ищется в виде

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{\Theta - \tau}{\delta}, \quad \omega_3 = \frac{\Theta^2 + 2\tau\Theta - 3\tau^2 - r}{\delta^2\sigma},$$

$$\omega_4 = \frac{\Theta^3 + r\Theta^2 + (\tau^2 - r)\Theta + \tau^3 - r\tau - s}{\delta^3\sigma^2 k},$$

где

$$\Theta^4 - r\Theta^2 - s\Theta - t = 0, \qquad (1)$$

δ, σ и k — делители дискриминанта уравнения (1) такие, что разрешима система сравнений

$$\begin{gathered} \tau^4 - r\tau^2 - s\tau - t \equiv 0 \pmod{\delta^4\sigma^3 k^2} \\ 4\tau^3 - 2r\tau - s \equiv 0 \pmod{\delta^3\sigma^2 k} \\ 6\tau^2 - r \equiv 0 \pmod{\delta^2\sigma} \\ 4\tau \equiv 0 \pmod{\delta}. \end{gathered} \qquad (2)$$

Подробное изучение сравнений (2) позволяет эффективно найти наибольшие возможные значения δ, σ и k. Эти значения и определяют искомый фундаментальный базис кольца $O(\Theta)$.

В. Д. Подсыпанин

9747. Примечание к теории символа Якоби. Рейхардт (Eine Bemerkung zur Theorie des Jacobischen Symbols. Reichardt Hans), Math. Nachr., 1958, **19**, № 1-6, 171—175 (нем.)

Пусть $\mathfrak{a}$ — целый идеал алгебраического поля Ω, содержащего корни n-й степени из 1; ζ — первообразный корень n-й степени из 1; β — некоторое число, взаимно простое с $\mathfrak{a}$. Символ Якоби определяется формулой:

$$(\beta/\mathfrak{a}) = \prod_{\mu=1}^{m} \zeta^{b_\mu}, \text{ где } m = (N(\mathfrak{a}) - 1)/n \text{ и } \beta\alpha_\mu \equiv$$

$$\equiv \alpha_{p_\mu}\zeta^{b_\mu} \pmod{\mathfrak{a}}, \text{ причем числа } 0 \text{ и } \alpha_\mu\zeta^\nu \quad (\mu = 1,2,\ldots m;$$

$\nu = 1, 2 \ldots, n$) образуют полную систему вычетов по модулю $\mathfrak{a}$; p_μ — некоторая перестановка μ.

Отсюда выводится $(\beta\gamma/\mathfrak{a}) = (\beta/\mathfrak{a})(\gamma/\mathfrak{a})$ и $(\gamma/\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\gamma/\mathfrak{a})(\gamma/\mathfrak{b})$, где число γ взаимно просто с $\mathfrak{a}$ и с $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{b}$ — целый идеал.

Полагая Ω полем рациональных чисел и $n = 2$, автор выводит известный закон взаимности символов Якоби $(a/b)(b/a) = (-1)^{[(a-1)/2][(b-1)/2]}$ для нечетных положительных чисел a и b.

Н. В. Гордеев

9748. О представлении степеней простых чисел полиномами с целыми нулями. Кемпбелл (On the representation of powers of primes by polynomials with integral zeros. Campbell J. G.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 6, 413 (англ.)

Пусть $f(x)$ — полином с целыми коэффициентами. Пусть $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ представляет последовательность всех нулей $f(x)$, подпоследовательность $(r_1, r_2, \ldots, r_j)$, $j \geqslant 1$, представляет все целые нули $f(x)$. Доказывается теорема 1: Если $f(v) = p^a$, где p — простое, a — натуральное число, то $v = r_s \pm p^t$, $s = 1, 2, \ldots, j$, $t = 0, 1, \ldots, a$, по крайней мере при одном s и одном t.

Теорема 2. Пусть $x^n - y^n = p^b$, где n — нечетное простое, p — простое число, $b \leqslant n$. Тогда x и y — последовательные целые числа.

В. А. Голубев

9749. О количестве степенных вычетов и об одном вопросе, поставленном г-ном Уре. Мюллер (Über die Anzahl der Potenzreste und eine von Herrn Ore angeschnittene Frage. Müller Max), Arch. Math., 1958, **9**, № 5, 321—341 (нем.)

Доказывается следующее.

Последние l цифр целого числа z^2, записанного в системе счисления с основанием g, при любом z выражают полный квадрат, если: 1) $l = 1$, $g = 2, 3, 4, 5, 8, 12, 16$; 2) $l = 2$, $g = 2,4$; 3) $l = 3$, $g = 2$; 4) $l = 4$, $g = 2$. Если же $l \geqslant 5$, то для любого заданного g найдутся числа z^2, последние l цифр которых в записи z^2 в системе счисления с основанием g не будут выражать полного квадрата.

Последние l цифр числа z^3, записанного в системе счисления с основанием g, выражают кубическое число, если: 1) $l = 1$, $g = 2,9$; 2) $l = 2$, $g = 3$, и аналогичные факты для z^n.

Н. В. Гордеев

9750. О различных квадратичных вычетах числа. Делькурт (Sur les résidus quadratiques distincts d'un nombre. Delcourte M.), Mathesis, 1958, **67**, № 9-10, 343—347 (франц.)

Выводится формула для $R(N)$ — числа квадратичных вычетов числа N. Доказывается мультипликативность функции $R(N)$. Если p_i — нечетные простые числа и $N = 2^{\alpha_0}\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$, то $R(N) =$

$$= \left[\frac{2^{\alpha_0} - (-1)^{\alpha_0}}{6} + \frac{3}{4}\right]\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{2p_i^{\alpha_i+1} - (-1)^{\alpha_i}(p_i - 1)}{4(p_i + 1)} + \frac{3}{4}\right].$$

В. А. Голубев

9751. Разложение на k слагаемых чисел, разбитых на j частей. Гупта (Partition of j-partite numbers into k summands. Gupta H.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 4, 403—405 (англ.)

Пусть число $N_j = (n_1, n_2, \ldots, n_j)$ разбито на j неотрицательных целых чисел. Назовем $N_j > 0$ разложенным на k слагаемых, если оно представляется суммой k положительных, разбитых на j частей, слагаемых вида: $N_{ij} = (n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказываются теоремы при $j = 2$:

Пусть $p(N_j; k)$ означает число разбиений N_j на k слагаемых. Тогда: 1) Для достаточно больших $n_1, n_2, \ldots, n_j$ и фиксированного k имеем $k!\,p(N_j; k) \sim$

$\sim \prod_{n=1}^{j}\binom{n_i - 1}{k - 1}$; 2) существуют числа a_k и b_k, за-

висящие только от k, такие, что

$$\prod_{i=1}^{j}\binom{n_i-b_k}{k-1} \leqslant k!\,p(N_j;k) \leqslant \prod_{i=1}^{j}\binom{n_i-1}{k-1}.$$

В. А. Голубев

9752. Разбиения чисел, состоящих из j-частей. Гупта (Partitions of j-partite numbers. Gupta Hansraj. Res. Bull. Punjab Univ., 1958, № 146, pp. 119—121) (англ.)

Дается другое доказательство формулы для $p(N_j;k)$ — числа разбиений N_j на k слагаемых, данной в прежней работе автора (реф. 9751). В. А. Голубев

9753. Об уравнении $ax-by=c$ Мацкевич (On the equation $ax-by=c$. Mazkewitsch D.), School Sci. and Math., 1958, 58, № 9, 741—744 (англ.)

Описывается способ получения наименьшего решения для y уравнения $ax-by=c$ в натуральных числах путем снижения коэффициентов. Даны числовые примеры. В. А. Голубев

9754. Замечание относительно представлений натурального числа в виде суммы натуральных слагаемых. Нараяна, Фултон (A note on the compositions of an integer. Narayana T. V., Fulton G. E.), Canad. Math. Bull., 1958, 1, № 3, 169—173 (англ.)

Рассматриваются представления натурального числа n в виде суммы r $(1 \leqslant r \leqslant n)$ натуральных слагаемых $t_1+t_2+\ldots+t_r=n$. Систему $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ авторы называют r-представлением (r-composition) числа n. В множестве всех r-представлений числа n вводится отношение порядка: считают, что $(t_1, \ldots, t_r)$ следует (dominates) за $(t_1', \ldots, t_r')$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{s} t_i \geqslant \sum_{i=1}^{s} t_i'$ $(s=1,2,\ldots,r)$. Каждому r-представлению ставится в соответствие ассоциированный вектор $(T_1, \ldots, T_r)$, где $T_s=\sum_{i=1}^{s} t_i$ $(s=1,2,\ldots,r)$. Разным r-представлениям числа n соответствуют разные ассоциированные векторы. Пусть двум r-представлениям $(t_1, \ldots, t_r)$ и $(t_1', \ldots, t_r')$ соответствуют ассоциированные векторы $(T_1, \ldots, T_r)$ и $(T_1', \ldots, T_r')$ и пусть $M_i=\max(T_i, T_i')$, $N_i=\min(T_i, T_i')$ $(i=1,2,\ldots,r)$. Авторы показывают, что $(M_1, \ldots, M_r)$ и $(N_1, \ldots, N_r)$ являются ассоциированными векторами для некоторых r-представлений, из которых первое есть наименьшая верхняя грань, а второе — наибольшая нижняя грань для $(t_1, \ldots, t_r)$ и $(t_1', \ldots, t_r')$. Таким образом, множество r-представлений числа n относительно введенного отношения порядка является структурой (lattice). Эта структура дистрибутивна. Если взять $n-r+1$-представление числа n и компоненты ассоциированного с ним вектора исключить из множества $(1, 2, \ldots, n)$, оставшиеся числа будут являться компонентами вектора, ассоциированного с некоторым r-представлением. Доказывается, что это соответствие между множеством представлений и множеством r-представлений числа n является антиизоморфизмом в смысле теории структур. Пусть $a(n)$ — множество представлений числа n, в которых слагаемые $\leqslant 2$, а $b(n)$ — множество всех представлений числа n, слагаемые в которых $\geqslant 2$. Указанный антиизоморфизм дает взаимно однозначное соответствие между $a(n)$ и $b(n+2)$. Д. Н. Ленской

9755. Следствия из равенств $AB=CD$ и $a^2+b^2=c^2$.

Мёснер (Folgerungen aus den Gleichungen. $A\cdot B=C\cdot D$ und $a^2+b^2=c^2$. Moessner Alfred), Bul. Inst. politehn. Iași, 1957, 3, № 3-4, 7—14 (нем.; рез. русск., рум.)

Из данных в заголовке равенств выводится при помощи теорем Тарри и Эскотта ряд многостепенных систем уравнений. Указывается несколько нерешенных вопросов. Дано много числовых примеров.

В. А. Голубев

9756. О группах простых чисел. Голубев В. А., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, 26, 49—56

Сообщается формула для количества пар натуральных чисел с разностью 2, каждое из которых не превышает $n+2$ и взаимно просто с n.

Указывается формула для количества групп натуральных чисел, взаимно простых с n, с заданными разностями между ними, причем меньшее из этих натуральных чисел не превышает n.

Приводится асимптотическая формула $\pi_2(x) \sim cx/\ln^2 x$, где $c=2\prod_{p=3}^{\infty}(1-1/(p-1)^2) \approx 1{,}3$, для количества простых чисел близнецов, проверенная автором на отрезке $[1; 13\cdot 10^6]$, и формула $\pi_r(x) \sim \pi_2 \Pi (p-1)/(p-2)$, где $\pi_r(x)$, количество пар простых чисел с четной разностью r, p — нечетные простые делители r, причем эта формула проверена для некоторых r на отрезке $[1; 13\cdot 10^4]$.

Даются асимптотические формулы для числа групп простых чисел от 1 до x для случаев: 1) $p_2-p_1=2$, $p_3-p_2=4$; 2) $p_2-p_1=r_1$ и $p_3-p_2=r_2$, где p_2 и 3 суть простые делители r_1 и r_2, а p — простой делитель одного из r или суммы r_1+r_2; 3) $p_2-p_1=2$, $p_3-p_2=4$, $p_4-p_3=2$. Формулы приводятся без вывода.

Приведены таблицы значений указанных функций на отрезках натурального ряда, а также в некоторых арифметических прогрессиях. Н. В. Гордеев

9757. К вопросу об интегралах, связанных с полиномами $A_\nu^n(\alpha)$ и рациональными функциями $\varphi_n(\alpha, x)$. Томич (Sur les intégrales se rattachant aux polynomes $A_\nu^n(\alpha)$ et aux fonctions rationnelles $\varphi_n(\alpha, x)$. Tomić Boško S.), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, 9, № 2, 97—108 (франц.; рез. серб.)

Как известно, функции $A_\nu^n(\alpha)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_{n+1}^i(\alpha+\nu-i)^n$ и $\varphi_n(x)$, заданные условием

$$\frac{1}{1-xe^z}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\frac{z^n}{n!},$$

связаны с числами и полиномами Бернулли и Эйлера, а также с числами Стирлинга II-го рода $\Delta^m 0^k/m!$ Автор вводит ряд обобщений указанных функций, в частности, определяет функцию $\varphi_n(\alpha, x)$:

$$\frac{e^{\alpha z}}{1-xe^z}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\alpha, x)\frac{z^n}{n!}.$$

Для этих функций автор доказывает несколько соотношений, аналогичных тем, которые получены для $A_\nu^n(\alpha)$ и $\varphi_n(x)$ Карамата (Karamata J., II-ème Congrès des math. roumains, Turnu- Severin, 1932, Mathematica, Cluj, 1935, IX, 164—178), Ворпицким (Worpitzky I., J. de Crelle, 1883, 94, 203—232) и др., а также вычисляет некоторые несобственные тригонометрические интегралы, выражающиеся через рассматриваемые функции, например,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n+1}\cos(2xt)\,dt=\frac{\pi}{n!}A_\nu^n\left(x+\frac{n+1}{2}-\nu\right),$$

где $-(n+1)/2+\nu \leqslant x \leqslant -(n+1)/2+\nu+1$ и $\nu=1,2,\ldots,n$; $n=1,2,3,\ldots$

Подробно изложена история вопроса (Эйлер, Лоцци, Тоскано, Нильсен и др.).

Примечание референта. Много опечаток, например, 1) на стр. 99 в (11) вместо $1-xe^{(2-x)z}$ следует читать $1-xe^{(1-x)z}$; 2) на стр. 99 в (12) вместо $\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^n(\alpha)=n$ следует читать $\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^n(\alpha)=n!$; 3) на стр. 105, 9 строка снизу вместо $=(n+1)/2+\nu$ следует читать $-(n+1)/2+\nu$. И. Ш. Славутский

9758. Обобщение чисел Бернулли. Леопольдт (Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen. Leopoldt Heinrich-Wolfgang), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, 22, № 1-2, 131—140 (нем.)

Для характера $\chi(\mu)$ с ведущим модулем f автор определяет числа B_χ^n условием

$$\sum_{\mu=1}^{f}\chi(\mu)\frac{te^{\mu t}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_\chi^n\frac{t^n}{n!},$$

называя их числами Бернулли, принадлежащими характеру χ. Для них и подобным образом определенных полиномов по аналогии с обычными числами и полиномами Бернулли доказывается ряд свойств. В частности, указан (§ 3) аналог теоремы Штаудта — Клаузена: B_χ^n есть $\mathfrak{P}$ — целое для любого простого дивизора из поля $P(\chi)$, порожденного характером χ. Кроме того, установлены связи B_χ^n с L-рядами Дирихле и ζ-функцией Дедекинда.

Примечание референта. Подобного рода обобщения чисел Бернулли рассматривал Берже (Acta math., 1890—91, 14, 249—304), который для символа Кронекера определил числа $B(n, \Delta)$, принадлежащие дискриминанту Δ, соотношением

$$\frac{v}{e^v-1}\sum_{r=1}^{|\Delta|-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{rv/|\Delta|}=\sum_{n=0}^{\infty}B(n,\Delta)v^n.$$

(См. также реф. 9757). И. Ш. Славутский

9759. Новое простое число Мерсенна. Ризель (A new Mersenne prime. Riesel Hans), Math. Tables and Other Aids Comput., 1958, 12, № 61, 60 (англ.)

8 сентября 1957 г. при помощи шведской электронной машины BESK установлено, что $M_{3217}=2^{3217}-1$ число простое. Подсчет по теореме Люка занял 5 час. 30 мин. Даны все 969 знаков числа M_{3217} по десятичной нумерации (РЖМат, 1958, 7466).

В. А. Голубев

9760. Сообщение о простых числах вида $k2^n+1$ и о множителях чисел Ферма. Робинсон (A report on primes of the form $k\cdot 2^n+1$ and on factors of Fermat numbers. Robinson Raphael M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 5, 673—681 (англ.)

Сообщаются результаты вычислительных работ, проведенных в 1956—57 гг. на быстродействующих вычислительных машинах СВАК при Калифорнийском университете, в Лос-Анжелосе. Результаты даны в виде двух таблиц. Таблица 1 содержит простые числа вида $k2^n+1$, k — нечетное, $n\geqslant 0$. Установлена простота вышеупомянутых чисел для $1\leqslant k\leqslant 99$ и некоторых n, соответственно значениям k. Таблица 2 содержит простые делители вида $k2^n+1$ чисел Ферма F_m, $F_m=2^{2^m}+1$. К известным (с времен Эйлера) 16 результатам прибавлено 22 новых. Наибольшее из приведенных чисел Ферма F_{1945} имеет простой делитель $5\cdot 2^{1947}+1$. П. Н. Реморов

9761. О составных числах n, делящих a^n-a. Шинцель (Sur les nombres composés n qui divisent a^n-a. Schinzel André), Rend. Circolo mat. Palermo, 1958, 7, № 1, 37—41 (франц.)

Известно, что существует бесконечное множество составных чисел, делящих число 2^n-2. Доказывается, что для всякого натурального числа a существует бесконечное множество составных чисел n, делящих число a^n-a. В. А. Голубев

9762. Несколько сравнений, заключающих биномиальные коэффициенты. Карлиц (Some congruences involving binomial coefficients. Carlitz L.), Elem. Math., 1959, 14, № 1, 11—13 (англ.)

Глейшер доказал, что $\binom{np-1}{n-1}\equiv 1-\frac{1}{3}n(n-1)p^3\times$ $\times B_{p-3}(\mathrm{mod}\,p^4)$, где $p>3$ — простое, B_m — m-е число Бернулли. Отсюда: $\binom{mp-1}{p-1}-\binom{np-1}{p-1}\equiv$ $\equiv-\frac{1}{3}(m-n)(m+n-1)p^3B_{p-3}(\mathrm{mod}\,p^4)$. Выводятся сравнения, заключающие r-ю разность:

$$\Delta_r=\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}\binom{nw+sw-1}{p-1},\quad p^e\mid w\ (e\geqslant 1).$$

В. А. Голубев

9763. Суммы степеней натуральных чисел. Лоне (Potenssummer av de naturlige tall. Lohne Johs), Nord. mat. tidskr., 1958, 6, № 4, 155—158, 182 (норв.; рез. англ.)

Рассмотрены формулы для суммирования одинаковых степеней чисел натурального ряда, не содержащие чисел Бернулли. Даны формулы

$$\sum_{n=1}^{m}n^{2r+1}=\sum_{s=}^{r+1}\frac{K_{rs}}{2s}\frac{(m+s)!}{(m-s)!}\quad\text{и}$$

$$\sum_{n=1}^{m}n^{2r+2}=\frac{2m+1}{2}\sum_{s=1}^{r+1}\frac{K_{rs}}{2s+1}\frac{(m+s)!}{(m-s)!},$$

где коэффициенты K_{rs} не зависят от m. Указано без доказательства, что эти коэффициенты удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$K_{r1}=K_{r,r+1}=1;\ K_{r+1,s}=K_{r,s+1}+s^2K_{r,s}(s\geqslant 2)$$

и, следовательно, являются натуральными числами. Дана таблица коэффициентов $K_{r,s}$ при $r\leqslant 7$. Выведено явное выражение этих коэффициентов в зависимости от r и s. Утверждается, что если $p=2r+1$ простое число, то все $K_{r2}, \ldots, K_{rr}$ делятся на p.

Указано вычислительное преимущество предлагаемых формул суммирования по сравнению с обычной формулой, содержащей числа Бернулли.

Примечание референта. В рекуррентных соотношениях точнее было бы указать, что $2\leqslant s\leqslant r+1$, $K_{rs}=0$ при $s\geqslant r+2$. А. Н. Хованский

9764. Приложение к предыдущей статье. Люхе (Tillegg til foranstående artikkel. Lyche R. Tambs), Nord. mat. tidskr., 1958, 6, № 4, 155—158, 182 (норв.; рез. англ.)

Исследуются свойства коэффициентов K_{rs}, входящих в предложенную Лоне (реф. 9763) формулу для суммирования одинаковых степеней чисел натурального ряда. Выведена формула

$$K_{rs}=\sum_{t=2}^{s}(-1)^{s+t}\frac{2t^2(t^{2r}-1)}{(s-t)!(s+t)!},\quad s\geqslant 2\ (K_{r1}=1),$$

из которой просто получаются рекуррентные соотношения

$$K_{r1}=K_{r,r+1}=1,\ K_{r+1,s}=K_{r,s-1}+s^2K_{rs}(s\geqslant 2),$$

приведенные без доказательства Лоне.

А. Н. Хованский

9765. Биномиальное тождество, связанное с последовательностями рифмования. Левин (A binomial identity related to rhyming sequences. Levine Jack), Math. Mag., 1958, **32**, № 2, 71—74 (англ.)

Пусть последовательность из n элементов $a_1a_2\ldots a_n$ порождается r различными числами $1,2,\ldots,r$, k-е которых в последовательности появляются n_k раз, так что $n_1+\ldots+n_r=n$. Если число впервые появляется на p_k-м месте и $p_k<p_m$ как только $k<m$, тогда $a_1a_2\ldots a_n$ называется последовательностью рифмования длины n. Пусть, далее, $A(n_1,\ldots n_r)$ означает число таких последовательностей. Тогда при помощи рекуррентного соотношения

$$A(n_1,\ldots,n_r)=A(n_1-1,n_2,\ldots,n_r)+$$
$$+A(n_1,n_2-1,n_3,\ldots,n_r)+\ldots+A(n_1,\ldots,n_{r-1},n_r-1)$$

с подставлением в него известного результата

$$A(n_1,\ldots,n_r)=\binom{n-1}{n_1-1}\binom{n-n_1-1}{n_2-1}\ldots\times$$
$$\times\binom{n-n_1-\ldots-n_{r-1}-1}{n_r-1}$$

автор получает биномиальное тождество.

Показано также, что $B(n,r)=\sum A(n_1,\ldots,n_r)$ является числом Стирлинга второго рода.

Э. И. Вилкас

9766. Частичное решение одной проблемы Беренса. Хигман (A partial solution to a problem of D. J. Behrens. Higman G.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 341, 217—218 (англ.)

Беренс предложил определить, для каких натуральных чисел n на вершинах правильного $(2n+1)$-угольника можно так расположить буквы $A_1,\ldots,A_n$, $B_1,\ldots,B_n$, O, чтобы: 1) никакие две линии A_iB_i не были одинаковой длины; 2) никакие две линии A_iB_i не были параллельны и ни одна из них не была параллельна касательной в точке O описанного круга.

Доказывается, что выполнение указанных условий возможно, если $2n+1$ не делится на простое число Ферма $2^{2^m}+1$. Однако это не необходимо. Например, при $n=8,10$, т. е. при $2n+1=17,21$, делящихся на простые числа Ферма, можно удовлетворить условиям Беренса.

В. А. Голубев

9767. О $\sum_{i=1}^{n}i^p$. Ленстра, Кок (Over $\sum_{i=1}^{n}i^p$. Lenstra H. W., Kok J. C.), Euclides (Nederl.), 1957, **33**, № 1, 13—19 (гол.)

Дается простой способ для вычисления известных сумм

$$S_p(n)=\sum_{i=1}^{n}i^p,$$

где p — неотрицательное целое.

Вычисления проведены до $p=12$ включительно. Также рассмотрены некоторые свойства этих сумм.

Г. А. Ломадзе

9768. Обобщение φ-функции Эйлера. Олдер (A generalization of the Euler φ-function. Alder Henry L.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 9, 690—692 (англ.)

Данное обобщение есть частный случай обобщенной функции Эйлера (РЖМат, 1955, 610). Доказательство мультипликативности обобщенной функции отличается от данного референтом (РЖМат, 1959, 2290).

В. А. Голубев

9769. Заметка об одной задаче, касающейся квадратных корней. Ингельстам (Ett påpekande till ett problem om kvadratrötter. Ingelstam Lars), Nord. mat. tidskr., 1958, 6, № 4, 153—154, 182 (шведск.; рез. англ.)

Дается новое доказательство утверждения, высказанного ранее в Math. Mag., 1958, **31**, № 3, 165. Для любой пары натуральных чисел n, p существует такое натуральное число m, что

$$(\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n})^p=\sqrt{m+1}\pm\sqrt{m},$$
$$(\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n})^{-p}=\sqrt{m+1}\mp\sqrt{m}.$$

Например, $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^4=\sqrt{113569}-\sqrt{113568}$.

Это утверждение рассматривается как следствие теоремы:

Пусть n — натуральное число. Пусть G_n — бесконечная циклическая группа, которую порождает число $a=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ путем мультипликативной композиции. Тогда все элементы группы G_n имеют форму $g=\sqrt{m+1}\pm\sqrt{m}$ (m — натуральное число).

А. Н. Хованский

9770. Признак иррациональности бесконечной цепной дроби с комплексными элементами. Романчук Н. А., Уч. зап. Харьковск. пос. пед. ин-та, 1957, **21**, 107—111

Под целым комплексным числом автор понимает числа кольца Гаусса $O(i)$, а под рациональными — числа поля $R(i)$.

Рассматривается бесконечная непрерывная дробь

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+}}\ \ddots\ +\cfrac{a_k}{b_k+}\ \ddots$$

с целыми комплексными числами a_k, b_k. Доказывается, что если $(a_k)\leqslant(b_k)-1$ и для бесконечного множества значений k $(a_k)<(b_k)-1$, то непрерывная дробь сходится и имеет пределом число, не принадлежащее полю $R(i)$.

В. Д. Подсыпанин

9771. Кое-что из теории чисел. Велдкамп (Een en ander uit de getallentheorie. Weldkamp G. R.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1955—56, **43**, № 3, 165—176 (гол.)

Даны подробные доказательства некоторых простейших теорем теории чисел.

Работа состоит из следующих параграфов: 1. Натуральные числа. 2. Делимость. 3. Простые числа. 4. Разложение на множители. 5. Теоремы об общем наибольшем делителе. 6. Деление с остатком. 7. Теория общего наибольшего делителя и общего наименьшего кратного.

Г. А. Ломадзе

9772. О последовательности псевдослучайных чисел наибольшей длины. Сертен (On sequences of pseudo-random numbers of maximal length. Certaine J.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, 5, № 4, 353—356 (англ.)

Развивается методика получения псевдослучайных чисел наибольшей длины, с применением вычислительных машин.

П. Н. Реморов

9773 К. Введение в алгебраическую теорию чисел. С дополнительной главой, написанной М. Холлом. Манн (Introduction to algebraic number theory. With a

chapter by Marshall Hall, Jr. Mann Henry B.), Ohio State Univ. Press, Columbus, Ohio, 1955, vii+ +168 pp.) (англ.)

В введении автор отмечает, что цель этой книги— ввести читателя, знакомого с общими основами математики, в теорию алгебраических чисел, рассчитывая на то, что читатель должен знать такие фундаментальные понятия в современной алгебре, как группы, кольца, поля и т. д.

Автор придерживается классического метода теории идеалов и развивает фундаментальную теорию алгебраических чисел как данную, например, в первых двух частях числового очерка Гильберта (Hilbert, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1897, 4, 175—546).

Основное содержание следующее: алгебраические числа и алгебраические целые, свойства идеалов полей алгебраических чисел, в частности, теорема о разложении идеалов на произведение простых идеалов, теорема Минковского о выпуклых множествах и ее приложениях, дискриминанты и дифференты, теория Гильберта о разветвлении простых идеалов для расширений Галуа, дзета-функции и классическая формула, теорема Фробениуса о плотности простых идеалов и теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Рассматриваются также свойства квадратичных и круговых полей в различных местах книги в качестве иллюстрации общей теории. K. Iwasawa

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 3, 240.

9774 К. Коллоквиум по теории чисел в Брюсселе 19, 20 и 21 декабря 1955 (Colloque sur la théorie des nombres, tenu à Bruxelles, les 19, 20 et 21 déc. 1955. /10 e/. Centre belge rech. math. Liège, G. Thone; Paris, Masson, 1956, 207 p., 2400 fr.) (франц.)

АЛГЕБРА

Редактор *А. И. Ширшов*

9775 К. Курс алгебры. Для кандидатов в военные и авиационные школы. Фариас (Curso de álgebra. Para uso dos cand. à Escola Milit. e dos cand. à Escola Aeroáut., pelo coronel. Farias Sinésio de. Pôrto Alegre, Ed. Globo, 1958, 1067 p., 350,000 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1958, 6, № 3, 155 (порт.)

9776 К. Курс алгебры для кандидатов в школу искусств и промышленности. Баре (Cours d'algèbre, à l'usage des candidats aux écoles d'arts et métiers. 11-e éd. Baret Jean. Paris. Vuibert 1957, viii, 580 p., ill., 1100 fr), Bibliogr. France, 1958, 147, № 51, 1246 (франц.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

9777. О теореме Каратеодори. Сегё (On a theorem of C. Carathéodory. Szegö G.), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 62—66 (англ.)

Доказывается следующая теорема Каратеодори: Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — данные комплексные числа, не все равные нулю, $n \geqslant 1$. Тогда существует такое целое m, $1 \leqslant m \leqslant n$, и некоторые постоянные λ_k, ε_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\lambda_k > 0$, $|\varepsilon_k| = 1$, $\varepsilon_k \neq \varepsilon_l$, если $k \neq l$, что $c_\nu = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varepsilon_k^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Число m и постоянные λ_k, ε_k определены однозначно. Г. Н. Веселая

9778. Обзор доказательств неприводимости уравнения деления круга. Мантёйффель (Übersicht über die Irreduzibilitätsbeweise der Kreisteilungsgleichung. Manteuffel Karl), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1957, 1, № 2, 69—75 (нем.)

Дается обзор свыше 30 доказательств неприводимости полиномов деления круга. А. Г. Школьник

9779. О приводимости многочленов в иррациональных полях. Волнина Н., Уч. зап. Калининградск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. I, 133—141

9780. О неприводимости полиномов. Дуйчев (Sur l'irréductibilité des polynômes. Dujčev Jordan. Ann. Univ. Sofia Fac., Sci. Phys. Math., 1953—1954 (1954), 48, № 1, 27—32) (болг.; рез. франц.)

Пусть $f(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$, $\varphi(z) = b_0 z^m + \ldots + b_m$— взаимно простые многочлены с целыми коэффициентами. Пусть $F(z) = f(z) + \varepsilon\lambda\varphi(z)$, где λ — целое и $\varepsilon = 1$, если $m = n-1$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} a_0 b_0$, если $m = n-2$. Тогда имеется такое M, что $F(z)$ неприводим в поле рациональных чисел, если $|\lambda| > M$ и $m = n-1$ или если $\lambda > M$ и $m = n-2$. A. W. Goodman

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 573.

9781. Полиномиальные коциклы. Хитон, Уэйплс (Polynomial cocycles. Heaton R., Whaples G.), Duke Math. J., 1958, 25, № 4, 691—696 (англ.)

На множестве всех многочленов от нескольких переменных над произвольным полем K следующей формулой определяется оператор δ, сопоставляющий каждому многочлену f от n переменных некоторый многочлен δf от $n+1$ переменных:

$$(\delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu f(x_1, \ldots, x_\nu + x_{\nu+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Многочлен f от n переменных называется полиномиальным n-коциклом (или просто n-коциклом), если $\delta f = 0$ и полиномиальный n-кограницей (или просто n-кограницей), если $f = \delta g$ для некоторого многочлена g. Доказывается, что если характеристика поля K равна 0, то 1-коциклы исчерпываются многочленами вида ax_1, а при любом $n > 1$ каждый n-коцикл является кограницей. В случае, когда характеристика поля K равна p, приводится подобного же рода, но более громоздкое, описание 1- и 2-коциклов. Е. Г. Шульгейфер

9782. Об уравнениях, получаемых с помощью детерминантов. Дервидюэ (Sur des équations obtenues à partir de déterminants. Derwidué L.), Mathesis, 1958, 67, № 7-8, 214—217 (франц.)

Доказывается, что уравнение

$$H_n(x) = \begin{vmatrix} f_0(x)+k_0(x)i+1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & c_1 f_1(x)+k_1(x)i & -1 & & \\ \cdots & \cdots & 1 & c_2 f_2(x)+k_2(x)i & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & c_{n-1} f_{n-1}(x)+k_{n-1}(x)i \end{vmatrix} = 0,$$

где $f_j(x) = x\left(1 + \sum_{k=1}^{s_j} p_{jk} x^{2k}\right)$, $k_j(x) = \sum_{l=0}^{r_j} q_{jl} x^{2l}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$,

p_{jk}, q_{jl}, c_j — действительные числа и $c_j \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$, имеет

$$\nu_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j + \mu$$

корней с положительной действительной частью; здесь ν_0 и ν_j — числа корней с положительной действительной частью в уравнении $f_0(x) + k_0(x)\, i = 0$ и уравнениях $f_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, μ — число отрицательных коэффициентов c_j. Аналогичная задача решается относительно еще одного уравнения, определяемого с помощью детерминанта. А. Г. Школьник

9783. Замечания к спектральному разложению одной стохастической матрицы. Рожа (Megjegyzések egy sztochasztikus matrix spektrálfelbontásához. Rózsa Pál), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1957, **7**, № 2, 199—206 (венг.)

Модель Эренфеста процесса теплового обмена приводит к $(n+1) \times (n+1)$-матрице $P = (p_{ik})$ вероятностей перехода, где $p_{i,\,i+1} = \frac{n-i+1}{n}$, $p_{i,\,i-1} = \frac{i-1}{n}$ и $p_{ik} = 0$, если $|i-k| \neq 1$. Силвестер установил, что собственные значения матрицы nP расположены симметрично относительно 0 и представляют собой арифметическую прогрессию с разностью 2. Кац (Kac. M., Amer. Math. Monthly, 1947, **54**, 369—391) доказал вышеупомянутое утверждение, получив полное спектральное разложение матрицы P. В настоящей статье дается иное доказательство этого спектрального разложения. А. Prékopa

9784. Матричное уравнение $X^2 - 1 = 0$ над конечным полем. Ходжес (The matrix equation $X^2 - 1 = 0$ over a finite field. Hodges John H.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 7, 518—520 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Число квадратных матриц порядка m над конечным полем $GF(q)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 - 1 = 0$, равно

$$g_m \sum_{t=0}^{m} \frac{1}{g_t g_{m-t}} \text{ при } q \text{ нечетном}$$

и $$g_m \sum_{0 \leqslant 2t < 2m} \frac{q^{-t(2m-3t)}}{g_t g_{m-2t}} \text{ при } q \text{ четном,}$$

где $g_0 = 1$, а $g_t = \prod_{i=0}^{t-1} (q^t - q^i)$ — число невырожденных матриц порядка t над полем $GF(q)$.

Автор отмечает, что более общий вопрос о числе квадратных матриц порядка m, удовлетворяющих произвольному полиному $E(x)$ над $GF(q)$, будет рассмотрен в его последующих публикациях. С. Д. Берман

9785. Комплексное умножение в классе римановых матриц. Дженнер (Complex multiplication in a class of Riemann matrices. Jenner W. E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 31 (англ.)

9786 К. Элементарная теория определителей. Лакас-Нетту (Teoria elementar dos determinantes. 4. ed. Lacaz Netto Francisco A. S. Paulo, Liv. Nobel, 1958, 159 p., 130,000 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1958, **6**, № 6, 338 (порт.)

9787 К. Основы теории матриц. Каэн (Éléments de calcul matriciel. Cahen Gilbert. Paris, Dunod, 1955, VI, 94 p., ill.) (франц.)

Курс лекций, читанных автором в Высшей военно-инженерной школе. Книга предназначена в качестве учебного пособия по теории матриц для различных инженерных специальностей. Содержание: гл. 1. Матричное исчисление; гл. 2. Собственные значения и собственные векторы матрицы; гл. 3. Функции от квадратной матрицы; гл. 4. Применение к исследованию электрических цепей. В конце книги отдельно к каждой главе приводятся упражнения (всего 70) с ответами и указаниями. К. А. Карпов

9788 К. Конечномерные пространства. Халмош (Finite-dimensional spaces. 2 nd ed. Halmos Paul R. Princeton, N. J., Van Nostrand, 1958, 207 pp., ill., 5 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 8, 86 (англ.)

9789 К. Линейная алгебра. Мостовский, Штарк (Algebra liniowa. Mostowski Andrzej, Stark Marceli. (Bibliot. mat., 19), Warszawa, PWN, 1958, 188 s.) (польск.)

ГРУППЫ

9790. О связи между некоторыми подгруппами конечной группы. Дескинс (A note on the relationship between certain subgroups of a finite group. Deskins W. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 655—660 (англ.)

Будем говорить, что подгруппа K конечной группы G обладает свойством (𝔖) относительно алгебраически замкнутого поля F, если все неприводимые представления группы G над F индуцируют неприводимые представления этой подгруппы.

Теорема 1. Если характеристика поля F не делит порядок группы G, то подгруппа $K \subseteq G$ тогда и только тогда обладает свойством (𝔖), когда K — такой нормальный делитель группы G, что число классов сопряженных элементов группы G равно $(G:K)s$, где s — число классов подгруппы K.

Доказывается, что если K — нормальный делитель, удовлетворяющий условиям теоремы 1, то фактор-группа G/K — абелева, причем G представляется в виде прямого произведения $G = K \times T$, когда порядок группы K взаимно прост с ее индексом.

Если G — расширение p-группы посредством абелевой группы, порядок которой взаимно прост с p, то любая подгруппа группы G обладает свойством (𝔖) относительно поля F характеристики p.

В качестве следствия теоремы 1 и одного результата референта (РЖМат, 1956, 7136) получается предложение: Нормальный делитель K группы G обладает свойством (𝔖) относительно поля F, характеристика которого не делит порядок группы, если фактор-группа G/K — циклична и каждый класс группы K является одновременно классом группы G. С. Д. Берман

9791. Об инвариантах конечных нильпотентных групп. Морикава (On the invariants of finite nilpotent groups. Morikawa Hisasi), Osaka Math. J., 1958, **10**, № 1, 53—56 (англ.)

Доказана теорема: Пусть G — конечная нильпотентная группа с экспонентом N и пусть κ — поле, содержащее корни степени N из единицы и имеющее характеристику, взаимно простую с N. Пусть $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{r+1} = \{e\}$ — нисходящая цепочка нормальных делителей группы G, причем G_i/G_{i+1} является циклической подгруппой группы G/G_{i+1} $(i = 0, 1, \ldots, r)$. Пусть λ_i — натуральный гомоморфизм G на G/G_i и пусть $\{M_i(\sigma)\}$ — регулярное представление группы G/G_i. Пусть

$$M(\sigma) = \overbrace{M_1(\lambda_1(\sigma)) + \ldots + M_1(\lambda_1(\sigma))}^{t_1} \otimes$$
$$\otimes \overbrace{M_2(\lambda_2(\sigma)) + \ldots + M_2(\lambda_2(\sigma))}^{t_2} \otimes$$
$$\overbrace{\otimes M_{r+1}(\sigma) + \ldots + M_{r+1}(\sigma)}^{t_{r+1}} \quad (t_i \geqslant 1;\ i = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Тогда поле инвариантов $\{M(\sigma);\ \sigma\in G\}$ бирационально (трансцендентно над k). В. К. Туркин

9792. О вложениях конечных групп. Вуссинг (Über Einbettungen endlicher Gruppen. Wussing Hans), Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl., 1958, **103**, № 3, 5—38 (нем.)

Группа G называется вложимой в группу H, если G изоморфна какой-либо подгруппе группы H. Если конечная группа может быть вложена в какую-либо группу, порождаемую t элементами порядков $n_1, n_2, \ldots, n_t$, то по терминологии автора эта конечная группа допускает вложение типа $[n_1, n_2, \ldots, n_t]$.

Основным результатом, полученным в данной работе, является следующая теорема:

Всякая конечная группа допускает вложение типа $[m, n]$ при произвольных m и n, удовлетворяющих условию $mn \equiv 0 \pmod 2$ с единственным исключением $m = n = 2$. Если же $mn \not\equiv 0 \pmod 2$ или $m = n = 2$, то для всего класса конечных групп вложение типа $[m, n]$ невозможно (т. е. не всякая конечная группа допускает вложение такого типа).

Отдельно рассмотрен случай, когда конечная группа является симметрической. Доказаны следующие теоремы:

Всякая симметрическая группа порождается двумя элементами порядков, не превышающих 60.

Всякая симметрическая группа $\mathfrak{S}_N$ при $N \geqslant 3$ порождается тремя элементами порядка 2; другими словами, всякая конечная группа допускает вложение типа $[2, 2, 2]$. В. К. Туркин

9793. О кронекеровом произведении неприводимых представлений симметрической группы. Макар (On the Kronecker product of irreducible representations of the symmetric group. Makar Ragy H.), Альнышрат-аль-ильмитат-е-джамий-ат-е-эйн шамс, A'in Shams Sci. Bull., 1957, № 2, 247—258 (англ.)

Дана новая (как указывает автор, более удобная для вычислений) форма записи формул, полученных автором ранее (Edinburgh Math. Proc., 1949, **2**, 8) и служащих для разложения на неприводимые составляющие кронекерсва произведения двух неприводимых представлений симметрической группы. В. К. Туркин

9794. Полные анализы плетизмов $\{4\}\otimes\{6\}$ и $\{3\}\otimes\{7\}$. Макар, Миссиха (The complete analyses of the plethysms $\{4\}\otimes\{6\}$ and $\{3\}\otimes\{7\}$ Makar Ragy H., Missiha S. A.), Аль-нышрат-аль-ильмитат-е-джамий-ат-е-эйн шамс, A'in Shams Sci. Bull., 1957, № 2, 237—246 (англ.)

Получены разложения по S-функциям для кронекеровых произведений $\{4\}\otimes\{6\}$ и $\{3\}\otimes\{7\}$; в первом случае разложение состоит из 299 различных S-функций с суммой коэффициентов 742; во втором — из 161 различных S-функций с суммой коэффициентов 225. В. К. Туркин

9795. Анализ представлений линейной группы размерности 2. Макар (On the analysis of the representations of the linear group of dimension 2. Makar Ragy H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 4, 475—479, Indagationes math., 1958, **20**, № 4, 475—479 (англ.)

Изучаются S-функции видов $\{5m-k,\ k\}$ $(k \leqslant m)$, $\{4m-k,\ m+k\}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и $\{3m-k,\ 2m+k\}$ где $1 \leqslant k \leqslant \frac{m}{2}$ при m четном и $1 \leqslant k \leqslant \frac{m-1}{2}$, если m — нечетное число. Это изучение связано с исследованием неприводимых компонент некоторого представления группы матриц второго порядка. Приведены таблицы. С. Д. Берман

9796. Конечные группы симметрии и нахождение решений уравнения Шрёдингера. Марио (Groupes finis de symétrie et recherche de solutions de l'équation de Schrödinger. Mariot Louis), J. phys. et radium, 1957, **18**, № 5, 344—356 (франц.)

Сжатый обзор по теории конечных групп симметрии (КГС) и применению их к задачам теории кристаллических тел, в особенности к задачам квантовой механики. Дается общее описание КГС в кристаллографии, излагается общая теория тепловых колебаний атомов в кристаллической решетке и применение КГС для решения этих задач. Далее излагаются вариационные методы решения задач квантовой механики, описывается зонная модель энергетического спектра кристаллов, свойства соответствующих волновых функций и методы решения уравнения Шрёдингера (с указанием способов применения теории групп). Библ. 44 назв. К. П. Гуров

9797. К рациональному определению неприводимых составляющих заданного тензорного представления, относящегося к 32 классам кристаллов. Мюллер (Zur rationellen Bestimmung der irreduziblen Bestandteile einer vorgegebenen Tensordarstellung in den 32 Kristallklassen. Müller Klaus), Abhandl. Braunschweig. wiss. Ges., 1957, **9**, 115—126 (нем.; рез. англ.)

Для описания теоретико-группового строения классов кристаллов используется символика Мейера. Основываясь на ней, автор выводит ряд соотношений, позволяющих получить для тензора с заданной собственной симметрией кристаллографическую таблицу разложения, указывающую, сколько раз входит в это тензорное представление какое-либо из неприводимых представлений 32 классов кристаллов. Указывается на различные преимущества излагаемого метода (независимость схемы вычислений от специфических свойств рассматриваемого тензора, возможность исключения ошибок вычисления). Рассмотрены примеры. В. К. Туркин

9798. Независимость ассоциативного закона. Каттсофф (The independence of the associative law. Kattsoff L. O.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 8, Part 1, 620—622 (англ.)

На трех примерах доказывается, что ассоциативный закон не зависит от остальных аксиом в абелевых группах. В. Д. Белоусов

9799. Об одном отношении Галуа в теории групп. Калужнин Л. А., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 244—245

Резюме доклада на I Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме. Пусть G — группа,

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = I \qquad (1)$$

— конечный инвариантный ряд этой группы, а R — группа автоморфизмов группы G. Ряду (1) можно поставить в соответствие нильпотентную подгруппу $U \subseteq R$ класса $\leqslant m-1$, называемую группой устойчивости ряда, которая состоит из всех автоморфизмов $\varphi \in R$, индуцирующих тождественный автоморфизм каждого из факторов G_{i-1}/G_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Для случая, когда G является абелевой группой типа $(p, \ldots, p)$, формулируются следующие результаты:

Класс нильпотентности группы устойчивости ряда (1) длины m равен $(m-1)$.

Подгруппа U группы R тогда и только тогда является группой устойчивости для некоторого инвариантного ряда группы G, когда U является нормальным делителем во всякой силовской p-подгруппе, в которой она содержится и, кроме того, пересечение всех этих подгрупп совпадает с U.

Поставлен ряд задач о связях Галуа между группами устойчивости и инвариантными рядами группы G. С. Д. Берман

9800. Правоупорядоченные группы. Зайцева М. И., Уч. зап. Шуйск. гос. пед. ин-та, 1958, **6**, 205—226

Группа G называется правой частично упорядоченной, если множество ее элементов является частично упорядоченным множеством и для всех $x \in G$, $a \leqslant b$ влечет $ax \leqslant bx$.

Устанавливаются простейшие свойства правых частично упорядоченных групп. Дается достаточный критерий правого упорядочения группы. Если группа G содержит нормальную систему подгрупп $U = [A_\alpha]$, факторы которой могут быть правоупорядочены, то упорядоченность факторов можно продолжить до правой упорядоченности всей группы G.

Всякая группа типа RN с факторами без кручения может быть правоупорядочена.

Рассматривается пример разрешимой правой упорядоченной группы, неупорядочиваемой в обычном смысле.

Основной результат: порядковый тип счетного однородного множества имеет вид: $\zeta^\lambda \eta^\varepsilon$, где λ — порядковое число, $\varepsilon = 0$ или 1, а $\zeta^\lambda \eta^\varepsilon$ — сильное произведение λ порядковых типов ζ и порядкового типа η^ε (ζ — порядковый тип множества всех целых чисел, η — порядковый тип множества всех рациональных чисел).

То же самое свойство было доказано А. И. Мальцевым для любой счетной упорядоченной группы, им же было высказано предположение, что тем же свойством обладают все счетные упорядоченные множества. (Изв. АН СССР, 1949, Сер. матем., 13, 473—482).

Е. И. Пятницкая, М. Гриндлингер

9801. О матричных неприводимых представлениях конечных полугрупп. Понизовский И. С., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 6, 139—144

Пусть S — произвольная конечная полугруппа с нулем 0, а $I_1 = S^{n_0}$, где n_0 — наименьшее из натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $S^{n+1} = S^n$. Считая, что полугруппа I_1 уже построена, выберем ее максимальный двусторонний идеал K_l. Тогда $I_{l+1} = K_l^{n_l}$, где n_l — наименьшее из таких натуральных чисел n, что $K_l^{n+1} = K_l^n$. Все построенные таким образом полугруппы $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_\omega$ оказываются различными двусторонними идеалами полугруппы S, причем $I_\omega = 0$. Каждая из фактор-полугрупп $L_l + I_l / I_{l+1}$ является вполне простой.

Основной результат статьи. Если m_i — число неэквивалентных неприводимых над полем P матричных представлений полугруппы L_i, то общее число неэквивалентных неприводимых над P представлений полугруппы S равно $m_1 + m_2 + \ldots + m_{\omega-1}$. Вместе с результатами Клиффорда о представлениях вполне простых полугрупп (Алгебраический реферативный сборник, М., Изд-во ин. лит., 1948, вып. 3, 643) эта теорема полностью решает вопрос о числе неприводимых над P представлений произвольной конечной полугруппы.

Л. М. Глускин

9802. Умножения на прямой. Хорн (Multiplications on the line. Horne J. G., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 791—795 (англ.)

Дана полная классификация топологических полугрупп $(E_1, \circ)$, определенных на всей вещественной прямой $E_1 = (-\infty, \infty)$, в которых 0 и 1 являются соответственно нулем и единицей полугруппы. Обозначим через $(E_1, \cdot)$ мультипликативную полугруппу всех вещественных чисел; через $E_1^{(\alpha)}$ ($\alpha > 0$) — полугруппу $(E_1, \circ)$ с операцией: 1) $x \circ y = xy$, если $y \geqslant 0$; 2) $x \circ y = x^\alpha y$, если $x \geqslant 0$, $y < 0$; 3) $x \circ y = 0$, если $x < 0$, $y < 0$; через E_1^* — полугруппу $(E_1, \circ)$ с операцией: 1) $x \circ y = y \circ x = xy$, если $x \geqslant 0$; 2) $x \circ y = -xy$, если $x, y < 0$. Две различные полугруппы $E_1^{(\alpha)}$ не могут быть топологически изоморфными.

Пусть $u < 0$, $v < 0$ — фиксированная пара элементов из $(E_1, \circ)$. Если $u \circ v > 0$, то $(E_1, \circ)$ оказывается топологически изоморфной полугруппе $(E_1, \cdot)$. Если $u \circ v = 0$, то $(E_1, \circ)$ топологически изоморфна одной из полугрупп $E_1^{(\alpha)}$. Если $x \circ y = 0$ для любых $x < 0$, $y < 0$, то $(E_1, \circ)$ топологически изоморфна полугруппе E_1^*.

Следующее предложение обобщает результат Фоссета (РЖМат, 1956, 5787): если определенная на E_1 топологическая полугруппа S без нильпотентных ненулевых элементов обладает нулем и единицей и не содержит других идемпотентов, то S топологически изоморфна полугруппе $(E_1, \cdot)$.

Л. М. Глускин

9803. Естественно упорядоченные компактные полугруппы. Нумакура (Naturally totally ordered compact semigroups. Numakura Katsumi), Duke Math. J., 1958, **25**, № 4, 639—645 (англ.)

Пусть S — моб (РЖМат, 1956, 5124), не обязательно коммутативный. S называется естественно упорядоченным (е. у.), если он линейно упорядочен отношением левой делимости: $a > b$, если $b \in Sa \setminus a$ (ср. в коммутативном случае с РЖМат, 1956, 237).

Обозначим через I_1 мультипликативную полугруппу всех вещественных чисел отрезка $[0, 1]$, через I_2 — полугруппу, определенную на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ с операцией $x \circ y = \max\left\{\frac{1}{2}, xy\right\}$; через Γ_1 — мультипликативную полугруппу $0 \cup \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ с естественной топологией, а через $\Gamma_2 = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\mu}$ полугруппу с операцией $\frac{1}{2^\alpha} \circ \frac{1}{2^\beta} = \max\left\{\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}, \frac{1}{2^\mu}\right\}$ и с дискретной топологией. I_1 и I_2 называются (I)-мобами, Γ_1 и Γ_2 — (Γ)-мобами. Через $\Gamma(r)$ обозначим (Γ)-моб, порожденный элементом r полугруппы S.

Доказывается, что е. у. компактный моб S, содержащий точно один идемпотент, топологически изоморфен (Γ)-мобу. Пусть S — е. у. компактный моб, содержащий точно два идемпотента — нуль 0 и правую единицу u. Если S не связен, то $S = \Gamma(r) \cup \Gamma(p) \cup u$, где $0 < r \leqslant p < u$, $up = r = ur$, $pr = p^2$, $rp = r^2$, причем $\Gamma(r)$ и $\Gamma(p)$ имеют общий нуль. Если S связен, то он топологически изоморфен (I)-мобу.

Пусть Λ линейно упорядоченное множество, X — е. у. моб, являющийся объединением своих е. у. подмобов X_λ ($\lambda \in \Lambda$), причем из $a_\lambda \in X_\lambda$, $b_\mu \in X_\mu$, $\lambda < \mu$ следует $a_\lambda \leqslant b_\mu$, $a_\lambda b_\mu \in X_\lambda$, $b_\mu a_\lambda \in X_\lambda$; $X_\lambda \cap X_\mu$ содержит не более одного элемента при $\lambda \neq \mu$. X называется ординальным объединением мобов X_λ. Частным случаем ординального объединения мобов является их ординальная сумма (РЖМат, 1956, 237). Компактный моб, являющийся ординальной суммой своих идемпотентов, называется (E)-мобом.

Оказывается, что произвольный компактный е. у. моб S является некоторым специальным ординальным объединением своих подмобов, каждый из которых есть либо связный (E)-моб, либо (Γ)-моб, либо (I)-моб, либо некоторый (полностью описанный в работе) моб, не являющийся е. у. Если $Se = eS$ для любого идемпотента $e \in S$, то S является ординальной суммой (Γ)-мобов, (I)-мобов и связных (E)-мобов. Если компактный е. у. моб связен, то он является ординальной суммой (I)-мобов и связных (E)-мобов.

Л. М. Глускин

9804. К аксиоматике группоидов Брандта. Столт (Zur Axiomatik des Brandtschen Gruppoids. Stolt Bengt), Math. Z., 1958, **70**, № 2, 156—164 (нем.)

Рассматриваются различные системы аксиом, определяющих группоид Брандта (Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, Харьков— Киев, 1937; Джекобсон Н., Теория колец, М., Из-во ин. лит., 1947). Доказывается возможность ослабления двух из первоначально предложенных Брандтом систем аксиом. Л. М. Глускин

9805. Лупы с ослабленным свойством обратимости. Осборн (Loops with the weak inverse property. Osborn J. M.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 20 (англ.)

О некоторой лупе говорят, что она обладает ослабленным свойством обратимости, если для любых трех элементов a, b, c лупы $(ab)c = 1$ тогда и только тогда, когда $a(bc) = 1$. Некоторые из хорошо известных теорем для луп со свойством обратимости имеют место, если предполагать только ослабленное свойство обратимости. Рассматривается связь этих результатов с изучением конфигураций в сетях.

9806. Нормальные эндоморфизмы луп. Брук (Normal endomorphisms of a loop. Bruck R. H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 15 (англ.)

9807. Обобщение системы основных понятий путем ослабления аксиомы идемпотентности. Клейн-Бармен (Verallgemeinerung des Verbandsbegriffs durch Abschwächung des Axioms der Idempotenz. Klein-Barmen Fritz), Math. Z., 1958, **70**, № 1, 38—51 (нем.)

Рассматривается бинарная операция $x \circ y$ на любом множестве M, а также следующие аксиомы: I. Существование операции. II. Ассоциативность. III. Коммутативность. IV. Существование для любого x по крайней мере одного такого элемента y, что $x = x \circ y = y \circ x$. V. Если $x = y \circ y'$ и $y = x \circ x'$, то $x = y$, если $x = y' \circ y$ и $y = x' \circ x$, то $x = y$, (H_1^l) соответственно (H_1^r), существование левой (соответственно правой) единицы, (I) идемпотентность: $x \circ x = x$ для любого x, (U_1^l) соответственно U_1^r, левый (соответственно правый) дистрибутивный законы:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z), \quad (y \circ z) \circ x = (y \circ x) \circ (z \circ x).$$

В § 2 рассматриваются коммутативные полугруппы и определяется отношение $x \vdash y$, означающее $x = x \circ y$. Доказываются различные элементарные свойства этого отношения. Если a — фиксированный элемент, то множество $\{\vdash a\}$ всех $x \vdash a$, если оно не пустое, будет подполугруппой. Аналогичное утверждение имеет место для множества $\{a \vdash\}$, состоящего из всех x, для которых $a \vdash x$. Объединение множеств $\{a \vdash\}$ и $\{\vdash a\}$, если оно не пустое, также подполугруппа.

В §§ 3, 4 рассматриваются ордоиды, т. е. множества M с одной бинарной операцией, удовлетворяющие аксиомам II—V. Понятие голоида (определяется как ордиод, только аксиому IV надо заменить аксиомой H_1^l), изученное автором ранее (Алгебраический реф. сб. М., Изд-во ин. лит., 1948, III, № 649), является частным случаем ордоида.

Для ордоида имеют место те же самые свойства, что и для коммутативных полугрупп, перечисленные выше. Вводится также отношение $x \geqslant y$, означающее, что существует такой элемент y', что $x = y \circ y'$. Относительно этого отношения ордоид M является упорядоченным множеством. Из $x \vdash y$ всегда следует $x \geqslant y$. Элемент c тогда и только тогда является единицей (нулем) ордоида, когда $x \geqslant c$ $(c \geqslant x)$ для любого $x \in M$. Далее строятся примеры ордоидов.

В последних двух параграфах изучается дистрибутивный закон. На множестве R_0^+ всех неотрицательных действительных чисел определяется операция $x \cap y$:

$$x \cap y = \min(x, y) + \varepsilon\,[\max(x, y) - \min(x, y)],$$

где $\varepsilon \in R_0^+$. Эта операция коммутативна, идемпотентна и из $x \geqslant y$, $x' \geqslant y'$ (обычное сравнение действительных чисел) следует, что $x \cap x' \geqslant y \cap y'$. Если $x \geqslant y$ и $x \geqslant z$, то имеет место дистрибутивный закон:

$$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap (x \cap z),$$

а операция сложения в R_0^+ дистрибутивна относительно операции $\cap$. Аналогичные теоремы имеют место для множества R_0^- всех неположительных чисел и для множества всех действительных чисел.

Доказываются также некоторые элементарные свойства для частного случая, когда $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Наконец, доказывается ряд очевидных соотношений между аксиомами II, III, H_1^l, H_1^r, I и обоими дистрибутивными законами. В. Д. Белоусов

9808 К. Введение в теорию конечных групп. Кармайкл (Introduction to the theory of groups of finite order. Carmichael Robert D. New York, Dover Publ., Inc., 1956, xiv, 447 pp.) (англ.)

Фотокопия издания 1937 г. (Ginn, Boston).

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 8, 823.

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

9809. Фундаментальный базис алгебраического поля. Королев И. Д., Уч. зап. Балашовск. гос. пед. ин-та, 1958, **3**, 79—116

На базе элементарной теории алгебраических чисел дается способ построения фундаментального базиса конечного алгебраического расширения рационального поля.

Пусть

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

неприводимое уравнение с целыми рациональными коэффициентами, определяющее числовое поле, ρ — корень уравнения (1), p — простой делитель индекса уравнения (1). Тогда ввиду теоремы Бахмана (Bachmann P., Zahlentheorie, Arithmetik des allgemeinen Zahlkörpers. Bd. 5, Leipzig, 1905) имеем

$$F(x) \equiv \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(x)^{l_i} (\mathrm{mod}\, p^{\mu}),$$

где $\mu > 1$, $\varphi_i(x)$ — неприводимые по $(\mathrm{mod}\, p)$ делители $F(x)$, а среди показателей l_i по крайней мере один > 1.

Строится локальный (частный) базис, соответствующий каждому из простых делителей индекса уравнения (1). Основную роль при этом играют многочлены $\varphi_i(x)$, а именно, элементы локального базиса представляются через $\varphi_i(x)$ в виде произведения их степеней. Из локальных базисов, отличных от степенного, число которых, очевидно, ограничено, составляется затем обычным способом фундаментальный базис поля. Много опечаток. Б. М. Уразбаев

9810. Фундаментальный базис поля алгебраических функций. Королев И. Д., Уч. зап. Балашовск. гос. пед. ин-та, 1958, **3**, 117—142

Переносится без существенных изменений метод построения фундаментального базиса алгебраического числового поля (реф. 9809) на поля алгебраических функций от одного переменного. Б. М. Уразбаев

9811. О вычислении дискриминанта. Королев И. Д., Уч. зап. Балашовск. гос. пед. ин-та, 1958, 3, 143—148

Исходя из определения дискриминанта как результанта, автор дает выражение для дискриминанта поля алгебраических функций над полем рациональных функций от нескольких переменных. Б. М. Уразбаев

9812. Замечания о топологических полях. Шанкс (Remarks on field topologies. Shanks M. E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 24 (англ.)

9813. Об относительно-циклических расширениях нормальных полей. Бейер (Über relativ-zyklische Erweiterungen galoisscher Körper. Beyer Gudrun), J. reine und angew. Math., 1956, **196**, № 1-2, 34—58 (нем.)

Развернутое изложение первой части диссертации автора.

Рассматривается задача погружения нормального поля Ω над подполем Ω_0 с группой Галуа $F=G/H$ в алгебру Галуа K над подполем Ω_0 соответственно с группами Галуа G и H над Ω_0 и Ω. При этом предполагается, что H — циклическая группа, порядок n которой не делится на характеристику поля Ω, и что поле Ω содержит первообразный корень степени n из 1. Эта задача эквивалентна вопросу о разрешимости некоторой системы уравнений

$$W(b,c)=1 \qquad (1)$$

(b, c — системы элементов поля Ω).

Системе (1) можно сопоставить транзитивную группу $\mathfrak{a}$ подстановок классов ассоциированных между собой решений системы, а этой группе соответствует система уравнений

$$V(b)=1,$$

разрешимость которой является необходимым (но не достаточным) условием погружаемости поля Ω в алгебру K (РЖМат, 1955, 1676).

Автор доказывает, что разрешимость некоторой системы уравнений $\hat{V}(b)=1$, соответствующей подгруппе $\hat{\mathfrak{a}}$ группы $\mathfrak{a}$, достаточна для разрешимости задачи погружения, причем если группа H нечетного порядка, то необходимые условия (1), указанные Д. К. Фаддеевым и Хассе, оказываются также и достаточными. С. Д. Берман

9814. Структура и соотношения общих гауссовых сумм в конечных кольцах. I. Лампрехт (Struktur und Relationen allgemeiner Gaußscher Summen in endlichen Ringen. I. Lamprecht Erich), J. reine und angew. Math., 1957, **197**, № 1-2, 1—26 (нем.)

Пусть R — конечное (вообще говоря, некоммутативное) кольцо с 1, $\mathfrak{R}$ — аддитивная группа кольца R, а $\mathfrak{M}_R$ — мультипликативная группа всех не делителей нуля в R. Если $e(\xi)$ — характер группы $\mathfrak{R}$, а $\xi \to \Gamma(\xi)$ — комплексное матричное представление группы $\mathfrak{M}_R$, то выражение $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)=\sum_{\xi\in\mathfrak{M}_R}\Gamma(\xi)$ называется общей гауссовой суммой в кольце R, а в случае, когда Γ — неприводимое представление группы $\mathfrak{M}_R$ — неприводимой гауссовой суммой.

Ранее автором рассматривались гауссовы суммы в коммутативных конечных кольцах (РЖМат, 1953, 1097).

Произвольная гауссова сумма выражается через неприводимые гауссовы суммы. Коэффициенты характеристического полинома матрицы $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)$ являются инвариантами гауссовой суммы, зависящими только от класса эквивалентных между собой представлений, которому принадлежит Γ. Пусть

$$R=R_1+\ldots+R_s \qquad (1)$$

— разложение кольца R в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов. В соответствии с разложением (1) матрица $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)$ представляется в виде кронекеровского произведения индуцированных гауссовых сумм $\tau(\Gamma^{(i)}, e^{(i)}, \mathfrak{M}_{R_i})$, где $\Gamma^{(i)}$ — индуцированное представление подгруппы $\mathfrak{M}_{R_i}\subseteq\mathfrak{M}_R$, а $e^{(i)}$ — индуцированный характер подгруппы $\mathfrak{R}_i\subseteq\mathfrak{R}$, что позволяет инварианты матрицы $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)$ выразить через инварианты индуцированных гауссовых сумм.

Каждому аддитивному характеру e соответствует максимальный правый (соответственно левый) идеал $r_e(I_e)$ кольца R, для элементов ξ которого $e(\xi)=1$, и максимальный двусторонний идеал b_e с таким же свойством. Характер e называется точным (echte), если $r_e=I_e=b_e=0$, и правильным (quasiechte), если $b_e=0$.

Для изучения структуры идеалов кольца R, соответствующих представлению Γ мультипликативной группы $\mathfrak{M}_R$ кольца, вводится дополнительное предположение: (M) в кольце R для каждого правого идеала r и каждого левого идеала I выполняется условие: $m(r)=\sum_{\xi\in\mathfrak{M}_R}\xi r$, $m(I)=\sum_{\xi\in\mathfrak{M}_R} I\xi$, где $m(r)$ ($m(I)$) — максимальный из двусторонних идеалов кольца R, содержащихся в r (соответственно в I).

Кольцо R тогда и только тогда обладает свойством (M), когда оно выполняется для каждой его компоненты R_i ($i=1,\ldots,s$). В частности, это свойство имеет место для колец R, компоненты R_i которых являются такими примарными кольцами, что простые компоненты фактор-колец R_i/n_i (n_i — радикал кольца R_i) не изоморфны полю $GF(2)$.

В дальнейшем предполагается, что R — кольцо с условием (M). Доказывается, что каждому представлению Γ группы $\mathfrak{M}_R$ однозначно соответствует двусторонний идеал $f(\Gamma)$ кольца R, содержащий все левые и правые идеалы кольца, для элементов ξ которых $\Gamma(\xi)=E$ (E — единичная матрица). Идеал $f(\Gamma)$ называется ведущим модулем представления Γ. Ведущий модуль приводимого представления Γ равен пересечению ведущих модулей его неприводимых компонент. Если представление Γ неприводимо и при этом $f(\Gamma)=0$, то представление Γ называется собственным.

Каждому идеалу $\mathfrak{a}\subseteq R$ сопоставляется подгруппа $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ группы $\mathfrak{M}_R$, состоящая из всех обратимых элементов вида $(1+\xi)$, где $\xi\in\mathfrak{a}$.

Если $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал кольца R, то $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{M}_R$, причем $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}_1}\cap\mathfrak{a}_2=\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}_1}\cap\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}_2}$; $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}_2}$; $\mathfrak{M}_{\xi\mathfrak{a}}=\xi\mathfrak{M}_\mathfrak{a}\,\xi^{-1}$ ($\xi\in\mathfrak{M}_R$, $\mathfrak{a}$ — левый идеал). Представление Γ называется совершенным (vollkommen), если для каждого правого идеала r, не содержащегося в двустороннем идеале $f(\Gamma)$, индуцированное представление $\Gamma\downarrow(\mathfrak{M}_r)$ не содержит единичного представления подгруппы $\mathfrak{M}_r$. Представления одновременно собственные и совершенные называются вполне собственными.

Терминология, введенная для аддитивных характеров e и представлений Γ группы $\mathfrak{M}_R$ переносится на соответствующие гауссовы суммы $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)$. С. Д. Берман

9815. Структура и соотношения общих гауссовых сумм в конечных кольцах. II. Лампрехт (Struktur

und Relationen allgemeiner Gaußscher Summen in endlichen Ringen. II. Lamprecht Erich), J. reine und angew. Math., 1957, **197**, № 1-2, 27—48 (нем.)

Обозначения и терминологию см. реф. 9814. Доказаны теоремы:

Если $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)$ — неприводимая гауссова сумма в конечном кольце R со свойством (M), то имеет место формула

$$\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_e \subseteq f(\Gamma) \\ (\mathfrak{M}_{b_e} : 1)\,\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R), & \text{если } b_e \subseteq f(F), \end{cases}$$

где $R_e = R/_{b_e}$, $(\mathfrak{M}_{b_e} : 1)$ — порядок группы $\mathfrak{M}_{b_e}$, а $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_{R_e})$ — правильная гауссова сумма. Отсюда, в частности, вытекает, что вполне собственная правильная, но не точная гауссова сумма $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)$ равна нулю.

Каждая точная вполне собственная гауссова сумма в дуальном кольце R (РЖМат, 1955, 4912) является обратимой матрицей, норма которой по абсолютной величине равна $(\sqrt{(\mathfrak{R}:1)})^{l(\Gamma)}$ ($l(\Gamma)$ — степень представления Γ; $(\mathfrak{R}:1)$ — порядок группы $\mathfrak{R}$), а ее характеристический полином удовлетворяет функциональному уравнению

$$F\left(\frac{(\mathfrak{R}:1)}{t}\ \Gamma, e, \mathfrak{M}_R\right)(-t)^{l(\Gamma)} = |\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)|\ F(t, \Gamma^{-1}, \cdot_{-1}e, \mathfrak{M}_R),$$

где

$$\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e, \mathfrak{M}_R) = [\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)]^*.$$

(Это функциональное уравнение аналогично функциональному уравнению для L-рядов в полях алгебраических функций над конечным полем констант). В качестве следствия вычисляются инварианты неприводимой, точной, но не вполне собственной гауссовой суммы и доказывается, что точная собственная, но не вполне собственная сумма $\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R)$ в дуальном кольце R с радикалом равна нулю.

Пусть Γ и Ψ — два представления группы $\mathfrak{M}_R$.

Обобщенная якобиева сумма $J(\Gamma, \Psi\mathfrak{M}_R)$ определяется равенством

$$J(\Gamma, \Psi, \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \times \Psi(1-\xi)$$

$$(\Psi(\xi) = 0, \text{ если } \xi \overline{\in} \mathfrak{M}_R)$$

(Якобиевы суммы в полях Галуа рассматривались Давенпортом и Хассе, а также Вейлем (Davenport H., Hasse H., J. reine und angew. Math., 1934, **172**, 151—182; Weil A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 487—495). Показано, что если R — дуальное кольцо (с условием (M)), а Γ и Ψ — такие представления группы $\mathfrak{M}_R$, что кронекеровское произведение $[\Gamma \times \Psi]$ вполне собственно, то для каждого точного аддитивного характера e группы $\mathfrak{R}$ выполняется равенство

$$J(\Gamma, \Psi, \mathfrak{M}_R) = \frac{\tau([\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}], e, \mathfrak{M}_R)}{(\mathfrak{R}:1)} [\tau(\Gamma, e, \mathfrak{M}_R) \times \times \tau(\Psi, e, \mathfrak{M}_R)].$$

Норма и собственные числа матрицы $J(\Gamma, \Psi, \mathfrak{M}_R)$ суть целые алгебраические числа. Если при этом представления Γ и Ψ также являются вполне собственными, то норма матрицы $J(\Gamma, \Psi, \mathfrak{M}_R)$ отлична от нуля, а абсолютные величины собственных чисел этой матрицы равны $\sqrt{(\mathfrak{R}:1)}$.

Кроме того, в работе обобщаются результаты Шмидта (Schmidt H. L., J. reine und angew. Math., 1937, **176**, 189—191) о соотношениях между гауссовыми суммами и изучаются индуцированные гауссовы суммы.

В заключение приводятся примеры собственного, но не вполне собственного представления Γ группы $\mathfrak{M}_R$ и вполне собственного представления, степень которого больше 1, и обсуждаются возможности применения построенной автором теории. С. Д. Берман

9816. О некоторых классах алгебр рода 1. Паттерсон (On certain classes of linear algebras of genus one. Patterson E. M.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1957—1958, **A65**, № 1, 63—71 (англ.)

Ранее автор (РЖМат, 1957, 6196, 6197) изучал алгебры рода нуль.

В реферируемой заметке доказаны следующие теоремы:

I. Если A I-алгебра рода 1 над полем F, характеристика которого $\neq 2$ и $\dim A \geqslant 4$, то умножение в этой алгебре задается формулами одного из следующих типов, где θ — симметрическая билинейная форма, c — фиксированный элемент алгебры, а φ и α — линейные функции:

1) $xy = -\theta(y, c)\,x - \theta(x, c)\,y + \theta(x, y)\,c$;

2) $xy = \theta(y, c)\,x + \theta(x, c)\,y + \theta(x, y)\,c$, где $\theta(c, c) = 0$;

3) $xy = \varphi(y)\,x + \varphi(x)\,y + \{\alpha(x)\,\alpha(y) - \varphi(x)\,\varphi(y)\}\,c$

$$(\varphi(c) = 0;\quad \alpha(c) = 1).$$

Обратно, алгебра A над полем F с умножением вида (1), (2) или (3) является I-алгеброй.

II. I-алгебра A размерности $\geqslant 4$ и рода 1 тогда и только тогда является простой, когда умножение в A задается формулой вида (1).

θ — невырожденная симметрическая билинейная форма. Таким образом, существуют I-алгебры рода 1 произвольно большой размерности, в то время как ассоциативные или лиевы алгебры размерности n над полем характеристики нуль имеют род $(n-1)$ или $(n-2)$ (Albert A. A., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 786—788; Kuranishi M., Nagoya Math. J., 1952, **2**, 63—71).

С. Д. Берман

9817. Некоммутативные алгебры порядка n^p. Рошкулец (Algebre de ordinul n^p necomutative. Roşculeţ Marcel N.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR, Sec. mat. şi fiz., 1956, **8**, № 3, 501—508 (рум., рез. русск., франц.)

С помощью гиперкомплексных элементов θ_1, θ_2, θ_3, связанных соотношениями $\theta_1^n = \theta_1^0$, $\theta_2^n = \theta_2^0$, $\theta_3^n = \theta_3^0$, строится алгебра A_{n^3} ранга n^3 с базисными элементами $\theta_1^a\theta_2^b\theta_3^c$, которые перемножаются по правилу $\theta_1^\alpha\,\theta_2^\beta\,\theta_3^\gamma \cdot \theta_1^a\theta_2^b\theta_3^c = p^{\varphi(\alpha, \beta, \gamma; a, b, c)}\theta_1^{\alpha+a}\theta_2^{\beta+b}\theta_3^{\gamma+c}$, где p — корень n-й степени из единицы, а φ — скалярная функция шести целочисленных переменных, равная нулю при $\alpha = \beta = \gamma = a = b = c = 0$. Определяются функциональные соотношения для функции φ таким образом, чтобы алгебра A_{n^3} была коммутативной ассоциативной или чтобы в ней норма произведения двух элементов была равна произведению норм. Наконец, доказывается, что ассоциативная алгебра A, содержащая A_{n^3} в качестве подалгебры, является прямым произведением алгебр $B \times A_{n^3}$, причем A, B и A_{n^3} имеют один и тот же единичный элемент, а любой элемент алгебры B перестановочен с любым элементом из A_{n^3}. Полученные результаты распространяются на алгебры с n^p базисными элементами, построенными аналогичным образом. В. А. Андрунакиевич

9818. Полупростота некоторых групповых алгебр. Вильямайор (On the semisimplicity of group al-

gebras. Villamayor Orlando E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 4, 621—627 (англ.)

Групповое кольцо группы G над кольцом K обозначается через $K(G)$. Автор доказывает полупростоту (в смысле Джекобсона) следующих групповых колец: 1) G — свободная абелева группа, а K — коммутативное кольцо без нильпотентных элементов; 2) G — произвольная абелева группа, а K — полупростая коммутативная алгебра над полем рациональных чисел; 3) фактор-группа G/Z группы G по ее центру Z — локально конечна, а K — полупростая коммутативная алгебра над полем рациональных чисел.

Доказательство основано на гомологических свойствах групповых колец. Некоторые леммы работы обобщают результаты Ауслендера (РЖМат, 1958, 6531).

Пусть G — группа, C — подгруппа, содержащаяся в центре группы G, а K — коммутативное кольцо. Если G/C — локально конечная группа, то равенство $K(C) = \mathrm{w}\cdot\dim K(G) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда уравнение $nx = 0$ имеет в кольце K только нулевое решение, где n — порядок произвольного элемента группы G/C. Из равенства $K(G) = \mathrm{w}\cdot\dim K(G) = 0$ вытекает, что G/C — периодическая группа, а в кольце K уравнение $nx = 0$ имеет только нулевое решение для любого порядка n элемента группы G/C.

С. Д. Берман

9819. Тождества и образующие матричных колец. Амицур (Identities and generators of matrix rings. Amitsur S. A.), Bull. Res. Council Israel, 1955, A5, № 1, 5—10 (англ.)

Пусть F — бесконечное поле, F_n — кольцо всех квадратных матриц над F порядка n, (x_l) — множество некоммутативных неизвестных над F и $F[x]$ — свободная алгебра, порожденная множеством (x_l) над F. Если A алгебра над F, то многочлен $p[x] = p[x_1,\ldots,x_k] \in F[x]$ называется тождеством в A, если соотношение $p[x] = 0$ справедливо при любой замене x_l элементами из A. Доказывается, что если B — произвольная матрица в F_{n+1} и $A_1,\ldots,A_r$ — множество образующих в F_{n+1}, то в F_n существует такое тождество $p[x_1,\ldots,x_r] = 0$, что $p[A_1,\ldots,A_r] = B$. Конечные множества матриц $A_l = (a_{\lambda\mu}^{(l)})$, $l = 1, 2,\ldots,r$; $\lambda, \mu = 1, 2,\ldots,n$, рассматриваются как точки некоторого векторного пространства V размерности rn^2. Доказывается, что множество всех матриц $(A_1,\ldots,A_r)$ из F_n, которые не порождают матричное кольцо F_n, образует алгебраическое подмногообразие W_n в V. Устанавливается существование такого конечного множества многочленов $f_1[x_1,\ldots,x_r],\ldots,f_k(x_1,\ldots,x_r)$, что необходимое и достаточное условие, чтобы произвольное множество r матриц $A_1,\ldots,A_r$ из F_n порождало F_n, состоит в том, чтобы по меньшей мере один из элементов $f_l[A_1,\ldots,A_r]$ был бы отличен от нуля. Доказывается, что каждая центральная алгебра с делением конечного ранга порождается двумя сопряженными элементами. В. А. Андрунакиевич

9820. О ξ-кольцах. Уцуми (On ξ rings. Utumi Yuzo), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 2, 63—66 (англ.)

ξ-кольцом автор называет кольцо, у которого для каждого элемента x существует такой элемент $f(x)$, что $x = x^2 f(x)$ является центральным. Через $A \circ B$, где A, B — два подмножества произвольного кольца R, обозначается двусторонний идеал, порожденный всеми аддитивными коммутаторами $xy - yx$, $x \in A$, $y \in B$. Доказывается, что если $a \circ R \subseteq (a^2) \circ R$ для всякого $a \in R$ ((a^2) — двусторонний идеал, порожденный элементом a^2), то любой нильпотентный элемент в R будет центральным. Отсюда вытекает, что в ξ-кольце любой нильпотентный и идемпотентный элементы будут центральными. Доказывается также, что в ξ-кольце всякий ненулевой правый идеал содержит ненулевой центральный элемент.

Основная теорема: В любом ξ-кольце R, множество N всех нильпотентных элементов образует двусторонний идеал, лежащий в центре; фактор-кольцо R/N есть подпрямая сумма тел и коммутативных колец. Кольцо называется I-кольцом, если каждый односторонний идеал, не являющийся ниль-идеалом, содержит ненулевой идемпотент. FI-кольцо — это кольцо, всякий гомоморфный образ которого есть I-кольцо. Доказывается, что FI-кольцо R будет ξ-кольцом тогда и только тогда, когда всякий нильпотентный элемент в R-центральный; в этом случае фактор-кольцо $\overline{R} = R/N$ будет строго регулярным, т. е. для каждого $\overline{a} \in \overline{R}$ существует такой $\overline{x} \in \overline{R}$, что $\overline{a} = \overline{a}^2\overline{x}$. Если FI-кольцо R является ξ-кольцом, то R есть подпрямая сумма FI-колец, у которых каждый делитель нуля — центральный.

В. А. Андрунакиевич

9821. Заметка о регулярных кольцах. Ковач (A note on regular rings. Kovács László), Publs math., 1956, 4, № 3-4, 465—468 (англ.)

Доказывается, что кольцо R является регулярным в смысле Неймана кольцом тогда и только тогда, когда $IL = I \cap L$, где I, L — произвольные соответственно правый и левый идеалы в R. Кроме того, доказывается, что кольцо R без ненулевых нильпотентных идеалов является регулярным тогда и только тогда, когда любой квазиидеал в R (т. е. такой подмодуль M в R, что $RM \cap MR \subseteq M$) идемпотентен. Отсюда получается следующая теорема о разложении: Кольцо R является дискретной прямой суммой тел тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию минимальности для главных двусторонних идеалов и всякий его идеал идемпотентен. А. Сулиньский

9822. О Λ-инъективности. (Задача 6.3.19). **Хаттори** Сугаку, 1957, 8, № 4, 208—209 (японск.)

Пусть Λ — некоторое (некоммутативное) кольцо с единицей и A, B — левые Λ-модули.

Пусть „тензорное произведение" $A \otimes B$ над кольцом Λ определено как билинейная форма и $\lambda a \otimes b = a \otimes \lambda b$ ($\lambda \in \Lambda$ $a \in A$, $b \in B$) есть левый Λ-модуль. Построением противоречащего примера показывается, что предложение (1): Если A, B Λ-инъективны, то $A \otimes B$ Λ-инъективно,— не верно. Подобно, $A \otimes B$ с Λ-проективными A, B не обязано быть Λ-проективным. Отмечено также, что (1) имеет место в случае, если Λ — (коммутативная) область целостности. T. Nakayama

9823. Инъективные модули над нётеровыми кольцами. Матлис (Injective modules over Noetherian rings. Matlis Eben), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 3, 511—528 (англ.)

В начале рассматриваются унитарные левые модули над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей. Доказывается, что сумма двух инъективных подмодулей произвольного R-модуля тогда и только тогда всегда является инъективным подмодулем, когда кольцо R наследственно слева. В качестве следствия этого утверждения отмечается, что если кольцо R наследственно слева и нетёрево слева, то в произвольном R-модуле M существует единственный максимальный инъективный подмодуль, содержащий все инъективные подмодули модуля M.

В работе Экмана и Шопфа (РЖМат, 1954, 2870) показано, что для любого R-модуля M существует единственный с точностью до изоморфизма минимальный инъективный R-модуль $E(M)$, содержащий модуль M. Модуль $E(M)$ является существенным расширением модуля M (т. е. если в модуле $E(M)$ для некоторого его подмодуля T имеет место соотношение $M \cap T = 0$, то $T = 0$) и называется инъективной оболочкой модуля

M. Приводятся некоторые свойства инъективной оболочки. В частности, инъективная оболочка прямой суммы конечного числа модулей изоморфна прямой сумме инъективных оболочек слагаемых; если кольцо R нётерово слева, то утверждение остается справедливым и без предположения о конечности числа слагаемых. Инъективная оболочка $E(M)$ модуля M тогда и только тогда неразложима в прямую сумму (такие модули называются неразложимыми модулями), когда она является инъективной оболочкой каждого ненулевого подмодуля модуля M. Каждый неразложимый инъективный модуль E можно представить в виде $E \cong E(R/J)$, где J — некоторый левый идеал кольца R, который нельзя представить в виде пересечения конечного числа строго больших левых идеалов (такие идеалы называются неприводимыми). Если кольцо R нётерово слева, то каждый инъективный R-модуль M разлагается в прямую сумму неразложимых инъективных модулей и такое разложение является единственным с точностью до автоморфизмов модуля M.

Далее предполагается, что R является коммутативным нетёровым кольцом. В этом случае устанавливается взаимно однозначное соответствие $P \leftrightarrow E(R/P)$ между всеми простыми идеалами P кольца R и всеми неразложимыми инъективными R-модулями. Далее $E(R/Q) \cong E(R/P)$ тогда и только тогда, когда Q является неприводимым P-примарным идеалом кольца R. Приводится некоторое изучение неразложимого инъективного модуля $E = E(R/P)$. В модуле E строится возрастающая цепочка подмодулей $A_l = \{x \in E \mid P^l x = 0\}$, объединение которой совпадает с E. Фактор-модули A_{l+1}/A_l являются конечными векторными пространствами над полем частных K области целостности R/P, причем $A_1 \cong K$; указывается размерность векторного пространства A_{l+1}/A_l. Если идеал P максимальный, то все подмодули A_l являются R-модулями с конечным числом образующих и, следовательно, $E = E(R/P)$ является R-модулем со счетным числом образующих. Кольцо R тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности, когда каждый неразложимый инъективный R-модуль имеет конечное число образующих. Произвольный неразложимый инъективный R-модуль ($E = E(R/P)$ естественно определяется как $\overline{R}_P$-модуль (где R_P — пополнение локального кольца отношений R_P); при этом $E = E(\overline{R}_P/P)$, и сохраняется та же самая возрастающая цепочка подмодулей A_l. Описывается кольцо $H = \mathrm{Hom}_R(E, E)$ всех R-эндоморфизмов модуля E; каждый такой эндоморфизм задается умножением модуля E на один и только один элемент кольца $\overline{R}_P$.

Прямая сумма n экземпляров некоторого R-модуля M обозначается M^n. Если S — некоторое подмножество из R^n и B — некоторое подмножество из M^n, то через S' обозначается множество всех таких n-строк $(x_i) \in M^n$, что $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ для любой n-строки $(r_i) \in S$, а через B' обозначается множество всех таких n-строк $(r_i) \in R^n$, что $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ для любой n-строки $(x_i) \in B$. Доказывается следующая теорема: Если R — коммутативное нётерово полное локальное кольцо с максимальным идеалом P и $E = E(R/P)$, то для любого подмодуля S R-модуля R^n и для любого подмодуля B R-модуля E^n:

1) $S' \cong \mathrm{Hom}_R(R^n/S, E)$; $E^n/S' \cong \mathrm{Hom}_R(S, E)$ и $S'' = S$,

2) $B' \cong \mathrm{Hom}_R(E^n/B, E)$, $R^n/B' \cong \mathrm{Hom}_R(B, E)$ и $B'' = B$

и, следовательно, операция задает дуальный изоморфизм между структурами подмодулей модулей R^n и E^n. Отсюда, в частности, вытекает, что модуль E^n удовлетворяет условию минимальности.

Е. Г. Шульгейфер

9824. Проективные модули. Капланский (Projective modules. Kaplansky Irving), Ann. Math., 1958, **68**, № 2, 372—377 (англ.)

Доказывается, что любое прямое слагаемое R-модуля, разлагающегося в прямую сумму модулей счетного происхождения, также обладает этим свойством. Этот результат прилагается к доказательству следующих предложений: 1) Всякое прямое слагаемое абелевой группы без кручения, разлагающейся в прямую сумму групп ранга 1, также обладает этим свойством. Куликов (Укр. матем. ж., 1952, **4**, 230—275 и 347—372) получил этот результат для счетных прямых слагаемых, проблема поставлена Бером (Baer R., Duke Math. J., 1937, **3**, 68—122); 2) Всякий левый проективный модуль (РЖМат, 1956, 6427К) над локальным кольцом свободен; 3) Проективный модуль над коммутативным полунаследственным кольцом (кольцо называется полунаследственным слева, если любой его левый идеал конечного происхождения является проективным) является прямой суммой модулей, каждый из которых изоморфен идеалу конечного происхождения основного кольца; 4) Левый проективный модуль над регулярным кольцом является прямой суммой модулей, изоморфных главным левым идеалам основного кольца

Л. А. Скорняков

9825. Представление некоторых топологических алгебр. I. Касахара (Representation of some topological algebras. I. Kasahara Shouro), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 6, 355—360 (англ.)

Условимся обозначать через $L(X)$ алгебру всех линейных преобразований векторного пространства X. Если E — хаусдорфова топологическая алгебра, удовлетворяющая условиям: 1) Существует ненулевой элемент $a \in E$ такой, что для любого $u \in E$ найдется число λ, удовлетворяющее соотношение $aua = \lambda a$; 2) Для любых ненулевых элементов u и v из E найдется такой элемент $w \in E$, что $uwv \neq 0$, то существует такое локально выпуклое хаусдорфово векторное пространство X, что E алгебраически изоморфно подалгебре алгебры $L(X)$, содержащей все конечные линейные преобразования (преобразование $\sigma \in L(X)$ называется конечным, если пространство σX имеет конечный ранг). Описывается топологизация алгебры $L(X)$, при которой этот изоморфизм оказывается непрерывным. Если E локально выпукла, то указываются условия, при которых вышеуказанный изоморфизм будет гомеоморфизмом (правда, топологизация алгебры $L(X)$ осуществляется по-другому). Попутно доказывается ряд теорем об ограниченных множествах в топологической алгебре.

А. В. Михалев, Л. А. Скорняков

9826. Компактные кольца с открытым радикалом. Джанс (Compact rings with open radical. Jans James P.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 573—577 (англ.)

Пусть R — компактное (ассоциативное) кольцо с открытым в R радикалом N (в смысле Джейкобсона). Кольцо R допускает веддербарновское разложение в полупрямую сумму $R = N + S$ в том и только в том случае, если единица конечного полупростого кольца R/N имеет одинаковый аддитивный порядок по крайней мере с одним из своих прообразов при естественном отображении $R \to R/N$. Имеет место также соответствующий аналог теоремы Мальцева.

Если в компактном вполне несвязном кольце квадрат радикала открыт, то степени радикала образуют полную систему окрестностей нуля кольца.

Строится свободное компактное кольцо F такое, что любое компактное кольцо R с единицей, у которого имеется веддербарновское разложение, а квадрат ради-

кала открыт в R, является гомоморфным образом кольца F. В. М. Глушков

9827. Некоторые вопросы теории колец, близких к ассоциативным. Ширшов А. И., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 6, 3—20

Изложение обзорного доклада автора на Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре 1958 г. Доказательства, как правило, отсутствуют. Содержание: § 1. Введение; 2. Альтернативные кольца; § 3. J-кольца; § 4. Кольца Ли; § 5. Некоторые более широкие классы колец. В статье отображены почти все направления в исследованиях, относящихся к рассматриваемому вопросу. Полностью вне поля зрения автора остались алгебры конечного ранга. Л. А. Скорняков

9828. О соотношении Якоби для символа скобки. Белман (On the Jacobi relation for the bracket symbol. Bellman Richard), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 8, Part 1, 605—606 (англ.)

9829. Нётерова теория колец, полугрупп и модулей в некоммутативном случае. II. Лесьёр, Краузо (Théorie Noetherienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif. II. Lesieur L., Croisot R.), Math. Ann., 1958, **134**, № 5, 458—476 (франц.)

Часть I см. Colloque d'Algèbre Supérieure Bruxelles, décembre, 1956, 79—121.

Пусть U—кольцо или полугруппа с нулем, удовлетворяющие условию минимальности или максимальности для левых идеалов. Коммутативность U и наличие в U единицы не предполагается. Пусть A — левый идеал U, $R(A)$ — множество всех таких элементов $a\in U$, что для любого элемента $b\in U\setminus A$ найдется элемент $x\in A\cap(UbUb)$, удовлетворяющий условию $aUxUax\subseteq A$. $R(A)$ является двусторонним идеалом U и называется терциарным радикалом идеала A. Если U коммутативна, то $R(A)$ совпадает с множеством всех элементов $a\in U$ таких, что $a^n\in A$ при каком-либо натуральном n. Левый идеал $T\subseteq U$ называется терциарным, если любые элементы $a, b\in U$ удовлетворяют условию: $aUbUab\subseteq A$, $b\in U\setminus A\to a\in R(T)$. Если U коммутативна, любой ее левый терциарный идеал является примарным. Если T — левый терциарный идеал U, то $R(T)$ является простым идеалом U (т. е. из $aUb\subseteq R(T)$ следует $a\in R(T)$ или $b\in R(T)$).

Всякий левый идеал $A\subseteq U$ представим в виде несократимого пересечения $\bigcap_{i=1}^{n} T_i$ левых терциарных идеалов T_i, причем $R(A)=\bigcap_{i=1}^{n} R(T_i)$. Имеет место и теорема единственности несократимого представления.

Аналогичная теория построена для двусторонних идеалов полугруппы или кольца U с условием минимальности или максимальности для двусторонних идеалов (см. также РЖМат, 1958, 5552) и для подмодулей левого E-модуля, где E—некоммутативное кольцо с условием максимальности для двусторонних идеалов.

Пусть теперь U удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов, A, B — подмножества U, $A\cdot B$ — множество всех таких $x\in U$, что $xB\subseteq A$. Если B — левый идеал U, то $A\cdot B$ является двусторонним идеалом U, и называется левым частным A на B; если $B\neq A$, то частное $A\cdot B$ называется собственным.

Если T — левый терциарный идеал U, а B — произвольное подмножество U такое, что $UB\subseteq T$, то $T\cdot B$ также является левым терциарным идеалом U, причем $R(T\cdot B)=R(T)$. Для того чтобы левый идеал $T\subseteq U$ был терциарным, необходимо и достаточно, чтобы $R(T)$ был единственным простым собственным частным идеала T. Доказан ряд других теорем о полугруппах и кольцах с условием минимальности для левых идеалов. Приведены примеры. Л. М. Глускин

9830. Нётерова теория колец, полугрупп и модулей в некоммутативном случае. III. О понятии радикала. Лесьёр, Краузо (Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif. III: Sur la notion de radical. Lesieur L., Croisot R.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 2, 75—93 (франц.)

Развитая в части II работы (реф. 9829) теория обобщается на абстрактные структуры. Пусть T — квазицелая структурно-упорядоченная полугруппа (РЖМат, 1957, 7670) с единицей ε, L — структура с единицей u. Пусть, кроме того, для любых $\alpha\in T$, $x\in L$ определено произведение $\alpha x\in T$, причем любые элементы $\alpha, \beta\in T, x, y\in L$ удовлетворяют условиям $\alpha(x\cup y)=\alpha x\cup\alpha y$, $(\alpha\cup\beta)x=\alpha x\cup\beta x$, $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$, $\varepsilon x\leqslant x$. Предполагается, что для любых $x, y\in L$, $\alpha\in T$ существуют наибольшие элементы $\xi\in T$ (левое частное $x\cdot' y$) и $z\in L$ (правое частное $x\cdot'\alpha$) такие, что $\xi y\leqslant x$, $\alpha z\leqslant x$; множество всех левых (правых) частных всякого элемента $x\in L$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Левое частное $x\cdot' y$ называется собственным, если $y\leqslant x$.

Обобщенный радикал произвольного элемента $x\in L$ вводится различными способами. Обозначим через $T_1(x)$ множество всех таких элементов $\alpha\in T$, что $\alpha^n\leqslant x\cdot' u$; через $T_2(x)$ — множество всех элементов $\alpha\in T$, для которых при некоторых $\lambda_i\in T$ и натуральных k_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ выполняется условие $\alpha^{k_0}\lambda_1\alpha^{k_1}\lambda_2\ldots\lambda_n\alpha^{k_n}\leqslant x\cdot' u, x\cdot'\lambda_i=x$. Пусть далее $T_3(x)$—множество всех таких элементов $\alpha\in T$, что из $(x\cdot'\alpha)\cap c=x$ следует $c=x$; $T_4(x)$ — множество всех элементов $\alpha\in T$, для которых из $(x\cdot'\alpha)\cap(x\cdot'\beta)=x$ следует $x\cdot'\beta=x$; $T_5(x)$ — множество всех $\alpha\in T$, удовлетворяющих условию: если $\alpha c\leqslant x$, то существует элемент $\beta\in T$ такой, что $\beta c\leqslant x$ и $\alpha\beta c\leqslant x$. Каждое из множеств $T_j(x)$ $(j=1, 2, 3, 4, 5)$ содержит наибольший элемент $\rho_j(x)$ (существование $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ доказано в первой части работы) $\rho_1(x)$ называется примарным радикалом элемента x, $\rho_2(x)$—сегондарным радикалом x, $\rho_3(x)$ — терциарным радикалом x, $\rho_4(x)$ — примальным радикалом x, $\rho_5(x)=\rho'(x)$ — унирезидуальным радикалом x.

Доказан ряд свойств обобщенных радикалов. В частности, если $x=\bigcap_{i=1}^{n} x_i$ $(x_i\in L)$, то $\rho_1(x)=\bigcap\rho_1(x_i)$, $\rho'(x)\geqslant\bigcap\rho'(x_i)$. Если разложение для x несократимо, то $\rho_2(x)\leqslant\bigcap\rho_2(x_i)$, $\rho_4(x)\geqslant\bigcap\rho_4(x_i)$. Если структура L полудедекиндова, то $\rho_3(x)\geqslant\bigcap\rho_3(x_i)$. Для любого элемента $x\in L$ справедливо соотношение

$$x\cdot' u\leqslant\rho_1(x)\leqslant\rho_2(x)\leqslant\rho'(x)\leqslant\rho_3(x)\leqslant\rho_4(x).$$

Элемент $x\in L$ называется терциарным, если из $x\cdot'\alpha>x$ следует $\alpha\leqslant\rho_3(x)$. Радикал $\rho_3(x)$ терциарного элемента x является простым элементом структуры T (РЖМат, 1957, 7670) и называется простым элементом, ассоциированным с x. Аналогично определяются примарные, сегондарные, унирезидуальные и примальные элементы из L и ассоциированные с ними простые элементы из T. В терминах левых частных найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы элемент $x\in L$ был примарным, сегондарным и т. д. Между указанными понятиями существуют следующие импликации: x является примарным → сегондарным → унирезидуальным → терциарным → примальным.

Если полугруппа T коммутативна, то понятия примарных, сегондарных и унирезидуальных элементов совпадают. Доказан ряд теорем о разложении и единственности разложения элементов $x\in L$ в виде пересечения примарных, терциарных и других элементов, а также об ассоциированных с ними простых элементах. Полученные результаты использованы для разложения

идеалов колец и полугрупп в виде пересечения специальных идеалов. Л. М. Глускин

9831. Понятие существенного частного. Лесьёр, Круазо (La notion de résiduel essentiel. Lesieur Léonce, Croisot Robert), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 3, 357—360 (франц.)

Элемент $\pi \in T$ (все определения см. в реф. 9330) называется существенным (псевдосущественным) частным элемента $x \in L$, если существует элемент $y \in L$ такой, что $y > x\,(y^{\cdot}.x)$, $x^{\cdot}.y = \pi$ и из $x < z \leqslant y$ $(z \leqslant y,$ $z \leqslant x)$ следует $x^{\cdot}.z = x^{\cdot}.y$.

Всякое максимальное собственное левое частное элемента $x \in L$ является существенным. Всякое частное $x^{\cdot}.z$ при $z > x$ является существенным. Если L удовлетворяет ослабленному условию минимальности (РЖМат, 1957, 7670), то любое существенное левое частное элемента x имеет вид $x^{\cdot}.z$, где $z > x$. Всякое псевдосущественное (в том числе существенное) частное элемента x является простым элементом T. Любой отличный от u элемент $x \in L$ обладает не более чем конечным числом псевдосущественных частных. Если структура L полудедекиндова, то всякое псевдосущественное частное элемента $x \in L$ является существенным. Л. М. Глускин

9832. Характеристическое свойство терциарных идеалов. Лесьёр, Круазо (Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires. Lesieur Léonce, Croisot Robert), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 4, 517—520 (франц.)

Для того чтобы отличный от u элемент $q \in L$ (реф. 9830, 9831) был терциарным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал единственным существенным частным. Всякое существенное частное элемента $x = \bigcap_{i=1}^{n} x_i$ является существенным частным одного из элементов x_i. Если $x = \bigcap_{i=1}^{n} x_i$ — несократимое разложение элемента x в пересечение терциарных элементов, то существенные частные элемента x совпадают с простыми элементами, ассоциированными с элементами x_i. Л. М. Глускин

9833. Нётерова теория идеалов в кольцах и полугруппах, не обязательно коммутативных. Круазо (Théorie noethérienne des idéaux dans les anneaux et les demi-groupes non nécessairement commutatifs. Croisot R.), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1956—1957, 10. Paris, 1958, 22-1—22-9 (франц.)

Результаты опубликованы в другой работе автора и Лесьёра (реф. 9829). Л. М. Глускин

9834. Характеризация дистрибутивных структур. Волк (A characterization of distributive lattices. Wolk E. S.), Tohoku Math. J., 1958, **10**, № 1, 32—36 (англ.)

Пусть P — частично упорядоченное множество (ч. у. м.) с 0 и 1. Обозначим через ψ — отображение множества всех подмножеств множества P в себя, подчиненное следующим требованиям: 1) $A \subset \psi(A)$; 2) Если $A \subset B$, то $\psi(A) \subset \psi(B)$; 3) $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$; 4) Если $x \in P$, то $\psi(x) = \{y;\ y \geqslant x\}$. Множество $A \subset P$ называется ψ-идеалом, если $\psi(A) = A$. Отображение ψ называется индуктивным, если объединение всякой цепи ψ-идеалов является ψ-идеалом. Если ψ-идеал A отличен от P и не может быть представлен как пересечение ψ-идеалов, отличных от A, то он называется вполне неприводимым. Положим $S^* = \{y;\ y \geqslant x$ для всех $x \in S\}$ и $S^+ = \{y;\ y \leqslant x$ для всех $x \in S\}$. Множество S называется простым [антипростым], если из $x, y \in P$ и $\{x, y\}^* \subset S$ [$\{x, y\}^+ \subset S$] вытекает $x \in S$ или $y \in S$. Ч. у. м. является дистрибутивной структурой тогда и только тогда, когда существует индуктивное отображение ψ, допускающее такое множество $\mathfrak{M}$ ψ-идеалов, что $U_{M \in \mathfrak{M}} M$ просто, а $U_{M \in \mathfrak{M}} (P \setminus M)$ — антипросто. Для того чтобы ч. у. м. P было булевой алгеброй, необходимо и достаточно чтобы: 1. Для каждого $x \in P$ существует такой $x' \in P$, что $\{x, x'\}^* = 1$, а $\{x, x'\}^+ = 0,2$. Объединение любого множества λ-идеалов из P, где $\lambda(A) = U_{F \in \mathfrak{N}} F^{**}$, $\mathfrak{N}$ — множество всех конечных подмножеств множества A, просто (можно показать, что λ является индуктивным отображением ψ). Л. А. Скорняков

9835. Об условии цепей Жордана—Дедекинда. Гретцер, Шмидт (On the Jordan—Dedekind chain condition. Grätzer G., Schmidt E. T.), Acta scient. math., 1957, **18**, № 1-2, 52—56 (англ.)

Пусть L — структура, удовлетворяющая условию (α), если y покрывает $x \cap y$, то $\cdot xUy$ покрывает x $(x, y \in L)$, и C_1 и C_2 — две конечные цепи структуры L с одинаковыми концами. Тогда C_1 и C_2 обладают уплотнениями, имеющими одинаковую длину.

Цепь C называется строго максимальной, если а) C не является собственной подцепью другой цепи с теми же концами, б) каждый гомоморфный образ C обладает свойством а).

Доказывается, что если L — дистрибутивная структура, то все строго максимальные цепи между фиксированными конечными элементами имеют одинаковую длину. А. Х. Лившиц

9836. О структурах с дополнениями. Сас (On complemented lattices. Szász G.), Acta scient. math., 1958, **19**, № 1-2, 77—81 (англ.)

Из результатов ранее опубликованной работы автора (РЖМат, 1958, 6552) выводится, что структура L с относительными дополнениями, обладающая 0 и 1, дедекиндова тогда и только тогда, когда она не содержит недедекиндовой пятиэлементной подструктуры, у которой наибольший и наименьший элементы совпадают с 1 и 0 структуры L соответственно. Пусть структура L с дополнениями, или обладает относительными дополнениями, или же атомна. Тогда L оказывается дедекиндовой в том и только в том случае, когда для любых $a, b, c \in L$ из $a + c = 1$, $b \cdot c = a \cdot c = 0$ следует, что $a \leqslant b$. В заключение устанавливается, что структура L с единственными дополнениями является структурой с относительными дополнениями тогда и только тогда, когда L дистрибутивна.

В. В. Пашенков, Л. А. Скорняков

9837. Теория и приложения структур. Биркгоф (Teoria y aplicaciones de las redes. Birkhoff Garrett), Rev. mat., 1958, № 4, 1—13 (исп.)

Обзорная популярная статья, посвященная началам теории структур и ее приложений. Наряду с двумя определениями структуры даны определения различных типов структур (полумодулярные, модулярные, дистрибутивные, с дополнениями, булевы алгебры, двойственные). Указаны приложения структур к теории групп (теорема Жордана — Гёльдера и теорема Ремака — Шмидта), к универсальным алгебрам, к геометрии (проективной), к теории множеств, к топологии упорядоченности (теорема о существовании неподвижной точки у монотонной (изотонной) функции, определенной на полной структуре) и к математической логике. Ю. И. Соркин

9838. Теория идеалов на структуре. Гретцер, Шмидт (On ideal theory for lattices. Grätzer G., Schmidt E. T.), Acta scient. math., 1958, **19**, № 1-2, 82—92 (англ.)

Доказывается, что идеал I является пересечением простых идеалов тогда и только тогда, когда I — ядро некоторого гомоморфизма. Дистрибутивность структуры L оказывается эквивалентной каждому из следующих условий: 1) каждый идеал является пересечением простых идеалов; 2) каждый главный идеал является пере-

сечением простых идеалов; 3) каждый идеал является ядром некоторого гомоморфизма; 4) каждый главный идеал является ядром некоторого гомоморфизма. Отсюда вытекает, что структура L, удовлетворяющая условию обрыва возрастающих цепей, дистрибутивна тогда и только тогда, когда главный идеал $I = \{x;\ x \leqslant a\}$ прост для любого неразложимого на пересечения элемента $a \in L$. Если в структуре L с относительными дополнениями существует элемент a, для которого идеалы $\{x;\ x \leqslant a\}$ и $\{x;\ x \geqslant a\}$ являются простыми и образуют классы конгруэнтных элементов при некотором гомоморфизме, то L дистрибутивна. Идеал I структуры L назовем несократимым, если он не может быть представлен в виде пересечения отличных от него идеалов. Для дистрибутивной структуры эквивалентны следующие условия: 1) L — структура с относительными дополнениями; 2) если некоторый идеал из L представляется в виде пересечения конечного числа простых идеалов, то его представление в виде пересечения несократимых идеалов единственно; 3) каждый простой идеал является максимальным; 4) каждый дуальный простой идеал является максимальным. Заметим, что 2) всегда следует из 1). Отметим также, что представление любого элемента дистрибутивной структуры в виде произведения элементов, не разложимых в произведение, единственно. Для произвольной структуры L оказываются эквивалентными следующие условия: 1) каждый идеал единственным способом представляется в виде пересечения несократимых простых идеалов; 2) свойство 1) для главных идеалов; 3) L — дистрибутивная структура с относительными дополнениями; 4) L — дистрибутивная структура с единственными дополнениями, в которой каждый замкнутый интервал имеет конечную длину. Доказывается, что отношения конгруэнтности можно поставить во взаимно однозначное соответствие идеалам тогда и только тогда, когда L — структура с относительными дополнениями, обладающая нулем. Этим решается 73 проблема Биркгофа („Теория структур" М., 1952). Если a — элемент дистрибутивной структуры L, $Q \neq 0, 1$, S — подструктура структуры L, $a \in S$, то существуют такие простой идеал P и простой дуальный идеал Q, что S принадлежит теоретико-множественному объединению P и Q, а $a \in PUQ$.

В. В. Пашенков, Л. А. Скорняков

9839. Две теоремы о топологических структурах. Уолес (Two theorems on topological lattices. Wallace Alexander Doniphan), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 2, 1239—1241 (англ.)

Топологической структурой называется хаусдорфово пространство L с двумя непрерывными функциями $\wedge : L \times L \to L$ и $\vee : L \times L \to L$, удовлетворяющими обычным условиям для структурных операций. Множество A называется выпуклым, если из $x, y \in A$ и $x \leqslant a \leqslant y$ следует $a \in A$. Доказываются следующие две теоремы.

1. Пусть L — связная топологическая структура и A — такое выпуклое множество, что $L \setminus A$ несвязно. Тогда множество $L \setminus A$ является объединением связных отделимых множеств $(A \wedge L) \setminus A$ и $(A \vee L) \setminus A$, которые открыты (замкнуты), если множество A замкнуто (открыто). Если, кроме того, пространство L компактно, то множество A связное, если оно открыто или замкнуто.

2. Пусть L — компактная связная метризуемая топологическая структура. Тогда L является циклической цепью, каждый циклический элемент которой есть выпуклая подструктура. Если L топологически содержится в плоскости, то каждый собственный циклический элемент структуры L является двухэлементным и L обладает свойством существования неподвижной точки.

А. Х. Лившиц

9840. Свободные структуры, порожденные множеством цепей. Ролф (The free lattice generated by a set of chains. Rolf Howard L.), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 3, 585—595 (англ.)

Следуя конструкции Дилуорса (Dilworth R. P., Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **57**, 123—154), рассматриваются свободные структуры, порожденные частично упорядоченными множествами, являющимися теоретико-множественными объединениями непересекающихся цепей. Подробно изучены строения указанных структур (выписаны диаграммы) для случая двух цепей, когда обе цепи содержат по два элемента и когда одна цепь состоит из четырех элементов, а вторая — из одного. В обоих случаях структуры бесконечны, что было впервые установлено референтом (Матем. сб., 1952, **30**, № 3, 677—694). Рассмотрен также вопрос о вложении структур указанного типа в свободную структуру с тремя свободными образующими и обратный вопрос о вложении свободной структуры с тремя свободными образующими в вышеуказанные структуры. Ю. И. Соркин

9841. Изоморфизм между веблен-веддербарновыми плоскостями Маршала Холла. Панелла (Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall. Panella Gianfranco), Atti Acad. naz. Lincei. Rend Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **25**, № 3-4, 172—173 (итал.)

Если F — поле, $f(x) = x^2 - bx - c$ — полином, неприводимый над F, то полагая $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $(x_1, x_2)(y_1, 0) = (x_1 y_1, x_2 y_1)$, $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (y_1 x_1 - f(y_1) y_2^{-1} x_2, y_2 x_1 + (b - y_1) x_2)$, где $y_2 \neq 0$, мы превратим множество $F \times F$ в веблен-веддербарново тело Холла $J(F, b, c)$. Выясняется, когда плоскости, построенные над телами Холла $J(F, b, c)$ и $J(F, b', c')$ изоморфны. Пусть $f'(x) = x^2 - b'x - c'$, Φ и Φ' расширения поля F с помощью полиномов f и f' соответственно, Q — квадрика в трехмерном пространстве S над F, определяемая уравнением $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$, K и K' — прямолинейные эллиптические конгруэнции в S с осями $x_3 - k_i x_2 = x_4 - k_i x_2 = 0$, $i = 1, 2$, $k_i \in \Phi$, $f(k_i) = 0$ и $x_3 - k_i' x_1 = x_4 - k_i' x_2 = 0$, $i = 1, 2$, $k_i' \in \Phi'$, $f'(k_i') = 0$ соответственно. Если характеристика поля $F \neq 2$, то искомым условием является существование коллинеации пространства S, оставляющей на месте Q и переводящей K в K'. Кроме того, указывается, что при том же ограничении на характеристику группа автоморфизмов плоскости над $J(F, b, c)$ совпадает с группой коллинеаций в четырехмерном пространстве над F, оставляющих на месте некоторую прямолинейную эллиптическую конгруэнцию, расположенную в некотором трехмерном подпространстве, и линейчатую квадрику, содержащую эту конгруэнцию. Доказательства не приведены.

Л. А. Скорняков

9842 К. Фильтры и идеалы. Монтейру (Filtros e ideais. I. 2e ed. Monteiro Antonio Aniceto. Rio de Janeiro, Inst. mat. pura e aplic. Conselho nac.—pesquisas, 1955, 57 p.—(Mimeogr.) (порт.)

Второе издание книги, содержащей введение в теорию частично упорядоченных множеств, структур, идеалов и дуальных идеалов (фильтров) в структурах. Среди рассмотренных вопросов можно упомянуть σ-структуры, полные структуры, операции замыкания, лемму Цорна, простые идеалы, ультрафильтры, эквивалентность базисов фильтров.

O. Frink

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 937.

См. также: 9619, 9680, 9706, 9714, 9715, 9742, 9956, 10182, 10396, 10489, 10490.

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

9843. Теоремы о раскрашивании карт, связанные с формулой Хевуда. I, II. Дирак (Map colour theorems related to the Heawood colour formula. I. II. Dirac G. A.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 460—471; 1957, **32**, № 4, 436—455 (англ.)

Согласно результату Хевуда (Heawood P. J., Quart J. Math., 1890, **24**, 332), хроматическое число графа, расположенного на поверхности со связностью h, не превосходит величины $H_h = \left[3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{24h-23}\right]$. В реферируемых работах исследуется строение графов с хроматическим числом $k = H_h - 1$ и $k = H_h - 2$ на поверхности связности h; для ряда таких графов устанавливается возможность превращения k-хроматического графа посредством стягивания ребер в граф, содержащий полный m-вершинный подграф (такая возможность для всех графов при $k=m=5$ влекла бы за собой положительное решение проблемы четырех красок). Доказательства даны для случаев $k = m = H_h - 1$, $h \geqslant 5$; $k = m = H_h - 2$, $h \geqslant 13$, $h \neq 15, 19$; $k = m + 1 = H_h - 2$, $h = 5, 8, 11, 15, 19$; $k = m + 1 = H_h - 1$, $h = 4$.

Примечание референта. В отличие от реферата в работах условия теорем сформулированы на языке карт, а не графов. А. А. Зыков

9844. О числе различных графов между данной парой граф—подграф. Харари (On the number of dissimilar graphs between a given graph-subgraph pair. Harary Frank), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 513—516 (англ.)

Рассматриваются графы, у которых каждая пара вершин соединена не более чем одним ребром. Два подграфа данного графа называются подобными, если существует автоморфизм графа, переводящий один из подграфов в другой. Покрывающим подграфом данного графа G называется его подграф с тем же множеством вершин. Граф G считается заключенным между какими-либо двумя графами, если один из них есть подграф графа G и G есть подграф другого графа.

Используя метод Пойа (Pólya G., Acta math., 1937, **68**, 145—254), состоящий в построении производящей функции, связанной с группой автоморфизмов графа, производится подсчет числа различных неподобных графов, заключенных между данным графом G и его покрывающим подграфом H.

Автор показывает, как многие решавшиеся им раньше проблемы могут быть сведены к этому общему случаю. Например, вопрос о числе различных подобных подграфов данного графа есть частный случай сформулированной выше задачи, когда H есть покрывающий подграф без ребер. Аналогично, вопрос о числе различных неподобных надграфов данного графа есть другой частный случай той же задачи, когда H — покрывающий подграф с максимальным числом ребер. К этой же задаче сводятся и некоторые проблемы о числе различных хроматических графов. В работе рассмотрены два примера, иллюстрирующие результат. Ф. Я. Ветухновский

9845. Одна проблема теории графов. Ньюман (A problem in graph theory. Newman Donald J.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 8, Part 1, 611 (англ.)

Конструктивно доказывается, что граф, каждая из $2n$ вершин которого имеет степень не меньше, чем n, содержит $2n$-угольник. Другими словами, если каждый из группы в $2n$ человек имеет среди этой группы не менее n друзей, то всю группу можно посадить за круглый стол так, чтобы любые двое, сидящие рядом, были друзьями. Указан также пример графа, степень каждой из $2n$ вершин которого равна $(n-1)$ и который, однако, не содержит $2n$-угольника. Ф. Я. Ветухновский

9846. Число деревьев в графе. Уэйнберг (Number of trees in a graph. Weinberg Louis). Proc. I. R. E., 1958, **46**, № 12, 1954—1955 (англ.)

Как показали Лантьери (Lantieri J., Ann. télécommuns, 1950, Mai, 5, 204—208) и Трент (РЖМат, 1955, 5680), число всех деревьев, содержащихся в данном n-вершинном графе, равно значению некоторого симметричного определителя порядка $n-1$, легко находимого по матрице инциденций графа. Указан простой путь вычисления этого определителя. А. А. Зыков

9847. Об одномерных комплексах. Улчар (О једнодимензионалним комплексима. Улчар Јоже), Годишен зб. Филоз. фак. Ун-т Скопје. Природно-матем. одд., 1956 (1958), **9**, 3—13 (сербо-хорв.; рез. нем.)

Пусть K — одномерный комплекс в R^3, т. е. $K = S_1 \cup S_0 \cup S_0'$, где S_1 — совокупность попарно непересекающихся отрезков, S_0 — множество их концов и S_0' — произвольное множество точек из $R^3 \setminus \cup S_1'$ мощности, меньшей $\aleph_0$ (см. также РЖМат, 1957, 5920). В множестве всех подмножеств из K определим M_K максимально возможной мощности и так, чтобы всякий элемент K был инцидентным с одним элементом $X \in M_K$. Автор доказывает, что элементы множества M_{K_ν} (индекс ν у K обозначает его число связности) состоят из множеств $M_1 \cup M_0$; M_1 — множество всех одномерных граней некоторого подкомплекса K_ν' той же связности $\nu \geqslant 1$, M_0 — множество всех вершин комплекса $K_\nu \setminus K_\nu'$. В случае если S_0' — пустое множество и K без контуров, то M_{K_ν} состоит из одного однородного элемента. Г. Курепа

9848. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы трехмерное многообразие было гомеоморфно сфере. Бинг (Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be S^3. Bing R. H.), Ann. Math., 1958, **68**, № 1, 17—37 (англ.)

Доказываются следующие теоремы:

1. Связное замкнутое трехмерное многообразие M тогда и только тогда гомеоморфно сфере S^3, когда каждая простая замкнутая кривая в M содержится в гомеоморфном кубу подмножестве многообразия M.

2. Связное открытое подмножество U евклидова пространства E^3 гомеоморфно пространству E^3 в том и только в том случае, когда: а) граница множества U связна и б) всякая полиэдральная замкнутая кривая в U содержится в гомеоморфном кубу подмножестве множества U. Как известно, в теореме 2 нельзя заменить условие б) требованием односвязности множества U. Вопрос о существовании замкнутого односвязного трехмерного многообразия, не гомеоморфного сфере (проблема Пуанкаре), остается открытым. А. С. Шварц

9849. Четырехмерные ограниченные ориентируемые локально евклидовы пространства. Башев В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 6, 17—29

Согласно Хопфу, задача о нахождении всех ограниченных локально евклидовых пространств $\mathfrak{M}^n$ эквивалентна задаче о перечислении всех неизоморфных дискретных групп G движений пространства R^n с огра-

ниченной фундаментальной областью и элементами $g \neq e$ без неподвижных точек. Если $\mathfrak{M}^n$ ориентируемо, то движения из G должны, кроме того, сохранять ориентацию R^n. Основываясь на этой теоретико-групповой интерпретации геометрической задачи и используя соответствующие результаты Цассенхауза, Бибербаха и др., автор показывает, что для $n=4$ существует 27 ориентируемых ограниченных локально евклидовых пространств. Известно (Hantzshe, Math. Ann., 1934, **110**, 593), что для $n=3$ их имеется 6 (а также 4 неориентируемых пространства), а для $n=2$ — одно (тор). В работе приведена таблица чисел Бетти найденных пространств $\mathfrak{M}_i^4$, где указано также разделение соответствующих пространств на классы комплексных и вещественных многообразий. А. И. Кострикин

9850. Свойства локальной компактности топологических пространств. Нолле (A propos de la locale compacité des espaces topologiques. Nollet Louis), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1959, **28**, № 1-2, 5—13 (франц.)

Рассматриваются два следующих локальных свойства топологического пространства: а) семейство множеств $F=\{P_\alpha\}$ пространства X локально π, если всякая окрестность точки $x \in X$ содержит окрестность $W \in x$ такую, что семейство $F_W=\{W \cap P_\alpha\}$ будет π; б) то же, только если у точки x существует окрестность, в которой выполнено π. Они не всегда совпадают. Эти свойства эквивалентны по отношению к свойству локальной конечности и не эквивалентны по отношению к свойству локальной компактности. Исследуется класс пространств, для которых эти свойства эквивалентны. Б. Т. Левшенко

9851. Из паракомпактности пространства B не вытекает паракомпактность B^I Фейделл (B paracompact does not imply B^I paracompact. Fadell Edward), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 6, 839—840 (англ.)

Если X — множество действительных чисел с топологией полуоткрытых интервалов и $C(X)$ — конус над X, т. е. в $C \times I$ отождествлены все точки $X \times \{1\}$, $I=[0, 1]$, то пространство путей $C(X)^I$ с открыто компактной топологией не паракомпактно в то время, как пространство $C(X)$ — паракомпактно. Б. Т. Левшенко

9852. О локальных и равномерно локальных топологических свойствах. Дугунджи, Майкл (On local and uniformly local topological properties. Dugundji James, Michael Ernest), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 2, 304—307 (англ.)

1. Отношение частичной упорядоченности α, определенное на подмножествах пространства X, называется собственным (proper), если а) $W \alpha V$ влечет $W \subset V$; б) $W \subset V$ и $V \alpha R$ влечет $W \alpha R$; в) $W \alpha V$ и $V \subset R$ влечет $W \alpha R$. X имеет локальный тип α, если для любой точки x и любой ее окрестности V существует окрестность W такая, что $W \alpha V$. Метрическое пространство X имеет равномерно локальный тип α, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $O_\delta x \alpha O_\varepsilon x$ для всех $x \in X$. Приводятся примеры локальных свойств, которые можно задать посредством введения какой-либо собственной упорядоченности, среди которых локальная связность и локальная стягиваемость. Основная теорема: Если на подмножествах метризуемого пространства X задано собственное упорядочивание α и X имеет локальный тип α, то существует совместимая с топологией метрика ρ, в которой X имеет равномерно локальный тип α.

2. Упорядочивание ξ (открытых) покрытий пространства X называется собственным, если а) $W \xi V$ влечет $W > V$ (т. е. W вписано в V); б) $W > V$ и $V \xi R$ влечет $W \xi R$; в) $W \xi V$ и $V > R$ влечет $W \xi R$. X имеет тип ξ, если для любого покрытия V существует W, $W \xi V$. Метрическое пространство X имеет равномерный тип ξ, если для любого ε-покрытия V существует δ-покрытие W, $W \xi V$. Собственное упорядочивание α подмножеств X порождает собственное упорядочивание $\bar{\alpha}$ покрытий: $W \bar{\alpha} V$ означает $W \alpha V$ для всех $W \subset W$ и некоторых $V \subset V$. X имеет (равномерно) локальный тип α тогда и только тогда, когда X имеет (равномерный) тип $\bar{\alpha}$. Относительно покрытий имеет место результат, аналогичный основной теореме. Е. Г. Скляренко

9853. Неархимедова мера в пространстве действительных последовательностей. Коэн (A non-archimedian measure in the space of real sequences. Cohen L. W.), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 1, 9—24 (англ.)

В множестве S всевозможных последовательностей действительных чисел, рассматриваемом как аддитивная группа относительно покоординатного сложения, вводится интервальная топология, задаваемая следующим отношением порядка: $x=\{x_i\} > 0$, если для некоторого n $x_i=0$ при $i<n$, $x_n>0$. На некотором кольце R подмножеств из S определяется конечно-аддитивная инвариантная относительно сдвигов в группе S мера, принимающая неотрицательные значения на S; множества с положительной мерой образуют в S топологическую базу и порождают кольцо R.

Е. Г. Скляренко

9854. Характеристика дуги. Ковальский (Kennzeichnung von Bogen. Kowalsky H.-J.), Fundam. math., 1958, **46**, № 1, 103—107 (нем.)

Доказывается теорема: Топологическое пространство E тогда и только тогда гомеоморфно замкнутому, открытому или полуоткрытому интервалу, если оно обладает следующими свойствами: 1) E — сепарабельное T_1-пространство, содержащее, по крайней мере, две точки. 2) E — связно и локально связно. 3) Каковы бы ни были три непустые связные собственные подмножества пространства E, всегда существуют такие два, сумма которых не покрывают E. Топологическое пространство E является дугой, если, кроме свойств 1) и 2), оно обладает еще следующим свойством. 3'). В E существуют две точки a и b, между которыми оно неприводимо связно. А. С. Пархоменко

9855. Заметка о нульмерных компактных множествах. Рейхбах (A note on 0-dimensional compact sets. Reichbach M.), Bull. Res. Council Israel, 1958, **F7**, № 3, 117—122 (англ.)

Рассматривается один из случаев задачи о продолжении гомеоморфизма. Пусть A — некоторый нульмерный компакт, и $A=CUB$ — разложение этого компакта, даваемое теоремой Кантора — Бендиксона, где C — совершенное множество, а B — не более чем счетное. Пусть P — произвольное совершенное нульмерное множество, лежащее в некотором метрическом пространстве S. Необходимым и достаточным условием того, чтобы каждый гомеоморфизм $h(C)=P$ имел продолжение в гомеоморфизм $h^+(A)=P \cup h^+(B)$ между A и множеством $P \cup h^+(B) \subset S$ является следующее условие: для каждой точки $x \in P$, каждого топологического типа τ счетного компакта и каждой пары положительных чисел ε и ε' существует в $S \setminus P$ счетный компакт E типа τ, причем $\delta(E) < \varepsilon$ и $S(x, E) < \varepsilon'$. Этим условиям, очевидно, будут удовлетворять евклидовы пространства, гильбертовы пространства и т. д. Но этим условиям не удовлетворяют, например, нульмерные компакты. М. Я. Антоновский

9856. О компонентах пространства непрерывных отображений локально компактного пространства в окрестностный ретракт. Куратовский (Sur les composantes de l'espace des transformations d'un espace

localement compact en un rétracte de voisinage. Kuratowski K.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 9, 565—571 (франц.; рез. русск.)

Доказывается, что пространство этих компонент гомеоморфно замкнутому подмножеству пространства всех иррациональных чисел. Если отображаемое пространство есть компакт, то пространство компонент дискретно. Если пространство X есть пространство целых положительных чисел, а пространство Y состоит из двух точек, то пространство компонент гомеоморфно канторову дисконтинууму. А. С. Пархоменко

9857. Геометрия непрерывных отображений. О числе обратных образов при отображениях плоской многосвязной области. Долькер (Geometria delle trasformazioni continue. Sul numero delle imagini inverse nelle trasformazioni di un dominio piano pluriconnesso. Dolcher Mario. Ann. Univ. Ferrara, 1954—1955, Sez. 7, **4**, 1—7) (итал.)

Относительно предыдущих работ автора см. РЖМат, 1956, 269, 7935. Пусть R будет плоским диском с r отверстиями, γ_0 — внешней, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — его внутренними границами. Пусть Φ — отображение $\overline{R}$ в E_2. Обозначим через A' одну из компонент $E_2 \setminus \sum \Phi\gamma_i$ и через n_i степень отображения $\Phi\gamma_i$. Пусть r' будет числом нулевых степеней отображений. В предположении $|n_0| \geqslant \sum_{i>0} |n_i|$, автор показывает, что число точек в $\Phi^{-1}(P')$, где P' — произвольное множество из k точек в A', не может быть менее, чем $(|n_0| - \sum_{i>0} |n_i|) \times (k - r - r')$.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 992.

P. A. Smith

9858. О многозначных отображениях топологических пространств. Пономарев В., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 2, 268—271

Все определения и обозначения как в РЖМат, 1959 2474. Отображение f пространства X на Y называется X-бикомпактным (Y-бикомпактным), если все $f'y$ (все $\widetilde{f}x$)-бикомпактны. Совершенными называются отображения, бикомпактные и непрерывные в обе стороны. Отображение $\widetilde{f}$ пространства $\widetilde{X}$ на $\widetilde{Y}$ называется двусторонним продолжением отображения f пространства X на Y, $X \subseteq \widetilde{X}$, $Y \subseteq \widetilde{Y}$, если $\widetilde{f}x = fx$ для $x \in X$, $\widetilde{f}'$ непрерывно и $\widetilde{f}'y = f'y$ для $y \in Y$. Отображение f пространств близости X на Y называется сильно равномерным, если большой прообраз одного из двух далеких в Y множеств далек от малого прообраза другого.

Исследуется вопрос о продолжении отображений на бикомпактные расширения. Основные результаты следующие: 1) Всякое Y-бикомпактное замкнутое отображение T_1-пространства X на T_1-пространство Y продолжается в замкнутое отображение волмэновского расширения ωX на ωY. Совершенные отображения и только они допускают двустороннее продолжение в отображение ωX на ωY; при этом, если одно из пространств есть G_δ в ω-расширении, то то же можно сказать и о другом. 2) Сильно равномерные Y-бикомпактные отображения f пространств близости и только они продолжаются в сильно непрерывные отображения $\widetilde{f}$ соответствующих бикомпактных расширений; если X и Y — нормальны, то сильно непрерывные Y-бикомпактные отображения продолжаются в сильно непрерывные отображения пространства βX на βY.

Затем рассматриваются отображения пространств, удовлетворяющих тем или иным требованиям „компактности". Следующие теоремы являются существенным обобщением результатов Ханаи (РЖМат, 1958, 7577): а) если f — совершенное отображение X на Y и одно из пространств локально бикомпактно, то и другое локально бикомпактно; б) если f — замкнутое Y-бикомпактное отображение нормальных пространств X на Y и X — счетнопаракомпактно, то Y обладает тем же свойством; в) если f — открытое совершенное отображение паракомпактного (сильно паракомпактного) X на хаусдорфово Y, то Y — паракомпактно (сильно паракомпактно); дополнительно потребовав хаусдорфовость X и сильную непрерывность f и f', это предложение можно высказать в симметричной форме.

Для псевдокомпактных пространств получено следующее: Если образ псевдокомпактного пространства X при сильно непрерывном Y-бикомпактном отображении вполне регулярен, то он псевдокомпактен; если же он лежит в паракомпактном пространстве, то его замыкание бикомпакт. π-бикомпактными для краткости называются периферически-бикомпактные пространства. Если f-совершенное и в обе стороны открытое отображение T_1-пространств X на Y, каждое $f'y$ — связно и состоит более, чем из одной точки, а X — π-бикомпактно, то Y (а значит и X) локально бикомпактно; (что приводит к новому результату и в применении к однозначным отображениям). При замкнутом Y-бикомпактном отображении f π-бикомпактного пространства X, при котором все $f'y$ — связны и имеют бикомпактную границу, образ π-бикомпактен во всякой своей точке однозначности (в частности, если f—однозначно, образ π-бикомпактен).

Последний результат относится к отображениям локально связных пространств: Пусть f — замкнутое сильно непрерывное X-бикомпактное отображение локально связного T_1-пространства X на Y (Y — T_1-пространство), причем множество всевозможных fx плотно в пространстве к Y (РЖМат, 1959, 2474); тогда Y локально связно. Е. Г. Скляренко

9859. Неподвижные точки, неподвижные множества и M-ретракты. Стротер (Fixed points, fixed sets, and M-retracts. Strother Wayman), Duke Math. J., 1955, **22**, № 4, 551—556 (англ.)

Продолжение заметки автора см. РЖМат, 1956, 7236.

Пусть $F: X \to Y$ — непрерывное многозначное отображение, где X и Y — бикомпакты, тогда при помощи формулы $f(A) = \cup \{F(a)/a \in A\}$ определено однозначное отображение $f: S(X) \to S(Y)$, называемое уплотненным продолжением отображения F (A — замкнутое подмножество бикомпакта X).

Каждый бикомпакт X обладает относительно многозначных отображений свойством неподвижного множества, т. е. при каждом непрерывном многозначном отображении F бикомпакта X в себя найдется такое множество $A \subset X$, что $F(A) = A$. (Доказывается при помощи итераций отображения F).

Доказывается, что: Если X — бикомпакт, то $S(X)$ обладает свойством неподвижной точки относительно уплотненных продолжений; для связного компакта X следующие свойства эквивалентны: 1) X — пространство Пеано (т. е. X — непрерывный образ отрезка); 2) X — есть $MCAR^*$. Бикомпакт X называется $MCAR^*$, если для всякого хаусдорфова пространства Y, его замкнутого подмножества Y_0 и непрерывного многозначного отображения $F: Y_0 \to X$ существует непрерывное продолжение $F_1: Y \to X$; 3) X — гомеоморфно некоторому M-ретракту (многозначному ретракту) тихоновского куба.

Примечание референта. Автор определяет уплотненное продолжение отображений в менее жестких предположениях относительно F, X и Y, но такое определение представляется референту не корректным, корректность определения, приведенного в реферате и используемого по существу в работе, автором доказана. С. С. Рышков

9860. Ретракты окрестностных ретрактов. Стротер, Уорд (Retracts from neighborhood retracts. Strother W. L., Ward L. E., Jr), Duke Math. J., 1958, 25, № 1, 11—14 (англ.)

Пространство называется CAR^* ($CANR^*$), если для любого нормального хаусдорфова пространства X, замкнутого подмножества $X_0 \subset X$ и отображения $f: X_0 \to Y$ существует непрерывное продолжение $f_1: X \to Y$ ($f_1: O \to Y$, где $O \subset X$ — некоторая окрестность множества X_0). Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть X — связное метрическое пространство. Если X есть $CANR^*$, то $S(X)$ есть CAR^* (РЖМат, 1958, 6570) или то же самое — ретракт тихоновского куба.

Теорема 2. Если X есть $CANR^*$, то и $S(X)$ есть $CANR^*$.

Теорема 3. Если X есть связный $CANR^*$, то $S(X)$ обладает свойством неподвижной точки. С. С. Рышков

9861. Алгебраическая простота некоторых групп гомеоморфизмов. Андерсон (The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms. Anderson R. D.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 4, 955—963 (англ.)

Пусть X — хаусдорфово пространство, G — группа его гомеоморфизмов; G^0 — подгруппа элементов для которой существует открытое подмножество, на которое этот элемент действует тождественно, тогда $Cl(k)$ будет обозначать замыкание подмножества k. $F(k)$ — границу, $I(k)$ — открытое ядро и $\overline{k}$ — дополнение в пространстве X. k называется носителем гомеоморфизма g, если на $\overline{k}$ g совпадает с тождественным гомеоморфизмом. Пространство X вместе с семейством его замкнутых подмножеств, удовлетворяющих условиям: 1) элементы K-гомеоморфные друг другу собственные подмножества $k \in K$; 2) для каждого открытого подмножества U пространства X существует k такой, что $k \subset U$; 3) для $k \in K$, $Cl(\overline{k}) \in K$ называется K-строением. Счетное множество K' попарно не пересекающихся элементов называется β-последовательностью, если объединение элементов K' содержится в некотором элементе $I(K)$ и $Cl(K') - K'$ состоит только из одной точки p из X такой, что любая ее окрестность содержит все, кроме конечного числа, элементы K'. Пространство X обладает (G, K)-движением, если для любого $k \in K$ существует β-последовательность $\{k_i\}$ такая, что $\bigcup k_i \subset k$ и существуют элементы $\rho_1, \rho_2 \in G$, имеющие носители k. При этом выполнено: 1) $\rho_1(k_i) = k_{i+1}$ для каждого $-\infty < i < +\infty$, 2) $\rho_2 \mid k_0 = \rho_1 \mid k_0$, $\rho_2 \mid k_{2i} = \rho_1^{-2} \mid k_{2i}$, $\rho_2 \mid k_{2i-1} = \rho_1^2 \mid k_{2i-1}$ для $i > 0$, 3) если для каждого i, $\varphi_i \in G^0$ гомеоморфизмы с носителями в k_i, то существует $\varphi \in G$ с носителем в $\bigcup k_i$ такой, что $\varphi \mid k_i = \varphi_i \mid k_i$ и 4) для каждого $k' \in K$ существует $\eta \in G$ такой, что $\eta(k') = K$. Пространство X называется (G, K) однородным, если 1) X обладает (G, K) движением; 2) для любого $k \in K$ и $g \in G$, для которого $g(k) \cap k = \varnothing$, а $g(k) \cup k \neq X$, существуют $k' \in K$ и $\lambda \in G^0$ такие, что k' есть носитель λ и $\lambda \mid k = g \mid k$, 3) для любых $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \hat{K}$ с $k_1 \cap k_2 = k_3 \cap k_4 = \varnothing$ и $k_1 \cup k_2 \neq X \neq K_3 \cup K_4$ существует $\mu \in G$ такой, что $\mu(K_1) = K_3$ и $\mu(K_2) = K_4$, где $\hat{K}$ означает семейство образов элементов k при всех гомеоморфизмах из G. Основная теорема: Пусть X (G, K) — однородно, тогда для $h, g \in G$, $h \neq l$, каждое g есть произведение шести элементов группы G, сопряженных с h или h^{-1} и, следовательно, G — проста. Из этой теоремы следует, что группы всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сфер S^1 и S^2, а также универсальной плоской кривой просты. Группы всех гомеоморфизмов канторова совершенного множества, универсальной кривой, множества рациональных точек, множества иррациональных точек на прямой просты.

Найдены условия, когда группа G гомеоморфизмов пространства, обладающего (G, K)-движением, содержит несчетное число различных сопряженных классов. Группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов n-мерной сферы удовлетворяет этим условиям.

В. И. Кузьминов

9862. Проективные топологические пространства. Гливсон (Projective topological spaces. Gleason Andrew M.), Illinois J. Math., 1958, 2, № 4A, 482—489 (англ.)

Допустимое пространство X называется проективным, если для любых допустимых пространств Y и Z и любых допустимых отображений $\varphi: X \to Z$ и $f: Y \to Z$ существует допустимое отображение $\psi: X \to Y$ такое, что $\varphi = f \circ \psi$.

Допустимое пространство X называется инъективным, если для допустимого отображения $f: Y \to X$ и взаимно однозначного допустимого отображения $i: Y \to Z$ существует допустимое отображение $g: Z \to X$ такое, что $f = g \circ i$.

Пространство X называется экстремально несвязным, если замыкание любого открытого подмножества вновь открыто. Оказывается, что любое проективное пространство экстремально несвязно, если категория топологических пространств и непрерывных отображений удовлетворяет условиям: 1. Если A допустимо и $\{p, q\}$ — пространство, состоящее из двух точек, то пространство $A \times \{p, q\}$ и проекция $p: A \times \{p, q\} \to A$ допустимы. 2. Замкнутое подпространство B допустимого пространства A и вложение $i: B \subset A$ допустимы.

Так как в экстремально несвязном пространстве любая счетная сходящаяся последовательность стационируется, то в категории пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности и свойствам 1 и 2, любое проективное пространство дискретно.

Автор доказывает, что в категории бикомпактных пространств и непрерывных отображений класс проективных пространств совпадает с классом экстремально-несвязных пространств. Используя результаты Стона о булевых алгебрах подмножеств бикомпакта X, доказана теорема: Каждый бикомпакт X есть непрерывный образ экстремально-несвязного пространства.

Сформулированы двойственные результаты: Для категории коммутативных C^*-алгебр, двойственной к категории бикомпактов и непрерывных отображений, класс инъективных алгебр совпадает с классом алгебр непрерывных функций на экстремально-несвязных пространствах. Так как категория булевых алгебр и гомоморфизмов двойственна к категории вполне несвязных пространств и при этой двойственности полным булевым алгебрам соответствуют экстремально-несвязные пространства, то в категории булевых алгебр и гомоморфизмов класс инъективных алгебр совпадает с классом полных алгебр.

В. И. Кузьминов

9863. Алгебраические локальные инварианты топологических пространств. Ху Сы-цзэнь (Algebraic local invariants of topological spaces. Hu Sze-Tsen), Compositio math. (1958), **13**, № 3, 173—218 (англ.)

Рассматривается пространство $T(X, x_0)$ путей $\sigma(t)$ заданного пространства X с фиксированной начальной точкой x_0 таких, что из $\sigma(t) = \sigma(0)$ следует $t = 0$. Теории гомологий, когомологий (Стинрод, Эйленберг, Основания алгебраической топологии, Гос. изд-во физ.-матем. лит., М., 1958, гл. 7) и гомотопий пространства $T(X, x_0)$ объявляются теориями локальных гомологий, когомологий и гомотопий пространства X в точке x_0. Локальные отображения пары (X, A) в пару (Y, B) порождают гомоморфизмы указанных групп и вместе с ними удовлетворяют аксиомам Эйленберга — Стинрода (кроме, возможно, аксиомы вырезания). Если x_0 является конической точкой пары (X, A), то локальные

гомологические и когомологические группы совпадают с группами Ван-Кампена, в частности, для триангулируемых пространств, с группами границы звезды вершины. В качестве приложения подробно изучается гомотопическая классификация локальных отображений, доказываются локальные формы теорем Пуанкаре — Боля и Хопфа. В заключение построенные локальные инварианты применяются к теории топологических полугрупп. А. А. Мальцев

9864. Алгебра когомологии локально компактного и паракомпактного пространства. Гань Дань-янь (Cohomology of locally compact and paracompact space. Gann Dan-yen), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1958 **2**, № 1, 11—14 (англ.)

Пусть X — локально компактное пространство, C — его точное перекрытие (couverture fine) и $\mathfrak{B}$ — правильный пучок коэффициентов над X (Leray J., J. math. pure et appl., 1950, **29**, 1—139).

Лере показал, что алгебра гомологии комплекса $C\circ\mathfrak{B}$ (комплекса с компактными носителями) является инвариантом пространства X и пучка $\mathfrak{B}$ (алгебра когомологии пространства X с коэффициентами в пучке $\mathfrak{B}$). Автор, накладывая на пространство X еще ограничение паракомпактности и связности, строит алгебру когомологии с замкнутыми носителями следующим образом: 1) ослабляет условия, накладываемые на $\mathfrak{B}$, так что $C\circ\mathfrak{B}$ вообще не является комплексом с компактными носителями; в частности, $\mathfrak{B}$ можно выбрать так, чтобы $C\circ\mathfrak{B}=C$; 2) для $C\circ\mathfrak{B}$ строит естественное расширение $\overline{C\circ\mathfrak{B}}$; 3) доказывает, что алгебра гомологии $H(\overline{C\circ\mathfrak{B}})$ комплекса $\overline{C\circ\mathfrak{B}}$ является инвариантом пространства X и пучка коэффициентов $\mathfrak{B}$, в частности $H(\overline{C})$ является инвариантом пространства X. Н. А. Берикашвили

9865. Гомологии с нулевой группой коэффициентов. Джеймс, Уайтхед (Homology with zero coefficients. James I. M., Whitehead J. H. C.), Quart J. Math., 1958, **9**, № 36, 317—320 (англ.)

Указывается ряд примеров нетривиальных гомологических теорий в смысле Эйленберга — Стинрода (Основания алгебраической топологии, Физматгиз, 1958), имеющих нулевую группу коэффициентов (т. е. таких, что нульмерная группа гомологий точки тривиальна). Утверждается, что одна из таких теорий естественно возникает в проблеме „стягивания" отображения. Приведем простейший пример нетривиальной гомологической теории с нулевой группой коэффициентов. Если X — топологическое пространство, $A\subset X$, обозначим через $T(X, A)$ сильную прямую сумму целочисленных сингулярных групп гомологий всех размерностей пары (X, A), а через $S(X, A)$ — слабую прямую сумму тех же групп. Введя обозначение $H_n(X, A)=T(X, A)/S(X, A)$ для любого n и определив соответствующим образом граничный гомоморфизм $H_n(X, A)\to H_{n-1}(A)$, нетрудно убедиться, что группы $H_n(X, A)$ удовлетворяют всем аксиомам Эйленберга — Стинрода и равны нулю в случае, когда X — конечномерный полиэдр. А. С. Шварц

9866. Образы и прообразы аналитических пучков. Грауэрт, Реммерт (Bilder und Urbilder analytischer Garben. Grauert Hans, Remmert Reinhold), Ann. Math., 1958, **68**, № 2, 393—443 (нем.)

Подробное изложение ранее анонсированных результатов (РЖМат, 1958, 5615). В начале работы дается изложение теории когомологий произвольных (не обязательно паракомпактных) пространств с коэффициентами в пучках, использующее резольвенты, которые состоят из вялых пучков (пучок на пространстве X называется вялым (welk), если всякое его сечение над произвольным открытым множеством в X можно продолжить в сечение над всем X). А. Л. Онищик

9867. О некоторых вопросах гомологической алгебры. Гротендик (Sur quelques points d'algèbre homologique. Grothendieck Alexandre), Tohoku Math. J., 1957, **9**, № 2, 119—183; № 3, 185—221 (франц.)

Пусть C — категория, $\mathrm{Hom}(A, B)$ — множество всех морфизмов объекта $A\in C$ в $B\in C$. Предположим, что 1) в множествах $\mathrm{Hom}(A, B)$ определены структуры абелевых групп таким образом, что естественное умножение морфизмов является билинейной операцией; 2) для любых объектов $A_1A_2\in C$ существует $A\in C$ и морфизмы u_i: $A\to A_i$ $(i=1,2)$ такие, что для любого $B\in C$ естественный гомоморфизм $\mathrm{Hom}(B, A)\to \mathrm{Hom}(B, A_1)\times\mathrm{Hom}(B, A_2)$ является изоморфизмом ($A=A_1\times A_2$ называется прямым произведением объектов A_1 и A_2); 3) существует такой объект A, что тождественный морфизм является нулем в $\mathrm{Hom}(A, A)$ ($A=0$ называется нулевым объектом); 4) для всякого $u\in\mathrm{Hom}(A, B)$ существует мономорфизм $i: A'\to A$ такой, что $v\in\mathrm{Hom}(C, A)$ удовлетворяет условию $uv=0$ тогда и только тогда, когда $v=iv'$, где $v'\in\mathrm{Hom}(C, A')$. ($A'=\mathrm{Ker}\,u$ называется ядром u); 5) для всякого $u\in\mathrm{Hom}(A, B)$ существует эпиморфизм $p: B\to B'$ такой, что $v\in\mathrm{Hom}(B, C)$ удовлетворяет условию $vu=0$ тогда и только тогда, когда $v=v'p$, где $v'\in\mathrm{Hom}(B', C)$ ($B'=\mathrm{Coker}\,u$ называется коядром u); 6) естественный морфизм $\mathrm{Coim}\,u\to\mathrm{Im}\,u$, где $\mathrm{Coim}\,u=\mathrm{Coker}\,i$, $\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Ker}\,p$, является изоморфизмом. Такая категория называется абелевой. На абелевы категории распространяется техника коммутативных диаграмм, точных и спектральных последовательностей, существующая в теории групп и модулей (Cartan H., Eilenberg S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956). Функтор F из абелевой категории C в другую абелеву категорию называется аддитивным, если для $u, v\in\mathrm{Hom}(A, B)$ $(A, B\in C)$ имеем $F(u+v)=F(u)+F(v)$. Пусть задана система (T^i) $(-\infty<i<\infty)$-аддитивных ковариантных функторов из C в C' и пусть для каждой точной последовательности $0\to A'\to A\to A''\to 0$ в C заданы морфизмы $\partial: T^i(A'')\to T^{i+1}(A')$. Автор говорит, что задан когомологический функтор, если выполнены следующие условия: морфизмы ∂, отвечающие двум точным последовательностям, связанным между собой гомоморфизмом, естественным образом согласованы; возникающая последовательность морфизмов $\ldots T^i(A')\to T^i(A)\to T^i(A'')\to T^{i+1}(A')\to\ldots$ является точной. Объект $M\in C$ называется инъективным, если функтор $A\to\mathrm{Hom}(A, M)$ из C в категорию абелевых групп является точным. Пусть каждый объект из C допускает мономорфизм в инъективный объект. Перенося теорию производных функторов, развитую в цитированной выше книге, на общий случай, автор связывает с каждым аддитивным ковариантным функтором F из C в C' функторы R^iF $(i\geqslant 0)$ из C в C' такие, что набор (R^iF), где $R^iF=0$ для $i<0$, есть когомологический функтор. Функторы R^iF называются правыми производными от F. Спектральным функтором на C называется аддитивный функтор из C в категорию спектральных последовательностей над C'. Пусть C, C', C'' — три абелевы категории, причем каждый объект из C и C' допускает мономорфизм в инъективный объект. Пусть заданы аддитивные ковариантные функторы $F: C\to C'$ и $G: C'\to C''$ такие, что G точен слева и что если $A\in C$ инъективен, то $R^qG(F(A))=0$ $(q>0)$. Тогда существует спектральный функтор (E_r) на C со значениями в C'', начинающийся с $E_2^{pq}(A)=R^pG(R^qF(A))$ и кончающийся градуированным функтором $R(GF)$. Все спектральные последовательности которые в дальнейшем встречаются в работе, получа-

ются из этой общей теоремы. Пусть X — произвольное топологическое пространство, O — пучок колец с единицами на X. Тогда пучки O-модулей на X, которые автор называет просто O-модулями, образуют абелеву категорию C^O, каждый объект которой допускает мономорфизм в инъективный объект. Если, в частности, $O = Z$ — постоянный пучок, изоморфный кольцу целых чисел, то $C^O = C^X$ — категория всех абелевых пучков на X. Пусть Φ — антифильтр замкнутых множеств пространства X, т. е. такое непустое семейство замкнутых множеств, что из $B \subset A \in \Phi$ следует $B \in \Phi$. Обозначим через $\Gamma_\Phi(F)$ группу сечений пучка F, носители которых содержатся в Φ. Тогда Γ_Φ — ковариантный функтор из C^X в категорию абелевых групп. Группы $H^p_\Phi(X, F) = R^p\Gamma_\Phi(F)$ называются группами когомологий пространства X с коэффициентами в F и носителями в Φ. Пучок F на X называется вялым (flasque) (соответственно, Φ-мягким (Φ-mou)), если всякое его сечение над открытым множеством (соответственно, над множеством из Φ) пространства X можно продолжить в сечение над X. Антифильтр Φ называется паракомпактифицирующим, если каждое содержащееся в нем множество паракомпактно и обладает окрестностью, также входящей в Φ. Доказывается, что $H^p_\Phi(X, F) = 0$ ($p > 0$), если выполнено одно из следующих условий: F — вялый пучок; F — Φ — мягкий пучок и Φ является паракомпактифицирующим. Если Φ является паракомпактифицирующим, то всякий тонкий пучок является Φ-мягким, откуда следует, что теория когомологий, изложенная в семинаре А. Картана (1950—51 г.), является частным случаем теории автора. Даются приложения этих результатов к классификации расслоенных пространств. Доказывается также, что если всякая строго убывающая последовательность замкнутых множеств пространства X содержит не больше $n+1$ элементов (X — пространство Зариского комбинаторной размерности $\leqslant n$), то для всякого пучка F на X имеем $H^p_\Phi(X, F) = 0$ ($p > n$, Φ — антифильтр всех замкнутых множеств). Далее строится спектральная последовательность для непрерывного отображения пространства X в пространстве Y при весьма общих предположениях об этом отображении. В частности, оказывается, что если брать в качестве носителей произвольные замкнутые множества в X и Y, то спектральная последовательность существует без всяких дополнительных предположений. В дальнейшем рассматривается только случай, когда Φ — антифильтр всех замкнутых множеств, и соответствующие группы когомологий обозначаются просто $H^p(X, F)$. Пусть $\check{H}^p(X, F)$ — группы когомологий с коэффициентами в F, вычисленные при помощи покрытий. Определяется гомоморфизм $\check{H}^p(X, F) \to H^p(X, F)$, который оказывается изоморфизмом для $p = 0, 1$ и мономорфизмом для $p = 2$; если X паракомпактно, то это изоморфизм для всех p. Приводится пример, когда $\check{H}^2(X, F) = 0$, но $H^2(X, F) \neq 0$. Пусть $A, B \in C^0$. Через $\mathrm{Hom}_0(A, B)$ обозначается пучок ростков O-гомоморфизмов пучка A в B, через $\mathrm{Ext}^p_0(A, B)$ — производные функтора $B \to \mathrm{Hom}_0(A, B)$ в C^0, через $\mathrm{Ext}^p_0(X; A, B)$ — производные функтора $B \to \Gamma(\mathrm{Hom}_0(A, B))$ из C^0 в категорию абелевых групп. Если O — когерентный пучок нётеровых колец и A — когерентный O-модуль, то имеют место изоморфизмы $\mathrm{Ext}^p_0(A, B)(x) = \mathrm{Ext}^p_{O(x)}(A(x), B(x))$ ($x \in X$). Доказывается, что существует спектральная последовательность (I_r), начинающаяся с $\mathrm{I}_2^{p,q}(A, B) = H^p(X, \mathrm{Ext}^q_0(A, B))$ и кончающаяся градуированной группой $\mathrm{Ext}_0(X; A, B)$. Отсюда выводится, что если A локально изоморфен O^n ($n > 0$), то $\mathrm{Ext}^p_0(X; A, B) = H^p(X, \mathrm{Hom}_0(A, B))$. Пусть на пространстве X действует (не обязательно эффективно) группа G. Обозначим через Y фактор-пространство X/G, через $f: X \to Y$ — естественное отображение и будем считать, что G действует на Y тривиальным образом. Пучок A на x называется G-пучком, если группа G действует на A, причем это действие согласовано с ее действием на X. Вводится понятие G-гомоморфизма G-пучков. Если O — G-пучок колец на X, A — O-модуль и если естественный гомоморфизм $O \times A \to A$ является G-гомоморфизмом, то A называется G-O-модулем. Такие пучки образуют абелеву категорию $C^{O(G)}$, каждый объект которой допускает мономорфизм в инъективный объект. В частности, если $O = Z$ и G действует на O тривиальным образом, то получается категория $C^{X(G)}$ всех абелевых G-пучков на X. Если A — пучок на X, то через $f_*(A)$ обозначается пучок на Y, сечениями которого над открытым множеством $U \subset Y$ являются сечения пучка A над $f^{-1}(U)$. Если A — G-пучок, то $f_*(A)$ — G-пучок на Y. Пусть $A^G = {f_*}^G(A)$ — пучок инвариантов G-пучка $f_*(A)$, ${\Gamma_X}^G(A)$ — группа инвариантных сечений пучка A. Рассматриваются производные $H^n(X; G, A) = R^n{\Gamma_X}^G(A)$ и $H^n(G, A) = R^n{f_*}^G(A)$ функторов ${\Gamma_X}^G$ и ${f_*}^G$. Существуют две спектральные последовательности (I_r) и (II_r), оканчивающиеся градуированной группой $H(X; G, A)$ и начинающиеся с $\mathrm{I}_2^{pq}(A) = H^p(Y, H^q(G, A))$ и $\mathrm{II}_2^{p,q}(A) = H^p(G, H^q(X, A))$ соответственно. Автор говорит, что G — разрывная группа гомеоморфизмов, если для всякой точки $x \in X$ подгруппа G_x группы G, оставляющая x на месте, конечна и существует такая окрестность V_x точки x, что $gV_x \cap V_x = 0$ для всех $g \in G_x$. В этом случае имеют место изоморфизмы $H^n(G, A)(y) = H^n(G_x, A(x))$ ($f(x) = y$). Если G — разрывная группа без неподвижных точек, то $H^n(G, A) = 0$ ($n > 0$) и $H^n(X; G, A) = H^n(Y, A^G)$. Изучаются также функторы $\mathrm{Ext}^p_{0,G}(A, B)$, являющиеся производными функтора $B \to {f_*}^G(\mathrm{Hom}_0(A, B))$.

А. Л. Онищик

9868. **Индуцированные представления. Ботт** (Induced representations. Bott Raoul), Semin. Analyt. Funct. Vol. 2. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study (1958), 88—91 (англ.)

Краткое изложение результатов автора о когомологиях комплексных однородных пространств с коэффициентами в аналитических пучках (РЖМат, 1959, 1335).

А. Л. Онищик

9869. **Когомологии эквивариантных отображений. Дугунджи** (Cohomology of equivariant maps. Dugundji J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 2, 408—420 (англ.)

Рассматривается W-комплекс (комплекс с группой операторов W), группа n-мерных эквивариантных коцепей и эквивариантных когомологий обозначаются через $C^n_W(K, G)$ и $H^n_W(K, G)$ соответственно. Пусть $h_n(K)$ означает факторгруппу целочисленных цепей по подгруппе границ, $\eta: C_n(K) \to h_n(K)$ — естественное отображение. Отображение η, если его рассматривать как коцепь со значениями в группе $h_n(K)$, является эквивариантным коциклом, его класс когомологий $e^n_W(K) \in H^n_W(K; h_n(K))$ называется (n, W)-универсальным классом когомологий. Относительно $e^n_W(K)$ доказаны утверждения:

Для любого W-модуля K и любого $\alpha \in H^n_W(K, G)$ существует W-моморфизм $p: h_n(K) \to G$ такой, что $p^\# \times e^n_W(K) = \alpha$, где $p^\#$ есть гомоморфизм $p^\#: H^n_W(K; h_n(K)) \to H^n_W(K; G)$ индуцированный p.

Следующие условия эквивалентны: 1) $e^n_W(K) = 0$, 2) $H^n_W(K; G) = 0$ для всех W-модулей G, 3) $H^n_W(K; h_n(K)) = 0$. Если W тривиально действует на K, то условия 1—3 эквивалентны. 4) $H^n(K; G) = 0$ и $H_n(K, G) = 0$ для всех групп коэффициентов G. 5) $H_n(K)$ и $H_{n-1}(K)$ свободны и $H_n(K) = 0$.

Пусть K и P — комплексы с операторами W и $\varphi: P \to K$ эквивариантное цепное отображение. (n, W) — степень $e^n_W(\varphi)$ от φ есть элемент $\varphi^* e^n_W(K) \in H^n_W(P, h_n(K))$. $e^n_W(\varphi)$ — степень φ определяет гомоморфизмы $\varphi^*: H^n_W(K, G) \to H^n_W(P, G)$ для всех групп G, т. е. $e^n_W(\varphi) = e^n_W(\psi)$ тогда и только тогда, когда $\varphi^*\psi^*: H^n_W(K, G) \to H^n_W(P, G)$ совпадают для всех групп G. Если W тривиально действует на K и P, $H_{n-1}(P)$ — свободна, тогда $e^n_W(\varphi)$ определяет гомоморфизм $\varphi_*: H_n(P, G) \to H_n(K, G)$ групп гомологий.

Существует вложение $\gamma: H_n(K) \subset h_n(K)$, оно определяет гомоморфизм $\gamma^\#: H^l_W(P, Q, H_n(K)) \to H^l_W(P, Q, h_n(K))$. Образ $\gamma^\#$ обозначается через $\Delta^l_W(P, Q; H_n(K))$.

Оказывается, что $\Delta^l_W(P, Q; H_n(K))$ будет топологическим инвариантом и для любого симплициального подразделения $k(P)$ полиэдра $P\Delta^l_W(P, Q, H_n(K))$ совпадает с группой $\Delta^l_W(P, Q; H_n(K))$, определенной с помощью сингулярного комплекса $S(P)$. Если P и K W-комплексы, φ, $\psi: P^{n+1} \to K^{n+1}$ — эквивариантные цепные отображения и $C_{n-1}(P)$, $C_{n-2}(P)$ свободны, а $e^{n-1}_W(\varphi) = e^{n-1}_W(\psi)$, тогда $e^n_W(\varphi) - e^n_W(\psi) \in \Delta^n_W(P, H_n \times K(K))$, если $C_{n-1}(K)$ W-свободен, то $e^n_W(K) \in \Delta^n_W(K, H_n(K))$ тогда и только тогда, когда тождественный автоморфизм $h_{n-1}(K)$ можно разложить в $h_{n-1}(K) \to F \to h_{n-1}(K)$, где F W-свободен. Эти утверждения показывают, в каком смысле предыдущие определения топологически инвариантны.

Доказана следующая формула универсальных коэффициентов для эквивариантных когомологий: Если $C_{n-1}(K)$ W-свободен, то существуют естественные (относительно эквивариантных цепных отображений) гомоморфизмы α и β такие, что последовательность $0 \to \to \mathrm{Ext}_W(h_{n-1}(K), G) \xrightarrow{\alpha} H^n_W(K, G) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Im}\,\gamma^* \to 0$ точна, где $\gamma^*: \mathrm{Hom}_W(h_n(K), G) \to \mathrm{Hom}_W(H_n(K)\, G)$ порождено отображением $\gamma: H_n(K) \subset h_n(K)$. Рассмотрены также некоторые вопросы теории препятствий к продолжению эквивариантных отображений. В. И. Кузьминов

9870. Аналитические расслоения над голоморфно полными пространствами. Грауэрт (Analytic fibre bundles over holomorphically complete spaces. Grauert Hans), Semin. Analyt. Funct. Vol. 1. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, (1958), 80—102 (англ.)

Излагаются результаты автора, группирующиеся вокруг того факта, что комплексно-аналитические и топологические расслоенные пространства с заданной голоморфно полной базой и заданной комплексной группой Ли в качестве структурной группы находятся во взаимно однозначном соответствии. Подробное изложение см. РЖМат, 1958, 8762; 1959, 6846.

А. Л. Онищик

9871. О сингулярных секущих поверхностях. Иноуэ (On singular cross sections. Inoue Yoshiro), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 10, 678—681 (англ.)

Пусть $p: E \to B$ — расслоенное пространство, $\bar{p}: S \times (E) \to S(B)$ — индуцируемое расслоением p отображение сингулярного комплекса $S(E)$ пространства E в сингулярный комплекс $S(B)$ базы B. Пусть S' — подкомплекс комплекса $S(B)$. Сингулярной секущей поверхностью φ над S' называется симплициальное отображение $\varphi: S' \to S(X)$, удовлетворяющее условию $\bar{p}\,\varphi = 1$. Автор изучает связь между обычными и сингулярными секущими поверхностями в случае, когда база B является полиэдром, определяет препятствие к продолжению сингулярной секущей поверхности и т. д.

А. С. Шварц

9872. Множество неподвижных точек компактных абелевых групп преобразований. Флойд (Fixed point sets of compact abelian Lie groups of transformations Floyd E. E.), Ann. Math., 1957, **66**, № 1, 30—35 (англ.)

Показывается, что на сфере S^{41} можно определить такое симплициальное периодическое преобразование T периода 6, что множество неподвижных точек преобразования T не является гомологической сферой ни по какой нетривиальной группе коэффициентов.

В случае, когда связная компактная абелева группа G (т. е. тор) действует на замкнутом многообразии, имеющем такие же целочисленные когомологии, как сфера S^n, доказывается, что множество неподвижных точек группы G имеет такие же целочисленные когомологии, как r-мерная сфера S^r $(-1 \leqslant r \leqslant n)$.

А. С. Шварц

9873. Надстройка над пространством петель. Баркус Мейер (The suspension of a loop space. Barcus W. D., Meyer J.-P.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 4, 895—920 (англ.)

Пусть X — топологическое пространство, $\Omega = \Omega(X, x_0)$ — пространство петель в X с началом в x_0, $S\Omega$ — надстройка над пространством Ω. В работе строится и изучается расслоение $S\Omega \to X$, слоем которого служит пространство $\Omega * \Omega$ (символ $*$ обозначает соединение (join) пространств, (РЖМат, 1955, 141). С помощью этого расслоения доказываются и несколько уточняются некоторые результаты Уайтхеда (РЖМат, 1956, 5781). Это же расслоение применяется к изучению натуральной системы пространства $SK(\Pi, n)$ (как известно, пространство типа $K(\Pi, n)$ можно реализовать как пространство петель в пространстве типа $K(\Pi, n+1)$).

А. С. Шварц

9874. О классах Понтрягина некоторых косых произведений с группой $SO(n)$ и с базой, являющейся многообразием. Кервер (On the Pontryagin classes of certain $SO(n)$-bundles over manifolds. Kervaire Michel A.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 3, 632—638 (англ.)

Пусть $E \to M$ — главное расслоенное пространство с группой $SO(n)$. Предположим, что у этого расслоения существует секущая поверхность, определенная над множеством $M \setminus U$, где U — гомеоморфная шару окрестность некоторой точки базы M (такие расслоения автор называет почти тривиальными). Будем считать, что база M является ориентируемым многообразием размерности $4s < n$. Обозначим λ элемент гомотопической группы $\pi_{4s-1}(SO(n))$, представляющий собой препятствие к распространению секущей поверхности, заданной над $M \setminus U$ на все многообразие M. Так как $\pi_{4s-1}(SO(n)) \approx Z$ (РЖМат, 1958, 9672), то элемент λ можно рассматривать как целое число. Точно так же можно рассматривать как целое число $4s$-мерный понтрягинский класс $p_s \in H^{4s}(M, Z) \approx Z$ расслоения $E \to M$. Заметка посвящена доказательству формулы $p_s = \pm a_s \times \lambda (2s-1)!$, где $a_s = 1$, если s четно и $a_s = 2$, если s нечетно. (При $s = 1$ эта формула была установлена Понтрягиным). Указываются аналоги этой формулы для главных расслоенных пространств с группами $SU(n)$ и $Sp(n)$.

А. С. Шварц

9875. О характеристических классах косых произведений со слоем, гомеоморфным сфере. Букур (Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques.

Bucur I.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 2, 225—229 (франц.)

Дается новое доказательство совпадения различных определений характеристических классов Понтрягина косого произведения с группой $SO(n)$. Доказывается аналогичный результат для косых произведений с группой $Sp(n)$. А. С. Шварц

9876. Фактор пространства группы действительных чисел, приведенных по модулю 1. Коннер, Флойд (Orbit spaces of circle groups of transformations. Conner P. E., Floyd E. E.), Ann. Math., 1958, 67, № 1, 90—98 (англ.)

Пусть в пространстве X действует группа K действительных чисел, приведенных по модулю 1. Авторы изучают различные свойства (такие, как локальная связность, когомологическая локальная связность, односвязность и т. д.) пространства X/K траекторий группы K. Вот одна из доказанных теорем: Если группа K действует на компактном многообразии X (с краем или без края), то пространство X/K является абсолютным окрестностным ретрактом.

В случае, когда пространство X гомеоморфно сфере S^n, вычисляются группы когомологий пространства S^n/K. А. С. Шварц

9877. Несколько следствий теоремы Ботта. Милнор (Some consequences of a theorem of Bott. Milnor John), Ann. Math., 1958, 68, № 2, 444—449 (англ.)

Подробное изложение принадлежащей автору части заметки Ботта и Милнора (РЖМат, 1959, 2483). Доказываются также некоторые результаты, не вошедшие в упомянутую выше заметку. Отметим следующую теорему: Пусть M^{2n} — не имеющее кручения односвязное гладкое многообразие с полиномом Пуанкаре $1+t^n+t^{2n}$. Тогда $n=2,4$ или 8. А. С. Шварц

9878. Обобщение одной теоремы У Вень-цзюня. Букур (Sur une extension d'un théorème de Wu. Bucur Ion), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 3, 427—429 (франц.)

Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — два косых произведения с базой B и группой $U(n)$. Автор показывает, что в случае, когда $n=3$, база B является шестимерным полиэдром и группа $H^6(B, Z)$ не содержит элементов конечного порядка, косые произведения $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их классы Чжэнь Шэньшеня (Черна) совпадают. Аналогичное утверждение при $n=2$ и $\dim B=4$ было доказано У Вень-цзюнем. А. С. Шварц

9879. Рациональная эквивалентность произвольных циклов. Самюэль (Rational equivalence of arbitrary cycles. Samuel Pierre), Amer. J. Math., 1956, 78, № 2, 383—400 (англ.)

Пусть V^n — проективное многообразие без особенностей. Цикл X^r на V^n называется рационально-эквивалентным нулю, если существует неособенное унирациональное многообразие R^m, цикл Z^{m+r} на $V\times R^m$ и две точки $a,b\in R^m$ такие, что $Z(a)=pr_V(Z(V\times a))$ и $Z(b)$ определены и $X^r=Z(a)-Z(b)$. (Многообразие R называется унирациональным, если его абсолютное поле функций есть подполе чисто трансцендентного расширения универсальной области). Множество $\mathfrak{R}_r(V)$ всех r-мерных циклов на V рационально-эквивалентных нулю, образует группу относительно сложения. Та же группа получается, если заменим в определении произвольное унирациональное многообразие R^m проективной прямой P_1. Два r-мерных цикла x и x' на V называются рационально-эквивалентными, если $x-x'\in\mathfrak{R}_r(V)$. Для дивизоров это соотношение эквивалентности есть обычная линейная эквивалентность.

Через ряд свойств рациональной эквивалентности устанавливается, что это понятие совпадает с аксиоматически введенным Вейлем понятием „линейной эквивалентности циклов произвольной размерности" (Weil A., Foundations of algebraic geometry, Paris, 1946, стр. 259). В любых двух классах α и β рационально-эквивалентных циклов можно найти циклы $A\in\alpha$ $B\in\beta$ такие, что пересечение $A\cdot B$ определено, причем класс цикла $A\cdot B$ зависит только от α и β. Таким образом, классы рационально-эквивалентных циклов образуют коммутативное и ассоциативное кольцо. Это кольцо является контравариантным функтором, определенным на категории неособенных проективных многообразий и регулярных отображений. Е. С. Голод

См. также: 9954, 10191 К, 10197, 10506 Д.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

9880. Об однозначных непрерывных распространениях непрерывных функций. Новак (Über die eindeutigen stetigen Erweiterungen stetiger Funktionen. Novák Josef), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 3, 344—355 (нем.; рез. русск.)

Рассматривается множество X с заданным классом сходящихся последовательностей. Для произвольного подмножества $A\subset X$ через vA (Abschliessung) обозначается множество пределов всех сходящихся последовательностей точек из A ($A\subset vA$); uA — замыкание множества A, которое может быть получено последовательным применением к множеству A оператора v „Ω раз".

В § 1 устанавливаются две довольно очевидные теоремы, дающие условия, при которых непрерывная функция, заданная на A, может быть распространена с сохранением непрерывности на vA и uA. В § 2 аналогичный вопрос рассматривается для непрерывной меры, заданной на кольце множеств $\mathbf{E}$. Доказывается, что распространение на кольцо $v\mathbf{E}$, получаемое из $\mathbf{E}$ присоединением пределов всех последовательностей множеств из $\mathbf{E}$, сходящихся в смысле Хаусдорфа, всегда возможно. Попутно доказывается, что непрерывность меры равносильна ее ограниченности. Так как не требуется, чтобы $\mathbf{E}$ было σ-кольцом, то рассматриваемая мера не счетноаддитивна в обычном смысле; однако, если $E_n\in\mathbf{E}$, $E_n\cap E_m=\Lambda$ при $n\neq m$ и $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathbf{E}$, то $\mu E=\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n$. Распространение меры на $v\mathbf{E}$ осуществляется без использования внешней меры. Б. З. Вулих

9881. Связь между метрической размерностью и гармонической емкостью. Ерохин В., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 6, 81—88

Пусть E — измеримое по Борелю подмножество n-мерного евклидова пространства R_n ($n\geqslant 2$). Пусть $\varphi(\rho)$ ($0<\rho<1$) непрерывна, неотрицательна и не убывает. Пусть S_k — шары радиусов $\rho_k<\varepsilon$ ($k=1,2,\ldots$), $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$.

Вводятся: а) мера $m_\varphi(E)\equiv\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(2\rho_k)$, называемая в случае $\varphi(\rho)=\rho^\nu$ (ν — произвольное число) ν-мерной мерой (по Хаусдорфу) и обозначаемая

$mes^{\nu}(E)$; б) метрическая (хаусдорфова) размерность $r(E) \equiv \sup_{\nu}(mes^{\nu} E > 0)$. Пусть $c_n(E)$ — емкость множества E. Доказываются теоремы:

1. Пусть $\varphi(\rho)$ такова, что $\int_0^1 \varphi(\rho)\,\rho^{1-n}\,d\rho < \infty$. Если $m_{\varphi}(E) > 0$, то $c_n(E) > 0$.

2. Пусть $\varphi(\rho)$ такова, что $\overline{\lim_{\rho \to 0}} \varphi(\rho)\,\rho^{2-n} > 0$ $(n \geqslant 3)$, $\overline{\lim}\, \varphi(\rho) \log \frac{1}{\rho} > 0$ $(n = 2)$. Если борелевское множество E таково, что $m_{\varphi}(E)$ σ-конечна (E можно покрыть суммой счетного числа B-множеств конечной меры), то $c_n(E) = 0$. Отметим также следующие следствия: 1) Если $r(E) > n-2$, то $c_n(E) > 0$. 2) Если $r(E) < n-2$, то $c_n(E) = 0$. Отмечается, что условия теорем 1 и 2 относительно $\varphi(\rho)$ минимальны. Х. Л. Смолицкий

9882. Об одном новом понятии интеграла и его применение к интегралу Стилтьеса. **Ярошенко Н. С.**, Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 4, 450—462 (рез. англ.)

Для функции $K(x, y)$, определенной в некоторой окрестности плоской дуги Γ, вводится понятие интеграла $\int_{\Gamma} d_y K(x, y)$. При некоторых условиях, наложенных на Γ, доказывается существование упомянутого интеграла в случае, когда $K(x, y)$ удовлетворяет условию A_{Γ} (состоящему в том, что сумма модулей двойных приращений K по надлежаще определенным неперекрывающимся прямоугольникам должна стремиться к нулю). Изучаются различные свойства введенного понятия интеграла и отмечается, что некоторые свойства элементарного интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ появляются при этом как частные случаи.

П. И. Романовский

9883. Представление функций ограниченной вариации с помощью обобщенного интеграла. **Очан Ю. С.**, Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1958, **138**, 11—45

Опираясь на понятие обобщенного интеграла по модулю $f(t)$ от измеримой функции $\varphi(x)$ на множестве E конечной меры (Матем. сб., 1951, **28**, № 2), автор вводит понятие всюду вполне интегрируемой (в. в. м.) на сегменте $[a, b]$ функции. При дополнительных ограничениях на $f(t)$ доказывается, что семейство неопределенных интегралов $\int_a^{x*}$ от в. в. м. функций на $[a, b]$ совпадает с семейством функций ограниченной вариации на $[a, b]$, обращающихся в нуль в точке a.

Доказывается, что произведение в. в. м. функции на непрерывную есть в. в. м. функция, и устанавливается связь между интегралом Стилтьеса и рассматриваемым обобщенным интегралом. П. И. Романовский

9884. Нормальная производная обобщенного интеграла Пуассона. **Брусс** (Dérivée normale de l'intégrale de Poisson généralisée. Brousse P.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 41 (франц.)

Каждой функции g, суммируемой на полуокружности Γ относительно соответствующим образом выбранной меры, сопоставляется интеграл $w(M)$, обобщающий интеграл Пуассона (A. Huber, 1951; P. Brousse, 1954). В точке $M_0 \in \Gamma$ имеем: $\sup w \leqslant \sup g$, $\inf w \geqslant \inf g$. Если g обладает на $\Gamma_1 \subset \Gamma$ производной, удовлетворяющей условию Гёльдера, то w имеет нормальную производную на $]\Gamma_1[$, достигающуюся равномерно. Нормальная производная в $M_0 \in]\Gamma_1[$ выражается интегралом, в котором фигурирует производная от g только в точке M_0.

9885. О сходимости операторов вида:

$$L_n(f, x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)}{L^n(t)}\,dt.$$

Баскаков В. А., Фомин Г. А., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, **26**, 3—10

Пусть функция $L(t)$ удовлетворяет условиям: а) $L(0) = 1$, б) $L(t) = L(-t)$, в) $L(t)$ монотонно возрастает на $[0, \infty)$, г) существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{L(t)}$.

Рассматриваются операторы вида

$$L_n(f) = L_n(f, x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)}{L^n(t)}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\Delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{L^n(t)}$.

Доказывается, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[A, B]$, непрерывна слева в точке A и справа в точке B и ограничена на всей вещественной оси, то равномерно для всех $x \in [A, B]$

$$\lim_{n \to \infty} L_n(f, x) = f(x).$$

Если же, кроме а) — г), функция $L(t)$ удовлетворяет условиям д) $L''(0) \neq 0$, е) найдется такое $\beta \geqslant 0$, что отношение

$$|L'(t)| / L^{\beta}(t) \leqslant \text{const},$$

то для любой ограниченной на всей оси функции $f(x)$, имеющей в точке x конечную производную порядка $2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

$$\lim_{n \to \infty} n^k \left[L_n(f, x) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{2 f^{(2i)}(x)}{(2i)!\,\Delta_n} \int_0^{\infty} \frac{t^{2i}\,dt}{L^n(t)} \right] =$$

$$= \frac{f^{(2k)}(x)}{k!\,2^k\,[L''(0)]^k}.$$

Показывается, что операторы $L_n(f, x)$ осуществляют приближение порядка $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Примечание референта. Работа напечатана небрежно. Показатели степени и различные индексы отличить невозможно. Имеются опечатки. А. В. Ефимов

9886. Об асимптотической формуле, получающейся при приближении непрерывных функций сингулярными интегралами некоторого специального вида. **Арнольд Г. А.**, Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 3, 328—333

Выводится асимптотическая формула для разности между сингулярным интегралом вида $\frac{1}{k_n} \int_a^b [\varphi(x, t)]^n \times f(t)\,dt$ и функцией $f(x)$ при некоторых специальных предположениях о φ и f. П. И. Романовский

9887. О множестве точек расходимости сингулярных интегралов от функций, интегрируемых по Риману. **Загорская** (Über die Punktmengen der Divergenz der singulären Integrale von Riemann-integrablen Funktionen. Zahorska H.), Acta scient. math., 1958, **19**, № 1-2, 5—17 (нем.)

Пусть $K(r, x, t)$ при любом $r > 0$ и $x \in [a, b]$, как функция от t интегрируема по Лебегу на $[a, b]$. Если $\lim_{r \to \infty} \int_a^b K(r, x, t)\,dt = 1$, $\int_a^b |K(r, x, t)|\,dt < H(x)$, где $H(x) > 0$ — конечная на $[a, b]$, не зависящая от r функция, и при любом $\delta > 0$

$$\lim_{r \to \infty} \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^b \right) |K(r, x, t)|\,dt = 0,$$

то какой бы ни была интегрируемая на $[a, b]$ в смысле Римана функция $f(x)$, множество N точек x интервала (a, b), где у сингулярного интеграла $\int_a^b K(r, x, t) \times f(t)\,dt$ при $r \to \infty$ не существует предела, есть сумма счетного числа попарно непересекающихся множеств типа G_δ, имеющих замыкание меры нуль.

С другой стороны, если $a < 0 < b$, $K(r, x, t) = K^*(r, x - t)$, где $\int_a^b K^*(r, t)\,dt = 1$, $K^*(r, t) = 0$, когда $t \notin [a, b]$, $\lim_{r\to\infty}\left(\int_a^{-\delta} + \int_\delta^b\right) | K^*(r, t) |\,dt = 0$ при любом $\delta > 0$, $| K^*(r, t) | < F(r, t)$, причем $F(r, t)$ не убывает на $[a, 0]$ и не возрастает на $[0, b]$, а $\int_a^b F(r, t)\,dt < C$ (C — не зависящая от r константа), то для любого такого множества N существует периодическая периода $b - a$, интегрируемая по Риману на $[a, b]$ функция $f(x)$, для которой интеграл

$$Q(r, x) = \int_a^b K^*(r, t) f(x + t)\,dt$$

обладает тем свойством, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} Q(r, x) - \underline{\lim_{r\to\infty}} Q(r, x) > 0,$$

когда $x \in N$, и $\lim_{r\to\infty} Q(r, x) = f(x)$, когда $x \notin N$.

Приведенный результат формулируется в несколько более общем виде. А. Ф. Тиман

9888. Граничные свойства дифференцируемых и гармонических функций в областях с угловыми точками. **Жидков Г. В.**, Докл. АН СССР, 1958, 118, № 2. 225—227

Приводится без доказательств несколько теорем, относящихся к вопросу о граничных свойствах дифференцируемых и гармонических функций, имеющих конечный интеграл Дирихле на области, представляющей собой конус.

9889. О последовательностях функций со свойством А. **Йоттани** (Über die Funktionenfolge mit der Eigenschaft A. Yottani Tokumasa), Оита дайгаку гакугэй гакубу кэнкю киё (сидзэн кагаку), Res. Bull. Fac. Liber. Arts Oita Univ. (Natur. Sci.), 1958, № 7, 11—15 (нем.; рез. японск.)

Основное понятие работы: „последовательность функций, обладающая свойством А“ определено неотчетливо. Как представляется референту, определение этого понятия должно было бы выглядеть так: рассматриваются некоторые соотношения $V[a, b, \varepsilon]$ между произвольными вещественными числами a и b и числом $\varepsilon > 0$. Эти соотношения таковы, что из справедливости $V[a_n, b_n, \varepsilon]$, где $a_n \to a$, $b_n \to b$, следует справедливость $V[a, b, \varepsilon]$. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ обладает в точке x_0 свойством А (и следовало бы добавлять: „относительно соотношения $V[a, b, \varepsilon]$“), если всякому $\varepsilon > 0$ и всякому натуральному n отвечает такое $\delta_n(\varepsilon) > 0$, что при $| x - x_0 | < \delta_n(\varepsilon)$ справедливо $V[f_n(x), f_n(x_0), \varepsilon]$, причем для всякого $\varepsilon > 0$ оказывается $\inf_n \{\delta_n(\varepsilon)\} > 0$.

Автор хочет применить это понятие к доказательству нескольких известных теорем о непрерывных и полунепрерывных функциях, но и здесь его рассуждения не представляются референту убедительными. Например, утверждается, что предел сходящейся и всюду обладающей свойством А последовательности непрерывных функций непрерывен. Но если $V[a, b, \varepsilon]$ есть соотношение $| a | + | b | + \varepsilon > 0$, то всякая последовательность функций всюду обладает свойством А. Отсюда следует ошибочность высказанного утверждения. И. П. Натансон

9890. О «длине» произвольной непрерывной кривой. **Поенару** (Asupra «lungimii» unei curbe continue arbitrare. Poenaru V.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1958, 9, № 1, 173—180 (рум.; рез. русск., франц.)

В заметке методологического характера определяется „вычислимая длина“ (отличная вообще от обыкновенной длины) непрерывной кривой (непрерывного отображения $\varphi(t)$ отрезка $[0, 1]$ в E_n).

Определение. Рассматривается $A_2 \subset [0, 1]$, где

$$t \in A_2 \rightleftarrows \exists\, t',\ t' \neq t,\ \varphi(t') = \varphi(t).$$

Пусть l_1, l_2 — интервалы множества $[0, 1] - \overline{A}_2$. Тогда вычислимая длина есть сумма обыкновенных длин сужений φ на l_i.

Приводится несколько простых результатов, относящихся к этому понятию (теоремы 1, 2, 3, 4).

Резюме автора

9891. Об отображениях плоскости в евклидовы пространства, удовлетворяющих условию Липшица. **Краль** (On Lipschitzian mappings from the plane into Euclidean spaces. Král Josef), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 2, 257—266 (англ.; рез. русск.)

Пусть $\alpha \in E_n$ — точка n-мерного евклидова пространства E_n, α_i — i-я координата точки α, G — отображение непустого множества Q в E_n, G_i — такая функция на Q, что для всех $\gamma \in Q$

$$G_i(\gamma) = (G(\gamma))_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

При $\alpha, \beta \in E_n$

$$\alpha \pm \beta = [\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n],\quad | \alpha | = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}.$$

Пусть f — непрерывное отображение $[a, b]$ в плоскость, G, Ψ — непрерывные отображения $f([a, b])$ в E_n и

$$\int_f G d\Psi = \sum_{i=1}^n \int_a^b G_i(f(t))\,d\Psi_i(f(t)),$$

где в правой части интегралы Стилтьеса существуют.

Пусть γ^0 — точка на плоскости, $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ — точка из E_n и в некоторой δ-окрестности точки γ^0 определены функция φ и отображение Ψ, отображающее δ в E_n.

Если для $\gamma \in \delta$ имеет место равенство

$$\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma^0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\Psi_k(\gamma) - \Psi_k(\gamma^0)) + | \Psi(\gamma) - \Psi(\gamma^0) |\, z(\gamma),$$

где $z(\gamma)$ — такая функция на δ, что $\lim_{\gamma\to\gamma^0} z(\gamma) = 0$, то пишут $\lambda = \partial(\varphi, \Psi; \gamma^0)$.

Пусть K — двумерный замкнутый невырожденный интервал. При этих обозначениях основной результат гласит: Пусть K — интервал и G, Ψ — отображения K в E_n, удовлетворяющие на K условию Липшица. Пусть соотношения

$$\lambda^i(\gamma) = [\lambda_1{}^i(\gamma), \ldots, \lambda_n{}^i(\gamma)] = \partial(G_i, \Psi; \gamma) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

справедливы для почти всех $\gamma \in K$.

Если определить функции

$$D_{ik}(\gamma) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_i(\gamma)}{\partial x}, & \frac{\partial \Psi_i(\gamma)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_k(\gamma)}{\partial x}, & \frac{\partial \Psi_k(\gamma)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

и $$P(\gamma)=\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n}(q_i^k(\gamma)-q_k^i(\gamma))\,D_{ik}(\gamma),$$

то P определена почти всюду на K и

$$\int_{H_K} G d\Psi=\int_K P d\mu,$$

где μ — лебегова мера на плоскости, а H_K — непрерывное отображение $[a, b]$ в плоскость, определяющее обход границы K в положительном направлении.
Ф. И. Шмидов

9892. О лебеговой площади двойного отображения. Слепян (On the Lebesgue area of a doubled map. Slepian Paul), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 3, 613—620 (англ.)

Пусть X — метрическое пространство, A — его непустое замкнутое подмножество. Автор называет Y удвоением X относительно A, если Y содержит гомеоморфное X множество X', причем образ A есть граница X' и замыкание $Y-X'$ гомеоморфно X. Каждая функция f, заданная на X, естественным образом порождает на Y функцию F. Автор доказывает, что если X и A удовлетворяют некоторым условиям триангулируемости и f — непрерывное отображение в евклидово n-мерное пространство, то $L_k(F)\leqslant 2L_k(f)$, где L_k обозначает k-мерную лебегову площадь, $2\leqslant k\leqslant n$. При $k=2$ автор доказывает равенство $L_2(F)=2L_2(f)$.
В. И. Арнольд

9893. Площадь простой поверхности. Гоблирш (An area for simple surfaces. Goblirsch R. P.), Ann. Math., 1958, 68, № 2, 231—245 (англ.)

Пусть B — граница трехмерного симплекса, E^3 — евклидово трехмерное пространство и h — гомеоморфизм B на $S\subset E^3$. Лебегова площадь h есть $L(h)=\inf_F \varliminf_{n\to\infty} A(f_n)$, где $F=\{f_n\}$ — последовательность кусочно-линейных отображений f_n множества B в E^3, равномерно сходящаяся к h, $A(f_n)$ — элементарная площадь f_n. $L(h)$ по существу зависит лишь от S, и $L(h)=L(S)$ называют лебеговой площадью S. Автор определяет величину $A(S)=\inf_H \varliminf_{n\to\infty} A(h_n)$, где $H=\{h_n\}$ — последовательность кусочно-линейных гомеоморфизмов h_n B в E^3, равномерно сходящаяся к h, и доказывает, что если фаварова площадь h конечна, то $A(S)\leqslant 144\,L(S)$.
В. И. Арнольд

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

9894. Об униформизации и расщеплении некоторых множеств. Щегольков Е. А., Докл. АН СССР, 1959, 124, № 4, 783—785

В первой части заметки без доказательств приводится шесть теорем об униформизации различных проективных множеств. Например:

Теорема 4. В системе аксиом Гёделя непротиворечиво утверждение: начиная с некоторого n, плоское A_n-множество, пересекающееся с прямыми $x=\text{const}$ по замкнутым множествам и проектирующееся на ось абсцисс в B_n-множество, униформизируется посредством B_n-множества. А для $n=2$ это же утверждение доказуемо (теорема 1).

Во второй части приводится теорема, решающая частично следующую задачу, поставленную П. С. Новиковым: Можно ли всякое плоское B-множество, пересекающееся с прямыми $x=\text{const}$ по множествам тип F_σ, представить в виде суммы счетного числа плоских B-множеств, пересекающихся с прямыми $x=\text{const}$ по замкнутым множествам? В указанной теореме выделяется некоторый класс B-множеств, для которых этот вопрос разрешается положительно.
С. И. Адян

9895. Эффективный пример трансфинитно непроективного множества. Ротбергер (Exemple effectif d'un ensemble transfiniment non-projectif. Rothberger F.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 554—560 (франц.)

Понятие проективного множества конечного класса P_n, введенное Н. Н. Лузиным, обобщается на трансфинитные классы P_α ($\alpha<\Omega$) (РЖМат, 1956, 3744). Автором в пространстве (x, y, t) сконструирован пример множества, параллельные сечения которого $t=\text{const}$ дают универсальные проективные множества для сколь угодно высоких классов $\alpha<\Omega$. Оно в некотором смысле является универсальным для всех линейных проективных множеств всех классов $\alpha<\Omega$, в силу чего само представляет эффективный пример трансфинитно непроективного множества. При конструкции используется метод Лебега исключения трансфинитных чисел (см. стр. 300—319 книги Н. Н. Лузина (РЖМат, 1954, 3659 К)). Именно, пусть $t=0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ есть действительное число, записанное в двоичной системе счисления, и $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — вполне определенная последовательность всех рациональных чисел. Каждому t соответствует множество T всех r_n таких, что $a_n=1$. В случае рационального t множество T принимается конечным. Если T вполне упорядочено типа α относительно отношения $<$, то говорят, что t вполне упорядочено типа α : $\operatorname{ord} t=\alpha$. Вместо $r_n\in T$ пишут $r_n\in t$. Если T_1 есть сегмент T_2, то пишут $t_1\prec t_2$ или формально $t_1\prec t_2\cdot\equiv\cdot(\exists r)\,(r')\cdot r'\in t_1\cdot\equiv\cdot r\in t_2\,\&\,r'\in t_2\,\&\,r'<r$. Пусть $x_1=\pi_3(x, z, z')$ есть гомеоморфизм между J и J^3 и установлено гомеоморфное соответствие между J_y и $J_{y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots}$. Вместо обозначения $y_n=\pi_n(y)$, $n=1, 2, \ldots$ пишут $y_n=\pi_{r_n}(y)$, заменяя натуральный индекс рациональным. Интересующее нас множество определяется пропозициональной функцией $\varphi(t, x, y)$ $(0\leqslant t<1, x\in J, y\in J)$, которая определяется неявно трансфинитной индукцией относительно $\prec$: $\varphi(0, x, y)\cdot\equiv\cdot\cdot\equiv\cdot(\exists r)\,\pi_r(y)<x<r$, и если $t\neq 0$, то $\varphi(t, x, y)\cdot\equiv\cdot\cdot\equiv\cdot(\exists z)\,(z')\,(\exists r)\,\varphi(t_r, \pi_3(x, z, z'), \pi_r(y))\vee(\exists\tau)\,(r)\,(\exists r')r\in\tau\to r\in t\,\&\,r'\in\tau\,\&\,r'<r$, где t_r есть сегмент t до r, т. е. $r'\in t_r\cdot\equiv\cdot r\in t\,\&\,r'\in t\,\&\,r'<r$, первый член дизъюнкции соответствует вполне упорядоченному t и второй дизъюнктивный член случаю, когда t не вполне упорядочено. Доказывается, что $\hat{x}\varphi(t, x, y)$ пробегает все проективные множества, $\hat{x}\hat{y}\varphi(t, x, y)$ являются универсальными проективными множествами сколь угодно высоких классов $\alpha<\Omega$. Таким образом, когда t, y пробегают все свои значения, $\hat{x}\varphi(t, x, y)$ пробегает все линейные проективные множества всех классов (конечных и трансфинитных). Отсюда следует, что множество $\hat{t}\hat{x}\hat{y}\varphi(t, x, y)$ в пространстве (x, y, t) не может быть проективным множеством ни одного из классов $\alpha<\Omega$. Наряду с неявным определением непроективного множества, в работе дается его явное определение в функциональном исчислении 3-го порядка, в котором переменными являются функции $\varphi(t, x, y)$.
З. И. Козлова

9896. О неприводимых компонентах аналитических вещественных подмножеств. Брюа, Картан (Sur les composantes irréductibles d'un sous-ensemble analytique-réel. Bruhat François, Cartan Henri), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 9, 1123—1126 (франц.)

Продолжение работы авторов (РЖМат, 1958, 8723). Пусть Ω — аналитическое вещественное многообразие и K — фиксированное замкнутое подмножество в Ω. Пусть $C_K(F; E)$, где $F\subset E$, означает минимальное аналитическое множество в Ω, охватывающее $(E\setminus F)\cap K$. По определению, E неприводимо в Ω, если $E\cap K\neq\varnothing$

и если для аналитических множеств F, F' из Ω соотношение $E \underset{K}{=} F \cup F'$ влечет $E \subset F$ или $E \subset F'$ (при этом $X \underset{K}{=} Y$ соответственно $X \underset{K}{\subset} Y$ означает, что существует некоторое множество $U \supset K$ такое, что $X \cap U = Y \cap U$ соответственно $X \cap U \subset Y \cap U$). K-компонентой множества E называется всякое подмножество F из E такое, что: а) F неприводимо в Ω; б) $F \not\subset C_K^{=}(F, E)$. Доказываются две теоремы и приводятся примеры.

В частности, доказывается, что если K компактно, то число неприводимых K-компонент множества E конечно. Г. Курепа

9897. Лемма о преобразованиях. Курепа (Ein Lemma über Transformationen. Kurepa Georg), Math. Nachr., 1958, **19**, № 1-6, 186—189 (нем.)

Через $\binom{S}{r}$, где S — некоторое множество, а r — кардинальное число, обозначается множество всех подмножеств S мощности r. Доказывается следующая теорема: Пусть S — некоторое множество, n и r — положительные кардинальные числа и пусть f есть некоторое отображение S в $\binom{S}{r}$, для которого выполнены следующие три условия:

I_r. $\{x\} \subseteq \cup y\,(y \in f(x), \quad x \in S)$;

II_r. если $y \in \binom{S}{r}$, то $y \notin \underset{x \in y}{\cup} f(x)$;

$III_r(n)$. $kf(x) < n$ для любого $x \in S$.

(здесь $kf(x)$ означает мощность множества $f(x)$). Если, кроме того, $r \leqslant n \geqslant \aleph_0$, то имеет место $kS \leqslant n$.

На основе этой теоремы и еще одной леммы устанавливается теорема: Равенство $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ логически эквивалентно следующему утверждению: существуют множество S мощности $2^{\aleph_\alpha}$ и отображение f_2 S в $\binom{S}{2}$, для которых выполняются условия I_2, II_2, $III_2(\aleph_{\alpha+1})$.

Указывается, что, в частности, при $\alpha = 0$ и $S = R$ из последней теоремы следует полученный ранее результат Серпинского о свойстве, эквивалентном гипотезе $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (РЖМат, 1958, 1121). С. И. Адян

9898. Заметка о теоремах Комма. Хирагути (A note on Mr. Komm's theorems. Hiraguchi Toshio), Sci. Rept Kanazawa Univ., 1953, **2**, № 1, 1—3 (англ.)

Автор замечает, что некоторые теоремы Комма (Komm H., Amer. J. Math., 1948, **70**, 507—520) о размерности подмножеств евклидова n-мерного пространства могут быть обобщены на другие кардинальные произведения. Например, если X_s есть цепь для каждого $s \in S$, то размерность кардинального произведения цепей X_s есть число элементов в S. Каждое частично упорядоченное множество P размерности m изоморфно подмножеству некоторого кардинального произведения m цепей. P. M. Whitman

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 937.

9899. Аксиома выбора для конечных множеств. Серпинский (L'axiome du choix pour les ensembles finis. Sierpinski W.), Matematiche, 1955, **10**, 92—99 (франц.)

Продолжая исследования Мостовского (Mostowski A., Fundam. math., 1945, **33**, 137—168) и Шмелевой (Szmielew W., Fundam. math., 1947, **34**, 75—80), автор изучает импликации вида $[n] \to [m]$. Здесь $[n]$ — утверждение, что для каждого класса Z множеств, состоящих точно из n элементов, существует функция f на Z такая, что $f(A) \in A$ для каждого A из Z. Рассуждения проходят в аксиоматической теории множеств Цермело (конечно, без аксиомы выбора). Типичный результат: если $[p]$ верно для каждого простого числа $p \leqslant n$, то $[k]$ верно, когда k — составное и $k \leqslant 2n + 1$. P. R. Halmos

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 716.

9900. Отрезочно-аддитивные предложения. Форд (Interval-additive propositions. Ford L. R.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 2, 106—108 (англ.)

Методическая заметка. Автор вводит следующие определения: 1) Предложение P, относящееся к отрезкам, называется отрезочно-аддитивным, если из верности P для каждого из двух отрезков, имеющих общую внутреннюю точку, следует верность P для объединения этих отрезков. 2) Если $[a, b]$ — фиксированный сегмент и $x \in [a, b]$, то предложение P верно около точки x, если оно верно для некоторого отрезка I_0 такого, что $x \in I_0 \subset [a, b]$, причем при $x \neq a$, $x \neq b$ x есть внутренняя точка I_0.

Доказана теорема: Если отрезочно-аддитивное предложение верно около каждой точки сегмента, то оно верно для всего сегмента.

В качестве следствий этой теоремы легко получаются следующие свойства функций, непрерывных на сегменте: а) ограниченность; б) достижение верхней и нижней граней; в) теорема о промежуточных значениях; г) теорема о возможности для произвольного $\varepsilon > 0$ так разбить сегмент на частичные сегменты, чтобы на каждом из них колебание функции было $< \varepsilon$. Следствием из той же теоремы является существование точки конденсации несчетного множества. А. В. Гладкий

9901. Математическая индукция в множествах. Дьюрен (Mathematical induction in sets. Duren W. L., Jr), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, Part 2, 19—22 (англ.)

Автор анализирует одно из известных доказательств леммы Гейне-Бореля, основанное на рассмотрении верхней грани точек x таких, что сегмент $[a, x]$ можно покрыть конечной системой интервалов, и дает аналогичные доказательства теоремы о постоянстве функции, имеющей тождественно равную нулю производную, и теоремы о равномерной непрерывности. Пытаясь объединить эти доказательства, автор называет свойство P открытых множеств продолжаемым (extendable), если при условии, что каждое из открытых множеств A, B, имеющих непустое пересечение, обладает свойством P, $A \cup B$ тоже им обладает, и формулирует следующую теорему: Если P — продолжаемое свойство открытых множеств и если каждая точка сегмента $[a, b]$ содержится в открытом множестве, обладающем свойством P, то сегмент $[a, b]$ обладает свойством P. Эта формулировка, очевидно, некорректна, а если опустить в определении продолжаемого свойства требование открытости множеств, то теорема становится неверной. Указанную теорему автор называет „теоремой Форда", ссылаясь на статью Форда (реф. 9900), в которой на самом деле нет такого утверждения. А. В. Гладкий

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

9902. О некоторых классах ортонормальных систем. Пулатов А. И., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1958, № 6, 57—64 (рез. узб.)

Рассматриваются две системы $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ и $\sin x, \sin 2x, \ldots$ Путем ортогонализации их по любому суммируемому на отрезке $[0, \pi]$ весу получены две системы ортонормальных на $[0, \pi]$ тригонометрических многочленов: четная $\{C_n(x)\}$ и нечетная $\{S_n(x)\}$. Для каждой из полученных систем автор построил рекуррентные формулы, которым удовлетворяют три последовательных многочлена, и формулы Кристоффеля — Дарбу, исходя (для системы $\{C_n(x)\}$) из соответствующих

формул для ортонормальных на $[-1,1]$ алгебраических многочленов, а для системы $\{S_n(x)\}$ — путем редуцирования к системе $\{C_n(x)\}$.

Рассмотрен также вопрос о сходимости почти всюду в $[0,\pi]$ ряда Фурье по ортонормальной системе $\{S_n(x)\}$ для функции $f(x)$, удовлетворяющей в $(0,\pi)$ одному из следующих условий: а) $f(x)$ или $f(x)\sin^{-1}x$ удовлетворяет условию Дини—Липшица с порядком больше единицы и б) $f(x)$ или $f(x)\sin^{-1}x$ с ограниченным изменением, а вес ограничен.

Полученные теоремы являются аналогами соответствующих теорем А. Н. Колмогорова и И. П. Натансона для рядов Фурье по алгебраическим ортонормальным многочленам. Для системы $\{C_n(x)\}$ доказательства опущены, так как они не отличаются от доказательств соответствующих теорем упомянутых авторов.

Б. Л. Голинский

9903. Порядок приближения функций класса Z некоторыми полиномиальными операторами. Петров И. М., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 6, 127—131

Обозначим через Z класс функций $f(x)$ периода 2π, удовлетворяющих при любых x и $h>0$ условию

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant 2h.$$

В работе рассматривается приближение функций класса Z операторами Джексона

$$D_{2n-2}(f,x)=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\times\right.$$

$$\left.\times\cos k(t-x)\right]^2 dt$$

и доказывается асимптотическое равенство

$$b_n=\sup_{f\in Z}2n\,\|f(x)-D_{2n-2}(f,x)\|_{C_{2\pi}}=\frac{12\ln 2}{\pi}+o(1).$$

Аналогичное асимптотическое равенство устанавливается и для приближения функций класса Z положительными операторами с ядром

$$K_n(t)=A\left|\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}z^k\right|^2,\qquad a_k=\sin\frac{k\pi}{n+2},$$

$$A=\frac{1}{2\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}^2},\qquad z=e^{it}.$$

А. В. Ефимов

9904. Об одном асимптотическом свойстве положительных методов суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении функций класса Z_2 линейными положительными полиномиальными операторами. Коровкин П. П., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 6, 99—103

Пусть

$$K_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt\geqslant 0$$

—положительное ядро линейного положительного оператора

$$L_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,K_n(t)\,dt,$$

значение которого для каждой интегрируемой функции $f(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n.

В работе доказывается, что равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\lambda_2^{(n)}}{1-\lambda_1^{(n)}}=4$$

необходимо и достаточно для выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(f,x)-f(x)}{L_n(\varphi,x)-\varphi(x)}=\frac{D_2 f(x)}{D_2\varphi(x)},$$

где

$$D_2 f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}.$$

Результат применяется для приближения периодических функций класса Z_2, т. е. класса функций $f(x)$, для которых

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\leqslant t^2.$$

Доказывается, что если

$$b_n=\inf_{K_n(t)\geqslant 0}\sup_{f\in Z_2}\|f(x)-L_n(f,x)\|_{C_{2\pi}},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}n^2 b_n=\dfrac{\pi^2}{2}$.

Последнее равенство дает асимптотически точную константу для наилучшего приближения функции $f(x)\in Z_2$ положительными линейными операторами.

Приводится пример линейного положительного оператора $A_n(f,x)$, для которого

$$A_n(f,x)-f(x)=\frac{\pi^2}{2n^2}D_2 f(x)+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

если только $f(x)$ имеет в точке x ограниченную вторую обобщенную производную.

А. В. Ефимов

9905. О линейных методах суммирования рядов Фурье, подобных методу суммирования Валле-Пуссена. Смирнов Г. А., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, 26, 155—171

Пусть треугольная матрица множителей $\{\rho_k^{(n)}\}$ $(n=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots,n)$ такова, что для каждой 2π-периодической функции $f(x)$ последовательность операторов

$$U_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, равномерно сходится к этой функции.

Рассматривается вопрос, в каких случаях этим же свойством обладают операторы

$$V_{\nu_n+n}(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\nu_n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}\left\{a_{\nu_n+k}\cos(\nu_n+k)x+b_{\nu_n+k}\sin(\nu_n+k)x\right\},$$

получаемые из $U_n(f,x)$ путем „сдвига“ множителей.

Устанавливается, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\nu_n/n<\infty$, то это обстоятельство имеет место для выпуклых матриц, удовлетворяющих условию $1-\rho_1^{(n)}=O\left(\frac{1}{n}\right)$. Аналогичное предложение доказано для несколько более широкого класса матриц, а также для матрицы множителей оператора Джексона.

А. Л. Гаркави

9906. О сходимости последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных 2π-периодических функций двух переменных. Морозов Э. Н., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, 26, 129—142

Пусть $L_n(f;x,y)$ — последовательность линейных положительных операторов, определенных в пространстве непрерывных 2π-периодических функций $C_{2\pi,2\pi}$. Пока-

зывается, что при выполнении условий $L_n(1; x, y) \rightrightarrows 1$, $L_n(\sin u; x, y) \rightrightarrows \sin x$, $L_n(\cos u; x, y) \rightrightarrows \cos x$, $L_n(\sin v; x, y) \rightrightarrows \sin y$ и $L_n(\cos v; x, y) \rightrightarrows \cos y$ $(n \to \infty)$ для любой непрерывной функции $f(x, y) \in C_{2\pi, 2\pi}$ имеем

$$L_n(f; x, y) \rightrightarrows f(x, y) \qquad \text{при } n \to \infty$$

равномерно по x и y.

Доказывается, что нельзя подобрать четыре функции $f_k(x, y) \in C_{2\pi, 2\pi}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ такие, чтобы из соотношений

$$L_n(f_k; x, y) \rightrightarrows f_k(x, y)$$

вытекало соотношение

$$L_n(f; x, y) \rightrightarrows f(x, y)$$

для любой непрерывной функции $f(x, y) \in C_{2\pi, 2\pi}$.

Рассматриваются положительные операторы

$$Б_{n,m}(f; x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \left[\frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{n} \lambda_{\mu}^{(n)} \cos \mu (u - x) \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} \sigma_{\nu}^{(m)} \cos \nu (v - y) \right] du dv$$

и дается оценка приближения функции $f(x, y) \in C_{2\pi, 2\pi}$ операторами $Б_{n,m}(f; x, y)$ через модуль непрерывности функции $f(x, y)$. Доказывается, что для наилучшего приближения $E_{n,m}(f)$ функции $f(x, y) \in C_{2\pi, 2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n по x и m по y справедлива оценка

$$E_{n,m}(f) < 11\, \omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right).$$

А. В. Ефимов

9907. Обобщение теоремы Сидона на ряды Фурье почти-периодических функций. Бредихина Е. А., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1958, вып. 4, 3—9

Доказываются теоремы 1 и 2 предыдущей заметки автора (РЖМат, 1957, 6966). Б. М. Левитан

9908. Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами. Ганзбург И. М., Тиман А. Ф., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 6, 771—810

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[-1, 1]$,

$$\hat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \hat{T}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k \arccos x \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

—ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ на $[-1, 1]$ система полиномов Чебышева и

$$c_k = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\, \hat{T}_k(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

—коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по этой системе. Для любой треугольной матрицы

$$\Lambda = \left\{ \lambda_k^{(n)} \right\} \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1; \quad n = 0, 1, \ldots;$$
$$\lambda_0^{(n)} = 1, \quad \lambda_{n+1}^{(n)} = 0)$$

рассматривается последовательность многочленов

$$u_n(f, x, \Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} c_k \hat{T}_k(x).$$

Пусть

$$M_n(x) = \sup_{|f| \leqslant 1} |\, u_n(f, x, \Lambda) \,|.$$

Доказывается, что если

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)} \right| = O(1),$$

то для любого $x \in [-1, 1]$

$$M_n(x) \geqslant \frac{4}{\pi^2} \left| L_n(1) - \{1 - |\, T_n(|x|)\,|\}\, L_n(|x|) \right|,$$

где

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} T_k(x), \quad T_k(x) = \cos k \arccos x,$$

а если $\lambda_k^{(n)} = O(1)$ и $\Delta^2 \lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)} \leqslant 0$ или $\Delta^2 \lambda_k^{(n)} \geqslant 0$, то

$$M_n(x) = \frac{4}{\pi^2} \left| L_n(1) - \{1 - |\, T_n(|x|)\,|\}\, L_n(|x|) \right| + O(1).$$

Полученные результаты переносятся на линейные методы суммирования рядов Фурье.

Через H^{α} $(0 < \alpha \leqslant 1)$ обозначаем класс функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$|\, f(x_1) - f(x_2) \,| \leqslant |\, x_1 - x_2 \,|^{\alpha}, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1], \; 0 < \alpha \leqslant 1.$$

В работе изучается поведение величины

$$E_{u_n}(H^{\alpha}, x) = \sup_{f \in H^{\alpha}} |\, f(x) - u_n(f, x, \Lambda) \,|$$

в зависимости от структуры матрицы Λ.

Для случая средних арифметических частных сумм ряда Чебышева $\sigma_{n,n}(f, x)$, т. е. для случая, когда $\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n+1}$, дается асимптотически точное выражение для величины

$$E_{\sigma_{n,n}}(H^{\alpha}, x) = \sup_{f \in H^{\alpha}} |\, f(x) - \sigma_{n,n}(f, x) \,|$$

как в случае $0 < \alpha < 1$, так и в случае $\alpha = 1$. Для приближения периодических функций суммами Фейера аналогичные результаты были получены С. М. Никольским (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940, 4, 501—508).

Рассматривается приближение суммами Валле-Пуссена, т. е. суммами

$$\sigma_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} S_k(f, x) =$$

$$= \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} \sum_{i=0}^{k} c_k \hat{T}_k(x).$$

Доказывается, что

$$E_{\sigma_{n,p}}(H^{\alpha}, x) = \sup_{f \in H^{\alpha}} |\, f(x) - \sigma_{n,p}(f, x) \,| =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^{\alpha}} \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^{\alpha} \int_{0}^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t\, dt \cdot \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

для всех $p = 0, 1, \ldots, n$ при $0 < \alpha < 1$ и для $0 \leqslant p \leqslant \theta n$ $(\theta < 1)$ при $\alpha = 1$.

Наконец, рассматриваются методы приближения с выпуклыми и монотонно убывающими последовательностями $\lambda_k^{(n)}$ в случае классов H^{α}, $0 < \alpha < 1$, и выпуклыми и монотонно убывающими последовательностями $\mu_k^{(n)} = \frac{1 - \lambda_k^{(n)}}{k}$ в случае класса H^1.

Показывается, что в этом случае

$$E_{u_n}(H^\alpha, x) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}(\sqrt{1-x^2})^\alpha \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

при $0 < \alpha < 1$ и

$$E_{u_n}(H^1, x) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\right| + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогичные результаты для суммирования рядов Фурье были получены А. Ф. Тиманом (РЖМат, 1953, 656).

Примечание референта. В работе имеются опечатки. Так, на стр. 771 (10 строка снизу) последовательность $\lambda_k^{(n)}$ определена при $k = 0, 1, \ldots, n$, а на стр. 773—774 рассматривается разность $\lambda_n^{(n)} - \lambda_{n+1}^{(n)}$. В формулировке теоремы 3 вместо (2.1) должно быть (2.15), а перед следствием из этой теоремы вместо $\alpha_n = O(1)$ должно быть $\alpha_n = 0$. А. В. Ефимов

9909. О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для случаев $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$. **Яхнин Б. М.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 6, 207—211

Если $f(x) \in C[-1, 1]$ и $\{S_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)\}$ — частные суммы разложения $f(x)$ в ряд по ортонормированным полиномам Якоби, соответствующим весу $p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, то для функций Лебега

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sup_{|f|\leqslant 1} |S_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

автор получает на всем отрезке $[-1, 1]$ соотношения

$$L_n^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) = L_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) +$$

$$+ O\left\{\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right|}{\sqrt{1-x}} + 1\right\},$$

$$L_n^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x) = L_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) +$$

$$+ O\left\{\frac{|\sin n \arccos x|}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right\},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n и x. Пользуясь оценкой А. Ф. Тимана для $L_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x)$, автор получает внутри отрезка соотношения

$$L_n^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x) = L_n^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) + O(1) = L_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) +$$

$$+ O(1) = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1),$$

в то время как на концах отрезка эти величины имеют порядок $O(n)$. Я. Л. Геронимус

9910. Замечание о сходимости рядов по ультрасферическим полиномам. Гупта (Note on the convergence of series of ultraspherical polynomials. Gupta D. P.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 10, 762—764 (англ.)

Пусть

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}(1-x^2)^\lambda \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\lambda}$$

—ультрасферический полином порядка λ. Доказывается следующая теорема: Если последовательность

$$\{a_n/(n+\lambda)^\mu\}$$

стремится к нулю и является квазивыпуклой для $0 < \mu < \lambda$ и $0 < \lambda \leqslant 1/2$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\lambda)}(x)$$

сходится равномерно в промежутке $(-1+\delta, 1-\delta)$. Данная теорема обобщает результат А. Н. Колмогорова о тригонометрических рядах, составленных из косинусов (Bull. internat. Acad. polon., Cl. A, 1923, 83—86), и результат Цитарозы о рядах по полиномам Лежандра (Zitarosa A., Giorn. mat. Battaglini, 1948, 2, 3—9).

Я. С. Бугров

9911. Некоторые последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных. Волков В. И., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, 26, 11—26

Рассматриваются линейные положительные операторы

$$Б_{n,m}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k} f\left(\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}\right) \times$$

$$\times C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{n,m}(x, y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i} x^{k-i} y^i,$$

где функции $\varphi_{n,m}(x, y)$ удовлетворяют условиям:

1) $\varphi_{n,m}(x, y)$ — аналитические в замкнутом прямоугольнике $[0 \leqslant x \leqslant 2;\ 0 \leqslant y \leqslant 2]$; 2) $\varphi_{n,m}(0, 0) = 1$;

$$3)\ \frac{\partial^k \varphi_{n,m}(x, y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i} = -n\left[\frac{\partial^{k-1}\varphi_{n_1,m}(x, y)}{\partial x^{k-i-1}\partial y^i} + \right.$$

$$\left. + \alpha_{n,k}(x, y)\right] = -m\left[\frac{\partial^{k-1}\varphi_{n,m_1}(x, y)}{\partial x^{k-i}\partial y^{i-1}} + \beta_{m,k}(x, y)\right],$$

$$|\alpha_{n,k}(x, y)| \leqslant \alpha_n,\ \alpha_n \to 0;\ |\beta_{m,k}(x, y)| \leqslant \beta_m,\ \beta_m \to 0;$$

$$4)\ \frac{n_1}{n} \to 1\ (n \to \infty);\quad \frac{m_1}{m} \to 1\ (m \to \infty);$$

$$5)\ (-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{n,m}(x, y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i} \geqslant 0$$

для всех k и i $(0 \leqslant i \leqslant k)$.

Доказывается, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} Б_{n,m}(f; x, y) = f(x, y)$$

равномерно для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Приводятся примеры функций $\varphi_{n,m}(x, y)$, для которых выполняются условия 1)—5). Дается оценка (неравенство (19) статьи) приближения функций $f(x, y)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ операторами $Б_{n,m}(f; x, y)$:

$$|f(x, y) - Б_{n,m}(f; x, y)| \leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \times$$

$$\times\left\{\sqrt{x[1-(n-n_1)x]} + \sqrt{y[1-(m-m_1)y]} + 1\right\}.$$

Примечание референта. При доказательстве неравенства (19) и леммы, которая при этом используется, автор не накладывает на числа n_1 и m_1 никаких ограничений, кроме условия 4). Однако правая часть (19) и равенства (16) и (17) имеют смысл для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$ только при $n_1 \geqslant n-1$ и $m_1 \geqslant m-1$. Автор этого не отмечает. В работе имеются опечатки. Так, на стр. 21 в формуле 8-й строки сверху вместо $\varphi_{n,m}(x, y)$ должно быть $\varphi_{n,m_1}(x, y)$. В формуле (24) нет скобок у $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

А. В. Ефимов

9912. Условия сходимости последовательностей линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных. Волков В. И., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, **26**, 27—40

Пусть D — ограниченная область пространства двух измерений и p — точка этой области. Систему из четырех непрерывных функций $f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$, $f_4(p)$ назовем ψ_4-системой, если для любой точки $p_0 \in D$ существует полином

$$\psi(p, p_0) = \sum_{k=1}^{4} a_k f_k(p),$$

удовлетворяющий условиям: 1) $\psi(p_0, p_0) = 0$, 2) $\psi(p, p_0) > 0$ при $p \neq p_0$.

Пусть, далее, $L_n(f, p)$ — последовательность линейных положительных операторов, заданных в пространстве функций, непрерывных в области $\bar{D}$.

Доказывается, что если $\{f_k(p)\}_1^4$ есть ψ_4-система то из условий

$$L_n(f_k, p) \to f_k(p), \quad n \to \infty, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

равномерно в области $\bar{D}$ вытекает, что

$$L_n(f, p) \to f(p) \text{ при } n \to \infty$$

равномерно для любой непрерывной в области $\bar{D}$ функции $f(p)$. Показывается, что примером ψ_4-системы в любой области D является система функций $1, x, y, x^2 + y^2$.

Вводится понятие R_m-системы, т. е. системы из $m \geqslant 3$ функций $f_i(p)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ таких, что для любых троек точек p_j $(j = 1, 2, 3)$ ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} f_1(p_1) \ldots f_m(p_1) \\ f_1(p_2) \ldots f_m(p_2) \\ f_1(p_3) \ldots f_m(p_3) \end{pmatrix}$$

равен трем. Изучаются свойства R_4-систем. Показывается, что R_4-система в области D во внутренних точках этой области будет ψ_4-системой. Как следствие из доказанных теорем, автор получает следующую теорему

Теорема 4. Пусть дана система непрерывных функций $\{f_k(p)\}_1^4$ в открытой области D и пусть $\bar{D}^*$ — любая замкнутая область, $\bar{D}^* \subset D$. Для того чтобы из равномерных в области $\bar{D}^*$ соотношений

$$L_n(f_k, p) \to f_k(p), \quad n \to \infty, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

для любой непрерывной в области $\bar{D}^*$ функции $f(p)$ следовало соотношение

$$L_n(f, p) \to f(p), \quad n \to \infty,$$

равномерно по p, где $L_n(f, p)$ — любая последовательность линейных положительных операторов, необходимо и достаточно, чтобы система $\{f_k(p)\}_1^4$ была R_4-системой в области D.

А. В. Ефимов

9913. Некоторые свойства систем Чебышева. Волков В. И., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, **26**, 41—48

Как показал П. П. Коровкин, при исследовании вопроса сходимости последовательности линейных положительных операторов к непрерывной функции $f(x)$ существенную роль играют T_3-системы — системы Чебышева, состоящие из трех функций. При рассмотрении этого же вопроса для случая функций двух переменных роль, аналогичную T_3-системам, играют введенные автором R_4-системы — системы, состоящие из четырех функций двух переменных (определение см. реф. 9912). В работе исследуются некоторые свойства T_3-и R_4-систем. Устанавливается следующий критерий: Непрерывные функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ составляют на отрезке $[a, b]$ T_3-систему тогда и только тогда, когда: 1) для каждой точки x_0, $a < x_0 < b$, существует полином $R(x_0, x) = \sum_{k=1}^{3} a_k f_k(x)$ такой, что $R(x_0, x_0) = 0$, $R(x_0, x) > 0$ при $x \neq x_0$; 2) для каждого конца отрезка существует полином, имеющий ровно два нуля, один из которых совпадает с данным концом отрезка, а другой лежит внутри отрезка и является простым нулем полинома; 3) существует полином $P(x)$ такой, что $P(a) = P(b) = 0$, $P(x) > 0$ при $a < x < b$.

Далее автор приводит пример T_3-системы, которую нельзя продолжить с отрезка $[a, b]$ на более широкий отрезок так, чтобы она и на нем оставалась T_3-системой. Аналогичный пример приводится для случая R_4-системы (с заменой отрезка на замкнутую область).

А. Л. Гаркави

9914. Обобщение одной теоремы Хаусдорфа. Соловьев А. Ф., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 6, 167—171

Через $M(u)$, $-\infty < u < \infty$, обозначена непрерывная четная, выпуклая вниз функция, удовлетворяющая условиям $M(0) = 0$, $\lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$; через L_M^* обозначен класс функций $f(t)$, измеримых на отрезке $[0, 1]$, для которых

$$\int_0^1 M[f(t)]\, dt < \infty.$$

Для того чтобы вещественная последовательность $\{\mu_n\}_0^\infty$ допускала представление

$$\int_0^1 x^n f(x)\, dx = \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad f \in L_M^*,$$

необходимо и достаточно условие

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} M[(n+1) C_n^k \Delta^{n-k} \mu_k] \leqslant K \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где K не зависит от n; в случае, когда $M(u) = |u|^p$, $p > 1$, т. е. при $L_M^* = L_p$, — это теорема Хаусдорфа.

Я. Л. Геронимус

9915 К. Ряды Фурье. Письм. лекции. **Соловьева О. И.** Сев.-Зап. заочн. политехн. ин-т. Л., 1958, 46 стр., илл., беспл.

См. также: 9712, 9853, 9941

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

9916. О работах по теории функций в Польше. Бернацкий (Sur les travaux de la théorie de fonctions en Pologne. Biernacki M. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 251/1, 11 p.) (франц.)

Дается обзор наиболее важных результатов, полученных в Польше, начиная с 1945 г. Новых результатов не содержится. Библ. 58 назв. Часть работ прореферирована в РЖМат. (1953, 5536; 1954, 4403; 1955, 1730; 1956, 348, 4536, 5194, 7985; 1957, 4730, 6287, 6990, 7819, 8571). Б. Н. Рахманов

9917. Разложения в ряды интегрального логарифма и интегрального косинуса. Мелиги (Expansions for the logarithmic-integral and cosine-integral functions. Meligy A. S.), Proc. Roy. Irish Acad., 1958, **A59**, № 3, pp. 25—28) (англ.)

Для интегрального логарифма выводится следующее разложение, содержащее бесселевы функции:

$$\mathrm{li}\,(z)=\int_0^z\frac{dt}{\log t}=\gamma+\log(-\log z)+$$

$$+\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}\log z\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{4}\log z\right)^r}{r!\,(2r+1)^2}\times$$

$$\times\left\{I_r\left(\frac{1}{2}\log z\right)-I_{r+1}\left(\frac{1}{2}\log z\right)\right\},$$

справедливое для $|\arg(-\log z)|<\pi$; γ означает константу Эйлера. Аналогично для $\mathrm{Ci}\,(z)=\int_z^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$ имеет место разложение

$$\mathrm{Ci}\,(z)=-\gamma-\log z+$$

$$+\frac{1}{2}z\sin\left(\frac{1}{2}z\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(z/4)^r}{r!\,(2r+1)^2}J_r\left(\frac{1}{2}z\right)-$$

$$-\frac{1}{2}z\cos\left(\frac{1}{2}z\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(z/4)^r}{r!\,(2r+1)^2}J_{r+1}\left(\frac{1}{2}z\right).$$

В. И. Левин

9918. Кольца аналитических функций. Уэрмер (Rings of analytic functions. Wermer John), Ann. Math., 1958, **67**, № 3, 497—516 (англ.)

Пусть D_0 — ограниченная область на римановой поверхности, Γ_0 — ее граница, $U(D_0)$ — кольцо всех функций, аналитических в $D_0\cup\Gamma_0$. Всюду в дальнейшем φ и f аналитичны в $D_0\cup\Gamma_0$, а $[\varphi, f]$ — подкольцо $U(D_0)$, состоящее из полиномов по φ и f. Опираясь на свои результаты, полученные ранее (РЖМат, 1959, 8996), автор изучает возможность равномерной аппроксимации функций $U(D_0)$ функциями из $[\varphi, f]$ на $D_0\cup\Gamma_0$. Требуется, чтобы $d\varphi\neq 0$ на Γ_0, и в этом предположении доказываются теоремы:

Теорема 1. Чтобы каждая функция в $U(D_0)$ равномерно приближалась функциями из $[\varphi, f]$ в $D_0\cup\Gamma_0$, необходимы и достаточны условия:

1) φ и f разделяют точки $D_0\cup\Gamma_0$,

2) если $p\in D_0$, то либо $d\varphi(p)\neq 0$, либо $df(p)\neq 0$.

Теорема 2. Пусть φ и f разделяют точки Γ_0. Тогда существует множество T, состоящее из конечного числа точек $D_0\cup\Gamma_0$ и целое n такое, что всякая $g\in U(D_0)$, имеющая нуль порядка не меньшего n каждой точке T, равномерно приближается на $D_0\cup\Gamma_0$ функциями из $[\varphi, f]$.

Автор указывает, что легко получается следующее обобщение теоремы 1:

Теорема. Пусть A — любая подалгебра $U(D_0)$, содержащая функцию φ, для которой $d\varphi\neq 0$ на Γ_0. И пусть A разделяет точки $D_0\cup\Gamma_0$ и для всякого $p\in D_0$ существует $g_p\in A$, для которой $dg_p\neq 0$ в p. Тогда каждая функция из $U(D_0)$ равномерно аппроксимируется на $D_0\cup\Gamma_0$ функциями из A. Л. А. Маркушевич

9919. Замкнутые идеалы в алгебре аналитических функций. Рудин (The closed ideals in an algebra of analytic functions. Rudin Walter), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 3, 426—434 (англ.)

Приводится доказательство теоремы, дающей исчерпывающее описание строения замкнутых идеалов в банаховой алгебре $\mathfrak{A}$, состоящей из аналитических в $|z|<1$ и непрерывных в $|z|\leqslant 1$ функций $f(z)$. Формулировки основных результатов были опубликованы ранее в заметке автора (РЖМат, 1958, 1138). Изящное доказательство опирается на леммы о структурном представлении различных специальных подклассов аналитических в круге $|z|<1$ функций ограниченного вида и о свойствах множителей, фигурирующих в этом представлении.

Примечание референта. Используемые автором параметрические представления подклассов функций ограниченного вида, а также важнейшие свойства, связанные с этими представлениями, были впервые в систематическом виде исследованы В. И. Смирновым (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1932, **3**, 337—372; см. также Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 1-е, М., 1941, или изд. 2-е, М.-Л., 1950), о чем, по-видимому, не было известно автору, который ссылается на значительно более позднюю работу Бейрлинга (Beurling A., Acta Math., 1949, **81**, 239—255). Г. Ц. Тумаркин

9920. Об асимптотике ε-энтропии аналитических функций. Ерохин В. Д., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 5, 949—952

Пусть K — континуум на плоскости комплексного переменного z, отличный от одной точки, или всей плоскости, G — область, содержащая K, и M — некоторая константа. Рассматривается совокупность $A_G^K(M)$ всех однозначных и аналитических в G функций $f(z)$ для которых $\sup\limits_{z\in G}|f(z)|\leqslant M$.

Известно (РЖМат, 1957, 3281), что точный порядок роста ε-энтропии $H_\varepsilon(A_G^K(M))$ множества $A_G^K(M)$ с метрикой $\|f\|=\max\limits_{z\in K}|f(z)|$ ($H_\varepsilon(F)$) есть логарифм при основании 2 от числа точек минимальной ε-сети компакта F) равен $\left(\lg\frac{M}{\varepsilon}\right)^2$. Уточняя этот результат А. Н. Колмогорова, автор устанавливает, что если область G отлична от всей плоскости с удаленным из нее конечным числом точек и пересечения G_ν области G с любой смежной с K областью D_ν ($\nu=1,2,3,\ldots$) не более чем двусвязны, то при $\varepsilon\to 0$ справедлива асимптотическая оценка

$$H_\varepsilon(A_G^K(M)) \sim \left(\lg_2 \frac{M}{\varepsilon}\right)^2 \sum_\nu \frac{1}{\lg_2 R_\nu},$$

где R_ν $(1 < R_\nu \leqslant \infty)$ есть модуль двусвязной области G_ν.

Дано обобщение этой формулы на многомерный случай при условии, что континуум K и область G имеют полицилиндрическую структуру. Кроме того, устанавливается также асимптотическая оценка для ε-энтропии множества целых функций $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$, удовлетворяющих условию

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant C \exp \sum_{k=1}^n \sigma_k |z_k|^{s_k} \quad (\sigma_k > 0, \quad s_k > 0)$$

и рассматриваемых на некотором ограниченном континууме K в пространстве переменных $z_1, \ldots, z_n$ с метрикой $\|f\| = \max\limits_{z \in K} |f(z)|$.

Полученные результаты обобщают соответствующие асимтотические оценки из работы А. Г. Витушкина (РЖМат, 1958, 7605). А. Ф. Тиман

9921. Заметка об одном неравенстве Правица. Бернарди (Note on an inequality of Prawitz. Bernardi S. D.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 3, 385—391 (англ.)

Пусть S есть класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ регулярных и однолистных в $|z| < 1$. Для любого вещественного α положим $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$.

Тогда согласно неравенству Правица $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-\alpha}{\alpha} |b_n|^2 \leqslant 1$.

Теорема 1. Пусть $f(z) \in S$ и $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{2n-\alpha}{\alpha} |b_n|^2 = 1$, $|b_N| = 1$. Тогда $f(z) = z / \prod\limits_{j=1}^{N} (ze^{i\Theta_j} - 1)^{2/N}$. Как приложение этой теоремы дается короткое доказательство одной из теорем, доказанных автором ранее (Bernardi S. D., Duke Math. J., 1952, **19**, 5—21).

Ю. Е. Аленицын

9922. К теории однолистных функций. Юнг (Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen. Jung H. P.), Mitt. math. Semin. Giessen, 1955, № 52, 1—29 (нем.)

Работа состоит из четырех частей. В части I даются некоторые оценки коэффициентов полиномов $z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, однолистных в единичном круге. В части II рассматривается семейство S функций вида $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, регулярных и однолистных в $|z| < 1$, и семейство $\sum$ функций вида $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$, регулярных, за исключением полюса в $z = 0$, и однолистных в $|z| < 1$.

Доказывается: Если a_n является экстремальным коэффициентом в семействе S, то $|a_{n-1}| \leqslant |a_n|$, $|a_{n+1}| \leqslant \frac{n+3}{n+1} |a_n|$; если b_n является экстремальным коэффициентом в семействе $\sum$, то $|b_{n-1}| \leqslant |b_n| \frac{n+1}{n-1}$. Дается также новое доказательство известного соотношения Марти (Marty F., Bull. sci. math., Sér. 2, 1935, **59**, № 2) между коэффициентами a_{n-1}, a_n и a_{n+1} функции $f(z) \in S$ экстремальным коэффициентом a_n. Доказательства проводятся элементарным вариационным методом. В части III формула Кристоффеля—Шварца обобщается на однолистные области с непрерывной кривизной границы и приводятся некоторые следствия из доказанной формулы. В частности, для коэффициентов a_2 и a_3 функции $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, регулярной и однолистной в $|z| < \rho$, $\rho > 1$, даются формулы, аналогичные известным формулам Левнера для коэффициентов a_2 и a_3 в классе S, но учитывающие зависимость этих коэффициентов от формы образа круга $|z| \leqslant 1$ при его отображении функцией $w = f(z)$. В части IV, опираясь на один результат Тамми (РЖМат, 1955, 2633), автор дает новое доказательство неравенства $|a_3| \leqslant 3$ для класса S.

Примечание референта. Исходя из формулы Кристоффеля—Шварца, автор доказывает, что для подкласса выпуклых функций из S верна оценка $|a_n| \leqslant 1$, $n = 2, 3, 4, 5$, подчеркивая, что предлагаемое доказательство естественнее, чем известные доказательства этой оценки, данные ранее Лёвнером и Монтелем. По-видимому, автору неизвестно, что на основании формулы Кристоффеля—Шварца эта оценка для всех n ранее была доказана И. И. Приваловым (Матем. сб., 1924, **31**, 350—365; Введение в теорию функций комплексного переменного, М., ГТТИ, 1954; РЖМат, 1955, 3178 К). Ю. Е. Аленицын

9923. Некоторые замечания об однолистных функциях. II. Реньи (Some remarks on univalent functions. II. Rényi A. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/29, 7 pp.) (англ.)

Автор называет функцию $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, регулярную и однолистную в $|z| < R$, близкой к выпуклым типа β в $|z| < R$ $\left(0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, если существует выпуклая функция $\varphi(z)$, регулярная и однолистная в $|z| < R$, такая, что

$$\arg \left| \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} \right| < \beta \quad \text{для} \quad |z| < R.$$

Автор ставит задачу — найти наибольшее число $r(\beta)$ $\left(0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ такое, что в круге $|z| < r(\beta)$ всякая регулярная и однолистная в $|z| < 1$ функция $f(z)$ будет близкой к выпуклым типа β. Получен результат:

$$r(\beta) \geqslant \operatorname{tgh}\left[\max\left(\frac{\beta}{2}; \frac{\beta + \ln 3}{4}\right)\right].$$

Неравенство неточное, за исключением некоторых значений β. Ю. Д. Максимов

9924. Некоторые свойства покрытий выпуклых областей в теории конформного отображения. Ся Даосин (Some covering properties of convex domains in the theory of conformal mapping. Shah Tao-shing), Scientia sinica, 1958, **7**, № 8, 816—828 (англ.)

Статья является переводом с китайского одноименной работы автора (РЖМат, 1958, 7639).

Ю. Е. Аленицын

9925. Некоторые неравенства в теории подчинения. Ся Даосин, Чжан Каймин (Shah Tao-shing, Chang Kai-ming), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, **8**, № 3, 408—412 (кит.; рез. англ.)

Пусть функции $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ и $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$ регулярны в $|z|<1$ и $f(z)\prec F(z)$. Доказывается, что $|b_3|\leqslant\sqrt{2}\cdot\max(|a_1|,|a_2|,|a_3|)$, где константа $\sqrt{2}$ является наилучшей (Ся Дао-син), а если $f(z)\prec F(z)$ (т. е., если $f(z)$ однолистно подчинена $F(z)$ в $|z|<1$), то $|b_3|\leqslant\max(|a_1|,|a_2|,|a_3|)$ (Чжан Кай-мин). Кроме того, если $f(z)\prec F(z)$, $f(0)=F(0)=0$ и $F(z)$ однолистна в $|z|<1$, то образ круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$ покрывает круг $|w|\leqslant\leqslant|b_1|^2/4|a_1|$, но не всегда больший круг (Чжан Кай-мин).

Примечание референта. Более сильную теорему покрытия для подчиненных функций получил недавно Г. С. Шпак (реф. 9931). Ю. Е. Аленицын

9926. О вариационных формулах для однолистных функций. Гудман (On variation formulas for univalent functions. Goodman A. W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 2, 285—294 (англ.)

Выводятся вариационные формулы для следующих классов функций, регулярных в единичном круге: 1) однолистных; 2) однолистных и ограниченных; 3) однолистных и q-симметричных; 4) p-листных. Доказывается, в частности, теорема: Пусть $F(z)=z+\ldots$ регулярна и p-листна в $|z|<1$ и пусть b ($b\neq0$) — комплексное число, отличное от точек разветвления и предельных значений функции $F(z)$ при $|z|\to1$. Тогда для всех комплексных λ, $|\lambda|<\lambda_0(b,F)$, функция

$$F_\lambda(z)=F(z)+\frac{\lambda F(z)^2}{b(F(z)-b)}-F(z)\sum_{j=1}^{s}\frac{\lambda b}{z^2{}_jF'(z_j)^2}+$$

$$+zF'(z)\sum_{j=1}^{s}\frac{\lambda b}{z_jF'(z_j)^2}\frac{1}{z_j-z}+$$

$$+zF'(z)\sum_{j=1}^{s}\left(\overline{\frac{\lambda b}{z_jF'(z_j)^2}}\right)\frac{z}{1-\bar z_jz}+O(\lambda^2),$$

где z_j ($j=1,\ldots,s$) — корни уравнения $F(z)=b$, лежащие в $|z|<1$, регулярна и p-листна в $|z|<1$. Функции $F(z)$ и $F_\lambda(z)$ имеют в $|z|<1$ одинаковое число корней и критических точек. Эта формула в сущности совпадает с одним частным случаем вариационной формулы Шиффера (Schiffer M., Amer. J. Math., 1943, 65, 341—360). Вывод вариационных формул опирается на принадлежащую автору формулу, выражающую вариацию аналитической функции в зависимости от перемещения ее точек разветвления (реф. 9930). С. А. Гельфер

9927. Об одном классе однолистных в круге $|z|\leqslant1/\sqrt{|2}$ функций. Дундученко Л. Е., Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1957, 3, № 3-4, 37—38 (русск.; рез. нем., рум.)

Известно (РЖМат, 1957, 340, что функции $w=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{zd\alpha(t)}{1-e^{-it}z}$, где αt — любая неубывающая на отрезке $[0,2\pi]$ функция, с $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha(t)=1$, однолистны в круге $|z|<1/\sqrt{2}$. Для функций этого класса в круге $|z|<1/\sqrt{2}$ устанавливаются точные оценки величин: $|w|$, $|\arg w|$, $|w'|$, $|\arg w'|$, а также оценки коэффициентов этих функций. Дается также оценка сверху колебания в точке z этого круга кривизны образа любой локально гладкой кривой, проходящей через точку z, при отображении любой функцией рассматриваемого класса. Доказательства не приводятся.

Примечание референта. Из результатов И. Я. Ашневиц и Г. В. Улиной (РЖМат, 1956, 7272) непосредственно вытекают некоторые более сильные теоремы о функциях w. В частности, легко следует, что областью значений функции w при любом фиксированном z из круга $|z|<1$ является круг $\left|w-\frac{z}{1-|z|^2}\right|=\frac{|z|^2}{1-|z|^2}$. Левая часть приведенной в работе оценки $|\arg w|\leqslant\arcsin|z|$ должна быть заменена на $\left|\arg\frac{w}{z}\right|$. Ю. Е. Аленицын

9928. О критических точках многолистной функции. Гудман (On the critical points of a multivalent function. Goodman A. W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 2, 295—309 (англ.)

Методом нормальных семейств доказывается теорема: Пусть p и k — целые положительные числа, $k\geqslant p$, и пусть регулярная в единичном круге E функция $f(z)$ имеет в нем критические точки $C_1,\ldots,C_k$, причем кратная критическая точка считается столько раз, какова ее кратность. Тогда существует положительное число $R^*(p,k)$, обладающее следующими свойствами: 1) если

$$|C_j|\leqslant R^*(p,k),\quad j=1,\ldots,k \tag{1}$$

и, по крайней мере, для одного индекса j имеет место строгое неравенство, то порядок многолистности $f(z)$ в E больше p; 2) число $R^*(p,k)$ — наибольшее, обладающее свойством 1), т. е. существует зависящая от p и k регулярная и p-листная в E функция $F(z)$, имеющая k критических точек C_j, для которых в (1) будет иметь место знак равенства для всех значений $j=1,\ldots,k$. Эта функция $F(z)$ называется экстремальной. Показывается, что для подкласса $F_0(p)\subset F(p)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f(z)\neq0$ при $z\neq0$, для существования числа $R_0^*(p,k)$, определяемого аналогично $R^*(p,k)$, условие $k\geqslant p$ может быть отброшено. Автор высказывает предположение, что имеет место равенство $R^*(p,k)=R_0^*(p,k)=\left(2p-1-2(p^2-p)^{1/2}\right)^{1/k}$ и что единственными экстремальными функциями будут

$$F(z)=\frac{z(1-z^k)^{(2p-2)/k}}{(1+z^k)^{2p/k}},\quad F(ze^{i\theta}),\quad aF(z)+b,\ a\neq0.$$

Пользуясь формулой для вариации аналитической функции в зависимости от перемещения ее точек разветвления (реф. 9930), автор получает дифференциальное уравнение для экстремальной функции в задаче об определении величины $R_0^*(p,1)$. Доказывается далее что, если функция $F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in F_0(p)$, $a_n>0$, дает максимум $|a_n|$ в классе $F_0(p)$ и $F(z)$ имеет при $|z|=C$ простую критическую точку, то выполняется соотношение $(n-1)a_n=-\sum_{k=1}^{n-1}k(\bar a_kC^{n-k}+a_kC^{k-n})$. Если предположение о точном значении $R_0^*(p,1)$ верно, то последнее соотношение дает для класса $F_0(p)$ точную оценку $|a_2|\leqslant4p-2$.

С. А. Гельфер

9929. Полнота теоретико-функциональных инвариантов конгруэнтных вершин круговых многоугольников. Ункельбах (Die Vollständigkeit der funktionentheoretischen Invarianten kongruenter Kreisbogenecken.

Unkelbach Helmut), Monatsh. Math., 1959, 63, № 1, 32—38 (нем.)

В своих работах, посвященных вопросу о конформном отображении обобщенных круговых многоугольников (РЖМат, 1957, 1321; 1958, 4647, 4648), автор нашел выражение для величины угла при вершине такого многоугольника через коэффициенты a_i главной части разложения дифференциального инварианта Шварца $\{z, \zeta\}$ в окрестности точки $\zeta = 0$, переходящей в эту вершину ($z = f(\zeta)$ — функция, отображающая верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на многоугольник). Это выражение F_k принимает одинаковые значения в конгруэнтных вершинах. Другим инвариантом является величина $F_k^0 = \frac{a_k}{|a_k|}$, где a_k — коэффициент при наибольшей отрицательной степени разложения. В настоящей статье автор доказывает теорему, согласно которой любая однозначная функция коэффициентов $a_k, \ldots, a_1, a_k \neq 0$, которая принимает одинаковые значения в конгруэнтных вершинах, выражается как функция инвариантов F_k, F_k^0. С. А. Гельфер

9930. Вариация точек разветвления для аналитических функций. Гудман (Variation of the branch points for an analytic function. Goodman A. W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 2, 277—284 (англ.)

Пусть функция $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ регулярна в круге $|z| < 1$ и отображает его на риманову поверхность R, имеющую, по крайней мере, одну простую точку разветвления в $w = B = f(C)$, $0 < |C| < 1$. Образуем из R новую риманову поверхность R^* путем перемещения точки разветвления из B в $B^* = B + \lambda$, где λ — достаточно малое комплексное число, оставляя границу и остальные точки разветвления на месте и пусть $f^*(z)$, $f^*(0) = 0$, $f^{*\prime}(0) > 0$ отображает $|z| < 1$ на R^*. Автор выводит формулу, выражающую $f^*(z)$ через $f(z)$ и λ:

$$f^*(z) = f(z) - zf'(z)\left\{\frac{\lambda z}{\overline{C^2 f''(C)}(C - z)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\overline{\lambda}}{\overline{C^2 f''(C)}}\right)\frac{\overline{C}z}{1 - \overline{C}z} + \operatorname{Re}\frac{\lambda}{C^2 f''(C)}\right\} + O(\lambda^2).$$

Аналогичная формула выводится и для случая, когда B есть точка разветвления второго порядка. Вывод основан на связи между функцией Грина для R и отображающей функцией и сводится к определению вариации функции Грина в зависимости от указанного перемещения точки разветвления. С. А. Гельфер

9931. Об одной теореме о покрытии в теории функций. Шпак Г. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 218—223

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Если аналитическая функция $f(z)$ в круге $|z| < 1$ регулярна, удовлетворяет условию $|f(z)| < M$ и имеет заданные коэффициенты Маклорена $b_0 = 0$, b_1, b_2, то область значений, принимаемых ею при $|z| < 1$, содержит круг $|\zeta| < e^{-x}M$, где x — наименьший из положительных корней уравнений

$$M|b_2|x\operatorname{sh}x - |b_1|^2(x\operatorname{cth}x - 2)\operatorname{sh}^2 x = M^2x^2,$$

$$M|b_2|\operatorname{sh}x - |b_1|^2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x + M^2x = 0.$$

Радиус этого круга нельзя увеличить. Эта теорема усиливает известную теорему Ландау, в которой у рассматриваемых функций фиксируются только коэффициенты $b_0 = 0$ и b_1, и доказывается аналогично.

Теорема 2. Если аналитическая функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$, имеет мажоранту $\Phi(z) = A_0 + A_1z + \ldots$, $|z| < 1$ и нормирована условиями $f(0) = b_0 = A_0$, $f'(0) = b_1$, то область значений, принимаемых ею при $|z| < 1$, покрывает область значений мажоранты в $|z| < r$, где $r = e^{-x}$, x — положительный корень уравнения $\frac{x}{\operatorname{sh}x} = \left|\frac{b_1}{A_1}\right|$. В частности, находится область, покрываемая областью значений в $|z| < 1$ любой функции $f(z) = 1 + b_1z + \ldots$, регулярной в $|z| < 1$ с $\operatorname{Re}f(z) > 0$; любой функции этого же вида с $|\arg f(z)| < \varphi$; любой функции $f(z) = b_1z + \ldots$, регулярной в $|z| < 1$ с $|\operatorname{Re}f(z)| < 1$. Доказывается также теорема, характеризующая область значений в $|z| < r < 1$ функции $f(z)$ теоремы 2.

Ю. Е. Аленицын

9932. Покрытие площадей для функций, регулярных в кольце. Антонюк Г. К., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 1, 9—10

В работе референта (Тр. Матем. ин-та, АН ГрузССР, 1951, 18, 245) было введено понятие звезды двусвязной римановой поверхности, на которую отображается кольцо $D_R: 1 < |z| < R$ посредством функции $w = f(z) \in \mathfrak{M}$ (функция $w = f(z) \in \mathfrak{M}$, если в кольце D_R $w = f(z)$ регулярна и $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz \geqslant 1$, где C — негомологичный нулю контур), и оценивалась площадь звезды S^*. Автор статьи дает несколько иное определение понятия звезды двусвязной римановой поверхности.

Для оценки площади звезды функции референтом была получена формула $S^* \geqslant \pi(R^2 - 1)$. Пользуясь методом А. Ф. Берманта (Матем. сб., 1947, 20, 55), автору реферируемой статьи удалось получить более сильный результат:

$$(S^* + \pi)(s^* + \pi) \geqslant \pi^2R^4,$$

где S^* — площадь звезды, s^* — площадь ее прообраза; равенство возможно лишь для функции $f(z) = \varepsilon z$, $|\varepsilon| = 1$. Доказательство не приводится.

Примечание референта: В моем определении понятия звезды конечной двусвязной римановой поверхности (см. цит. выше) в формулировке свойства 1) (стр. 245) при напечатании допущена неточность, что не было в свое время замечено мной. Напечатано: „1) всякий луч, выходящий из точки P, содержит точки D^*"; должно быть: „1) всякий луч, выходящий из точки P, имеет точки или D^* или ее границы"; в остальном определение понятия звезды по тексту работы. Г. Я. Хажалия

9933. Действие сосредоточенной силы на эксцентрическое кольцо. Соловьев Ю. И. Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 5, 701—705

При помощи биполярных координат решается плоская задача теории упругости о действии сосредоточенной силы, приложенной к контуру эксцентрического кольца и уравновешиваемой определенной системой напряжений по границам области. В предельном случае получаются напряжения в полуплоскости с круговым вырезом.

И. Г. Арамanович

9934. Кручение стержня квадратного сечения с круглым отверстием. Бабакова О. И., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1958, 14, 53—58

Результаты ранней работы автора (РЖМат, 1956, 8007) о приближенном построении функции, конформно отображающей близкую к кольцу двусвязную область на кольцо, применяются к отысканию комплексной функ-

ции кручения полого стержня, сечение которого есть квадрат с симметрично расположенным круглым отверстием. Эта задача была ранее решена иным методом Д. И. Шерманом (Шерман Д. И., Инж. сб., 1950, **6**), что позволило автору произвести сравнение вычисленных величин напряжений. И. Г. Араманович

9935. Местные напряжения при кручении круглого призматического бруса с эллиптическим несоосным отверстием. Аменздаде Ю. А., Докл. АН СССР, 1958, **19**, № 6, 1118—1121

Решается задача чистого кручения круглого призматического бруса, ослабленного в продольном направлении эллиптической полостью, ось которой параллельна оси бруса. Комплексная функция кручения отыскивается методом Д. И. Шермана, рассматривавшего ранее частный случай данной задачи, когда оси бруса и полости совпадают (Шерман Д. И., Докл. АН СССР, 1948, **43**, № 5). И. Г. Араманович

9936. Об одной задаче безмоментного равновесия составной оболочки. Оболашвили Е. И., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1957, **19**, № 6, 649—652 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **19**, № 6, 649—652 (русск.)

Рассматриваются две безмоментные тонкие оболочки, соединенные вдоль общей границы жестко, средние поверхности которых являются соответственно сферическим сегментом и сегментом параболоида вращения. В этом случае компоненты усилия выражаются с помощью аналитических функций. Ввиду того, что силы напряжения, действующие вдоль общей границы, должны быть непрерывными, для упомянутых аналитических функций получается известная задача Римана — Гильберта для круга, решение которой дается формулой Шварца. Этим автор вполне определяет напряженное состояние в обеих оболочках. В. С. Жгенти

9937. Целые функции конечного порядка и мероморфные функции. Валирон (Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes. Valiron Georges), Enseign. math., 1958, **4**, № 4, 229—271 (франц.)

Продолжение курса лекций, прочитанного в 1948 г. в Каире и Александрии (РЖМат, 1959, 3728). Вначале рассматриваются целые функции класса W, т. е. целые функции $f(z)$ такие, что на некоторой системе замкнутых жордановых дуг Γ_n, охватывающих $z=0$ и стягивающихся к ∞, $\min|f(z)|\to\infty$, а также функции, голоморфные в $|z|<1$, с аналогичным свойством. Рассмотрены римановы поверхности, соответствующие таким функциям. Далее рассматриваются функции, мероморфные в $|z|<R\leqslant\infty$, их римановы поверхности, классификация критических точек, асимптотические пути, теоремы Иверсена и Гросса, затем — характеристическая функция Р. Неванлинна, первая основная теорема, формулы А. Картана и Симидзу — Альфорса, теорема Валирона о валироновских дефектах, сравнение $\ln M(r,f)$ и $T(r,f)$ для целых функций, оценки $T(r,f)$ для решений уравнения Пуанкаре, соотношения между сферической площадью и длиной. Содержание статьи почти полностью покрывается содержанием книги Ж. Валирона «Аналитические функции» (РЖМат, 1956, 3794К) гл. VIII и §§ 49—52 и книги Р. Неванлинна «Однозначные аналитические функции», М.-Л., 1941, гл. VI; гл. X, п. 226; гл. XI, §§ 1, 4; гл. XIII, п. 325. Сверх этого доказано, что, если мероморфная функция представима в виде частного двух целых функций таких, что $\ln M(r)\sim K(\ln r)^2$, то она не может иметь более одного асимптотического значения (Valiron G., C. r. Acad. sci., 1935, **200**, 713—715; Tumura Y., Proc. Imp. Acad. Japan, 1941, **17**, 65—69), а также рассмотрен вопрос о разбиении римановых поверхностей на листы (Valiron G., J. math. pures et appl., 1940, **19**, 339—358). Во многих случаях доказательства только намечены или вовсе не приведены. А. А. Гольдберг

9938. Заметки о максимуме модуля целой трансцендентной функции. Винце (Bemerkungen über den Maximum-Modul ganzer transzendenter Funktionen. Vincze I.), Acta scient. math., 1958, **19**, № 1-2, 129—140 (нем.)

Пусть $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — целая трансцендентная функция, $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|F(z)|$ — максимум модуля,

$$M_n=\min_{0<r<\infty}\frac{M(r)}{r^n}=\frac{M(r_n)}{r_n^n},\qquad n(r)=r\frac{M'(r)}{M(r)}.$$

В работе получены следующие теоремы:

Теорема 1.

$$\limsup_{\liminf}\frac{\ln n(r)}{\ln r}=\limsup_{\liminf}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}.$$

Теорема 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{M_n}=\infty.$$

Теорема 3. Если для пары натуральных чисел n, s $(s>n)$ $r_s/r_n\geqslant 5$, то из коэффициентов a_{n-2}, $a_{n-1},\ldots,a_s$ по крайней мере один не равен нулю.

Теорема 4. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{r_n}=1$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\int_0^{\infty}\frac{|a_n|r^n}{M(r)}dr\right\}^{1/n}=1.$$

Как замечает автор, теорема 1 для верхних пределов при $a_n>0$ есть у Пойа и Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. II, отдел IV, задача 53. Г. А. Фридман

9939. О распределении нулей некоторых полиномов. Михов (Върху разпределението на нулите на някои полиноми. Михов И.), Научни тр. Висш. лесотехн. ин-т, 1957, 5, 277—279 (болг.; рез. русск.)

Рассматривается многочлен $P_n(z)$, все нули которого лежат в кольце $0\leqslant r\leqslant|z|\leqslant 1$. Доказывается, что если α — произвольное положительное число, то все нули многочлена $\alpha P_n(z)+zP_n'(z)$ лежат в кольце

$$\frac{\alpha r}{\alpha+n}\leqslant|z|\leqslant 1.$$

В. С. Виденский

9940. О теореме Пулена — Эрмита. Димитров (Върху една теорема на Пулен — Хермит. Димитров Д.), Научни тр. Висш. лесотехн. ин-т, 1957, 5, 283—288 (болг.; рез. русск.)

Теорема. Если все нули многочлена

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}z\leqslant\alpha$ и все нули многочлена

$$\psi(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_{n-1}z+c_n,\quad c_0\neq 0,\quad c_n\neq 0,$$

лежат влево от действительной оси, то все нули многочлена

$$F(z)=c_0f^{(n)}(z)+c_1f^{(n-1)}(z)+\ldots+c_{n-1}f'(z)+c_nf(z)$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}z\leqslant\alpha$. Доказательство основано на следующей лемме. Если многочлен $f(z)$ удовлетворяет условию теоремы и γ — произвольное комп-

лексное число с неотрицательной вещественной частью, то все нули многочлена $\gamma f(z) + f'(z)$ лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z \leqslant \alpha$. В. С. Виденский

9941. Новое доказательство теоремы Рица. Косис (A new proof of a theorem of Riesz. Koosis P.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 55 (англ.)

$F(x)$ обозначает нормированную функцию ограниченной вариации. Простое применение теоремы Егорова показывает: 1. Если $F'(x)$ конечна почти всюду по мере (dF), то отсюда вытекает абсолютная непрерывность F. Применяя теорему Лебега к $dx\,d(V(x)+x)$, получаем: 2. Если $V(x)$ не убывает, то $V'(x)$ существует, конечная или бесконечная почти всюду по мере (dV). Гармоническим продолжением dF является функция, определенная следующим образом для $|z|<1$: $f(z) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - x)\, dF(x)$, $z = re^{i\theta}$, P — ядро Пуассона. Применяя эти соображения, получаем доказательство следующей теоремы:

Теорема. Если $F(x)$ имеет период 2π, а $f(z)$ аналитична в $|z|<1$, то F абсолютно непрерывна.

9942. Множества предельных значений и простые концы. Коллингвуд (Cluster sets and prime ends. Collingwood E. F. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/6, 12 pp.) (англ.)

Пусть $f(z)$ — функция непрерывная в единичном круге, G_0 — подмножество точек этого круга, для которого $z=1$ является предельной, G_ϑ — множество, полученное вращением G_0 вокруг начала на угол ϑ. Если множество $C_{G_\vartheta} = C_{G_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ предельных значений $f(z)$ в точке $e^{i\vartheta}$, получаемых при условии $z \in G_\vartheta$, совпадает со множеством всех предельных значений $f(z)$ в той же точке, то оно называется максимальным. Работа содержит обзор ранее опубликованных результатов автора и других исследователей, относящихся к изучению распределения на единичной окружности тех точек $e^{i\vartheta}$, для которых соответствующее множество C_{G_ϑ} является максимальным. Результаты эти прилагаются к изучению строения границы односвязной области. А. И. Маркушевич

9943. Граничное поведение и нормальные мероморфные функции. Лехто, Виртанен (Boundary behaviour and normal meromorphic functions. Lehto Olli, Virtanen K. I.), Acta math., 1957, **97**, № 1-2, 47—65 (англ.)

Мероморфная в односвязной области G функция $f(z)$ называется нормальной, если семейство функций $\{f[S(z)]\}$, где $z' = S(z)$ — произвольное конформное отображение области G на себя, будет нормальным в обычном смысле. В многосвязной области G, по определению, функция $f(z)$ нормальна, если она нормальна на универсальной поверхности наложения этой области (Для областей эллиптического и параболического типа легко показывается, что не существует нетривиальных нормальных функций, поэтому область G обязательно гиперболического типа). Примерами нормальных функций могут служить аналитические функции в G, ограниченные в этой области, или мероморфные функции, выпускающие, по крайней мере, три значения. В то же время, как это следует из простых примеров, приводимых авторами, среди функций ограниченного вида существуют функции, не являющиеся нормальными, а нормальные функции не обязаны быть функциями ограниченного вида. Например, модулярная функция не принимает в верхней полуплоскости трех значений и потому нормальная, но она не является, как известно, функцией ограниченного вида. Авторы демонстрируют естественность использования понятия нормальной функции при рассмотрении ряда вопросов, связанных с поведением мероморфной внутри области G функции $f(z)$ вблизи границы Γ. С этой целью они подвергают в § 1 систематическому изучению случай, когда мероморфная функция $f(z)$ имеет в граничной точке P асимптотическое значение α, но не имеет в той же точке углового граничного значения, равного α (Понятие углового граничного значения, хорошо известное в случае круга, естественным образом распространяется на области с произвольной жордановой границей. При этом под углом с вершиной в точке $P \in \Gamma$ понимается подобласть G, точки которой удовлетворяют неравенству $\varepsilon < \omega(z) < 1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где $\omega(z)$ — гармоническая мера какой-либо дуги $\gamma \subset \Gamma$, одним из концов которой служит P).

В теореме 1 показывается, что в рассматриваемом случае для любого $\varepsilon > 0$ существуют в G две кривые с концами в P, по одной из которых $f(z)$ стремится к пределу α, а при приближении z к P по другой $f(z)$ не имеет α своим пределом, причем расстояние между этими кривыми в гиперболической метрике меньше ε. В теореме 2 устанавливается, что если $f(z)$ мероморфна и нормальна в G, то во всякой точке, в которой у $f(z)$ существует асимптотическое значение α, эта функция будет иметь и угловое граничное значение, равное α. При этом отмечается, что существуют аналитические и нормальные в области G функции, не имеющие асимптотических значений ни в одной точке границы. Далее изучаются ограничения на рост $f(z)$ вблизи Γ, налагаемые требованием нормальности $f(z)$ в G. Эти условия формулируются в теореме 3 в терминах сферической производной $\rho(f(z)) = \dfrac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ и гиперболической в области G метрики $d\sigma(z)$ следующим образом: Мероморфная в области G функция $f(z)$ нормальна тогда и только тогда, когда найдется C, $0 < C < \infty$, такое, что при всех $z \in G$

$$\rho(f(z))\,|dz| \leqslant C\,d\sigma(z). \qquad (1)$$

Установленные теоремы позволяют дать обобщение хорошо известной теоремы Линделёфа: Пусть мероморфная в области G функция $f(z)$ стремится к пределу α при произвольном приближении z к точке P вдоль границы. Тогда для равномерного стремления $f(z)$ к α при $z \to P$, $z \in \overline{G}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{z \to P}} \frac{\rho(f(z))\,|dz|}{d\sigma(z)} < \infty.$$

Таким же образом получается (теорема 5) необходимое и достаточное условие для того, чтобы мероморфная в круге $|z|<1$ функция $f(z)$, обладающая в точке $z = e^{i\varphi}$ радиальным пределом α, имела α также своим угловым граничным значением. Вот это условие:

$$\rho(f(z)) = \frac{O(1)}{1-|z|} \text{ в каждом угле } |\arg(1 - ze^{-i\varphi})| < \frac{\pi}{2} - \delta,\ \delta > 0.$$

В последнем параграфе приводится ряд оценок для нормальных функций в направлении обобщения известной теоремы о двух константах и следствий из нее (см., например, Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.— Л., 1941). Так, в теореме 6 доказывается: Если для $f(z)$, удовлетворяющей условию

(1), на граничной дуге $\gamma \subset \Gamma$ имеем: $\overline{\lim_{z\to P}} |f(z)| \leqslant m$, а в подобласти $G^* \subset G$ с границей $\gamma \cup \gamma'$, где γ' — аналитическая кривая, $|f(z)| \leqslant M$, причем $|f(z)| = M$ в некоторой внутренней точке Q кривой γ', то $m \geqslant Me^{-C\lambda_Q (M+1/M)}$; здесь $\lambda_Q = \left(\frac{d\sigma(z)}{|dz|} \Big/ \frac{d\omega(z)}{dn}\right)_{z=Q}$, гиперболическая метрика взята по отношению к области G и $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали к γ' гармонической меры $\omega(z)$ дуги γ относительно области G^*.

В теореме 7 уточняется оценка теоремы 6 для важного в приложениях случая, когда G — верхняя полуплоскость, γ — сегмент действительной оси и G^* — круговой сегмент T_α, содержащий угол α, построенный на γ. Непосредственным следствием теоремы 7 является следующая теорема типа Фрагмена — Линделёфа.

Теорема 8. Пусть $f(z)$ мероморфна и нормальна в $\operatorname{Im} z > 0$; обозначим $m = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|$,

$$C = \sup \frac{\rho(f(z))\,|dz|}{d\sigma(z)} < \infty$$

(по теореме 3).
Тогда

$$m \geqslant \frac{1+\sqrt{1+C^2}}{C} e^{-\sqrt{1+C^2}},$$

если $f(z)$ не является ограниченной, в последнем случае $m \geqslant C$. Обе оценки точные.

В качестве другого применения теоремы 7 доказывается теорема 9: Мероморфная функция не может быть нормальной ни в какой окрестности существенно особой точки (Этот результат легко выводится из хорошо известных теорем. *Реф.*) В заключение показывается, что для последовательности $\{f_n(z)\}$ нормальных в области G функций, удовлетворяющих неравенству (1) с одним и тем же C, из равномерной сходимости к 0 на граничной дуге последовательности $\{|f_n(\zeta)|\}$, $|f_n(\zeta)| = \overline{\lim_{z\to\zeta}} |f_n(z)|$, $\zeta \in \Gamma$, следует равномерная сходимость $\{f_n(z)\}$ к 0 внутри области G. Для последовательностей функций, равномерно ограниченных, этот факт хорошо известен (См. Монтель П., Нормальные семейства, М.— Л., 1936, стр. 154). Г. Ц. Тумаркин

9944. О поведении мероморфных функций в окрестности изолированной особой точки. Лехто, Виртанен (On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity. Lehto Olli, Virtanen K. I., Suomalais. tiedeakat. toimituks. 1957, Sar. AI, № 240, 9 pp.) (англ.)

Для характеристики поведения функции $f(z)$, мероморфной вблизи изолированной особой точки, привлекается сферическая производная

$$\rho(f(z)) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

Простой подсчет показывает, что если $f(z)$ остается мероморфной и в $z=\infty$, то $\rho(f(z)) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$. Если же в $z=\infty$ у $f(z)$ существенная особенность, то устанавливается, что стремление $\rho(f(z))$ к 0 при $z\to\infty$ будет значительно более медленным. В этом случае будет даже существовать универсальная константа k $\left(k \geqslant \frac{1}{4}\right)$ такая, что

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} |z|\,\rho(f(z)) \geqslant k \qquad (1)$$

для всех $f(z)$. При рассмотрении изолированной особенности не в $z=\infty$, а в конечной точке $z=a$, ситуация такова: Если $f(z)$ мероморфна и в $z=a$, то $\rho(f(z))$ ограничена, когда же в $z=a$ существенная особенность, тогда

$$\inf_f \left\{\overline{\lim_{z\to a}} |z-a|\,\rho(f(z))\right\} = k.$$

Доказывается существование функций $f(z)$, медленно растущих вблизи изолированной существенной особенности $z=a$, для которых

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} |z|\,\rho(f(z)) < \infty.$$

Класс функций с этим свойством допускает также иную характеристику. Для этого вводится понятие слабо нормальной функции, являющееся некоторым расширением понятия нормальной функции, рассматривавшегося авторами в другой работе (реф. 9943). Функция $f(z)$, мероморфная в многосвязной области G, называется слабо нормальной, если она нормальна в любой ее односвязной подобласти. Из принципа гиперболической меры следует, что нормальность влечет слабую нормальность. Обратное, вообще говоря, неверно.

Показывается (теорема 2) совпадение класса функций, удовлетворяющих условию (1), с классом функций, слабо нормальных в окрестности $|z_0| < |z| < \infty$ существенно особой точки. В то же время $f(z)$ не может быть нормальной в этой окрестности (реф. 9943).

В теореме 3 устанавливается совпадение класса мероморфных функций, медленно растущих вблизи существенно особой точки $z=\infty$, с классом функций, исключительных в смысле Жюлиа, для которых не существует прямой, соединяющей $z=0$ и $z=\infty$, такой чтобы в любом угле, симметричном относительно этой прямой, функция принимала бы бесконечное число раз все значения, за исключением, быть может, двух (см., например, Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, М. — Л., 1936, § 80). В заключение для функций, удовлетворяющих условию (1), приводится точная оценка характеристической функции: $T(r) = O(\log^2 r)$.
Г. Ц. Тумаркин

9945. Распределение значений и особенностей аналитических функций. Лехто (Distribution of values and singularities of analytic functions. Lehto Olli. Suomalais. tiedeakat. toimituks, 1957, Sar. AI, № 249/3, 16 pp.) (англ.)

Изложение обзорного доклада, сделанного автором на коллоквиуме по теории функций в Хельсинки в августе 1957 г. Дается краткий обзор результатов, полученных за последнее время в чрезвычайно интенсивно развивающемся направлении теории функций, посвященном распределению значений и особенностей однозначных мероморфных в некоторой области комплексной плоскости функций. Перечисляется ряд нерешенных проблем. Содержание: Введение, Неванлинновская теория, Функции ограниченной характеристики, Нормальные функции (определение см. в совместных работах автора и Виртанена (реф. 9943, 9944). Общие области существования. Библ. 35 названий. Г. Ц. Тумаркин

9946. Пикаровские значения функций и их производных. Хейман (Picard values of functions and their derivatives. Hayman W. K.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 52 (англ.)

Пусть $g(z)$ — целая функция. Мы полагаем

$$f(z) = \exp\left\{\int \exp[g(z)]\,dz\right\}.$$

Тогда $f(z) \neq 0$, $f'(z) \neq 0$. С другой стороны, Заксер (Saxer) показал(1923), что если $f(z)$ — целая функция, для которой $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$ не имеют нулей, то тогда $f(z) = e^{az+b}$. Этот результат был получен Чиллагом (Csillag, 1935), предположении, что f и какие-либо две ее производные не обращаются в нуль. Теперь автор устанавливает этот результат, допуская, что $f(z)$ и $f''(z)$ не имеют нулей.

Кроме того, показывается, что если $h(z)$ мероморфна в комплексной плоскости и $h(z) \neq a$, $h^{(l)}(z) \neq b$, где a и b конечны, $b \neq 0$ и $l \geqslant 1$, то $h(z)$ — константа. Это было ранее доказано Мийу (Milloux) (1940) для целых функций.

9947. О порядке роста решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. Шубарт, Виттих (Zur Wachstumsordnung der Lösungen einer Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen. Schubart Hans, Wittich Hans), Arch. Math., 1958, **9**, № 5, 355—359 (нем.)

Известно, что мероморфные в $z \neq \infty$ решения уравнений Пенлеве $w'' = 6w^2 - 6z$ и $w'' = 2w^3 + zw + C$ имеют конечный порядок роста ρ (РЖМат, 1959, 6858К); при этом доказательство существенно опиралось на результаты Бутру (Boutroux P., Acta math., 1904, **28**, 97—224; Ann. scient. École norm. supér. 1913/14). В реферируемой статье содержится доказательство этого факта (и оценка $\rho < 3$), опирающееся только на результаты неванлинновской теории распределения значений.

Примечание референта. Доказательство не представляется референту убедительным. Действительно, в ходе доказательства из (12_1) $dL_{12}(\rho)/d\rho \leqslant 2L_{12}(\rho)/\rho$ $(\rho_0 \leqslant \rho < \infty)$ делается вывод, что $L_{12}(\rho) = O(\rho^2)$, но так как $L_{12}(\rho)$ может иметь точки разрыва на последовательности $\rho_k \to \infty$ (в этих точках в (12_1) должны стоять односторонние производные), то этот вывод нельзя считать обоснованным. Отметим, что Виттих (РЖМат, 1955, 197) уже приводил доказательство, использующее ту же идею, что и доказательство реферируемой статьи, но оно оказалось ошибочным (см. примечание референта к РЖМат, 1957, 5502). Появление новой статьи свидетельствует, по-видимому, о том, что авторы обнаружили эту ошибку, но никакого упоминания об этом в статье нет. А. А. Гольдберг

9948. О построении аналитических функций, обладающих некоторыми особенностями. Шагинян (Sur la construction des fonctions analytiques qui ont certaines singularités. Šaginyan A. L. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 251/9, 6 p.) (франц.)

Пусть L: $z = z(s)$, $0 \leqslant s < \infty$ — жорданова кривая, соединяющая $z = 0$ с $z = \infty$, каждая конечная часть которой спрямляема. Пусть на $0 \leqslant s < \infty$ задана произвольная функция $\delta(s) > 0$. Обозначим $\Omega(L;\delta) = \bigcup_{0 \leqslant s < \infty} \{|z - z(s)| < \delta(s)\}$. Пусть $f(z)$ голоморфна в $\Omega(L;\delta)$, L называется ее δ-направлением Жюлиа, если во всякой области $\Omega(L;(q\delta(s)))$, $0 < q < 1$, $f(z)$ выпускает не более одного значения. Строится целая функция, для которой каждая кривая $L(\alpha)$ из произвольного наперед заданного, непрерывно зависящего от параметра α и покрывающего полностью z-плоскость семейства, является δ-направлением Жюлиа. Построение существенно опирается на одну теорему автора (РЖМат, 1958, 277). Указывается на возможность распространения результата статьи на гиперболический случай. В формуле (3) опечатка: неправильно поставлены скобки. А. А. Гольдберг

9949. Гармонические и аналитические функции нескольких переменных и максимальная теорема Харди и Литлвуда. Раук (Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of Hardy and Littlewood. Rauch H. E.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 171—183 (англ.)

Пусть S_{2n-1} есть гиперсфера $\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2 = 1$ в пространстве n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$. Для функций $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$, аналитических в сфере $\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2 < 1$, устанавливается следующая теорема: Если для всех положительных значений $r < 1$ при некотором $\lambda > 0$,

$$\int_{S_{2n-1}} |f(rz_1, \ldots, rz_n)|^\lambda \, dv \leqslant C^\lambda,$$

где dv — элемент гиперсферы S_{2n-1}, то

$$\int_{S_{2n-1}} \left\{\sup_{0 \leqslant r < 1} |f(rz_1, \ldots, rz_n)|\right\}^\lambda dv < \alpha_n C^\lambda,$$

где α_n не зависит от f.

В том случае, когда функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ аналитична в полицилиндре $|z_\nu| \leqslant 1$, $(\nu = 1, \ldots, n)$ и при некотором $\lambda > 0$ интеграл от $|f(r_1 z_1, \ldots, r_n z_n)|^\lambda$ по его границе $|z_\nu| = 1$, $(\nu = 1, \ldots, n)$ не превышает C^λ, то интеграл от $\sup |f(r_1 z_1, \ldots, r_n z_n)|^\lambda$, где верхняя грань распространяется по всем z_ν и r_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющим условиям $|z_\nu| = 1$, $\dfrac{1 - r_\nu}{1 - r_\mu} \leqslant K$ $(\nu, \mu = 1, \ldots, n)$, не превышает $\alpha_n C^\lambda$, где α_n не зависит от f.

При $\lambda > 1$ аналогичные утверждения имеют место для функций $f(x_1, \ldots; x_n)$ от вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, гармонических соответственно в сфере или в полуцилиндре.

Эти результаты опираются на полученное автором распространение максимальной теоремы Харди и Литлвуда (Hardy G. H., Littlewood J. E., Acta math., 1930, **54**, 81—116) и связаны с одним предложением о покрытиях для множеств в метрическом пространстве с мерой. А. Ф. Тиман

9950. Кернфункции для симметрических областей. Морита (On the kernel functions for symmetric domains. Morita Kiiti), Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Daigaku, 1956, **A5**, 25 May, 190—212 (англ.)

Для симметрических областей Э. Картана автор получает явные выражения для кернфункции Бергмана (см. по этому вопросу также Mitchell J., Duke Math. J., 1952, **19**, 575—583). Указывается обобщение леммы Шварца для областей $\mathfrak{M}_{(n)}$, определенных условиями $\{|Z'Z| < 1,\ 1 + 2\bar{Z}'Z + |Z'Z|^2 > 0\}$, где Z — матрица типа $(n, 0)$ (вектор в комплексном пространстве). Интегральное представление, полученное Митчеллом для одного класса неприводимых аналитических областей (РЖМат, 1957, 3148), обобщается на другие классы подобных областей. Б. А. Фукс

9951. Формулы предельных значений для одного класса функций от двух комплексных переменных, заданных на (p, q)-двоякокруговых областях. Сабишев Д. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 215—217

Автор изучает функции, аналитические в (p, q)-двоякокруговых областях, впервые рассмотренных одним из референтов (РЖМат, 1956, 3784). Вводятся понятия

внешней (D^-) и внутренней (D^+) (p, q)-двоякокруговой области. Автор утверждает, что в D^+ и D^- имеет место:

Теорема 1. Пусть дана функция $f(w, z)$, регулярная в (p, q)-двоякокруговой области, тогда существует единственная, ей соответствующая функция $F(w, z)$, также регулярная в (p, q)-двоякокруговой области, такая, что: 1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 f[r_1(\tau)\, u^p,\ r_2(\tau)\, v^q]\, d\tau = F(w, z), \qquad (1)$$

где $$u = \tau\left(\frac{w}{r_1(\tau)}\right)^{1/p} + (1-\tau)\left(\frac{z}{r_2(\tau)}\right)^{1/q} e^{it}.$$

2) Поведение f и F одинаково в D.

Следствие. Для предельных значений соответствующих функций соотношение (1) также выполняется. Автор рассматривает далее интеграл

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\mu[r_1\xi^p, r_2\eta^q]\, d\xi}{\xi - u} \qquad (2)$$

(C — единичный круг)

и утверждает, что при некоторых предположениях относительно плотности μ поведение интеграла (2) в D^+, D^- и на границе целиком аналогично поведению интеграла типа Коши в случае одного комплексного переменного (аналитичность в D^+ и D^-, формулы Сохоцкого на границе).

Примечание референтов. Все результаты автора, кроме теоремы 1 для D^+, ошибочны. Автор считает, что если $(w, z) \in D^-$, то $|u| > 1$. Это неверно. Например, при $r_1 = \tau$, $r_2 = 1-\tau$, $p = q = 1$ получаем $u = w + ze^{it}$; область D^- в этом случае: $D^- = E\{w, z: |w| + |z| > 1\}$. Так как t — любое число из отрезка $[0, 2\pi]$, то для $(w, z) \in D_1$, $D_1 = E\{w, z: |w| + |z| > 1,\ |w| - |z| < 1\}$, получим $|u| > 1$ при одних t и $|u| < 1$ при других t. Поэтому из того, что $(w, z) \in D^-$, не следует, что $(r_1(\tau)\, u^p,\ r_2(\tau)\, v^q) \in D^-$. Ввиду этого теорема 1 для D^- неверна. Теорема 1 для D^+ и интеграл (2) получены А. А. Темляковым ранее (РЖМат, 1957, 8587; 1958, 9756). Следствие из теоремы 1 верно только при очень жестких ограничениях на функцию f и только для D^+ (РЖМат, 1959, 9033), так как в общем случае f и F на границе D могут не иметь ни угловых граничных значений, ни даже радиальных граничных значений. Ввиду сказанного о поведении $|u|$, интеграл (9) не является, в общем случае, аналитической функцией в D^-. Это легко видно, если, например, положить $r_1 = \tau$, $r_2 = 1-\tau$, $p = q = 1$, $\mu \equiv \text{const}$. В зависимости от $r_1(\tau)$ могут существовать такие подобласти области D^-, где F регулярна, и такие подобласти области D^-, где F не регулярна (Например, если $r_1(\tau) = \sqrt{\tau}$, $r_2(\tau) = \sqrt{1-\tau}$, $p = q = 1$, то во всей области $D^- = E\{w, z: |w|^2 + |z|^2 > 1\}$ функция F не является регулярной). Для интеграла (2) скачка на границе для большинства областей нет, т. е. формулы Сохоцкого не выполняются. Этим интеграл (2) существенно отличается от интеграла Мартинелли—Бохнера (РЖМат, 1958, 285). Эти вопросы изучались в цитированной работе Л. А. Айзенберга. В работе имеются неточности (не наложены необходимые условия на $r_1(\tau)$, $r_2(\tau)$ и т. д.) и опечатки. А. А. Темляков, Л. А. Айзенберг

9952. Устранимые особые множества плюрисубгармонических функций. Лелон (Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques. Lelong Pierre), J. math. pures et appl., 1957, **36**, № 3, 263—303 (франц.)

Рассматриваются классы множеств: 1) Множество η точек аналитического многообразия W^n принадлежит к классу (A) аналитических множеств, если оно замкнуто и для каждой точки $a \in \eta$ можно указать такую область $\omega_a \subset W^n$, что $(\eta \cap \omega_a) = E\{f_1 = 0, \ldots, f_k = 0\}$, где $f_1, \ldots, f_k$ — голоморфные функции в области ω_a; 2) принадлежит к классу (B) комплексно полярных множеств в W^n, если $(\eta \cap \omega_a) = E\{V = -\infty\}$, где V — плюрисубгармоническая функция в области ω_a. 3) Множество η точек области D евклидова пространства действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$ принадлежит к классу (C) действительно полярных множеств в D, если для каждой точки $a \in \eta$ можно указать такую область $\omega_a \subset D$, что $(\eta \cap \omega_a) = E\{S = -\infty\}$, где S — субгармоническая функция в D.

Доказываются, в частности, следующие предложения и теоремы:

Предложение 1. Если W^n является областью комплексного пространства $C^n = R^{2n}$, то $(A) \subset (B) \subset (C)$.

Теорема 2. Пусть E — действительно полярная, замкнутая часть области $D \subset R^{2n}$, $V(M)$ — однозначная субгармоническая функция в области $\Omega = D - E$. Тогда, если в D существует такая субгармоническая функция $U(M)$, что для каждого $\varepsilon > 0$ функция $V(M) + \varepsilon U(M) \to -\infty$, когда точка $M \in \Omega$ стремится к некоторой точке множества E, то функция $V(M)$ имеет единственное субгармоническое продолжение $\widetilde{V}(M)$ на всю область D. При этом функция $\widetilde{V}$ определяется для точек $P \in E$ одним из двух (эквивалентных друг другу) способов: (A) $\widetilde{V}(P) = \limsup V(M)$, где $M \in D - E$ и $M \to P \in E$; (B) $V_1(M) = V(M)$ при $M \in D - E$, $V_1(M) = a$ при $M \in E$ и $\widetilde{V}(P) = \lim_{r \to 0} A[V_1, P, r]$, где $P \in E$. Здесь a — произвольная постоянная, $A[V_1, P, r]$ — среднее функции V_1 в шаре радиуса r с центром в точке P.

Здесь и всюду далее предполагается, что исключение множества E не нарушает связности области D (в других случаях многообразия W^n).

Теорема. Пусть E — замкнутая, действительно полярная часть области $D \subset C^n = R^{2n}$. $V(M)$ — однозначная плюрисубгармоническая функция в области $\Omega = D - E$. Тогда, если в области существует такая субгармоническая функция $U(M)$, что для каждого $\varepsilon > 0$ функция $V(M) + \varepsilon U(M) \to -\infty$, когда точка $M \in \Omega$ стремится к некоторой точке множества E, то функция $V(M)$ имеет единственное плюрисубгармоническое продолжение $\widetilde{V}$ на всю область D. Тут функция $\widetilde{V}$ определяется для точек $P \in E$ способами (A) и (B), указанными в предыдущей теореме.

Предложение. Замкнутое действительно полярное множество не может быть множеством неустранимых особых точек ограниченной голоморфной функции.

Обобщенная теорема Радо. Пусть комплекснозначная функция f задана в области D и ее модуль полунепрерывен сверху в этой области. Тогда, если эта функция голоморфна в тех точках области где $f \neq 0$, то она голоморфна во всех точках области D.

Б. А. Фукс.

9953. Аналитическая структура и аксиома счетности. Кнезер (Analytische Struktur und Abzählbarkeit. Kneser Hellmuth. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 251/5, 8 S.) (нем.)

Пусть M — множество всех пар (μ, ξ), где μ — порядковое число такое, что $0 \leqslant \mu < \omega_1$, ξ — вещественное число такое, что $0 \leqslant \xi < 1$, за вычетом пары $(0, 0)$. Топология, соответствующая лексикографическому упорядочению, превращает M в связное одномерное многообразие,

которое называется полупрямой Александрова (Александров С. П., Math. Ann., 1924, 92, 295). Доказывается что на M можно ввести вещественно-аналитическую структуру, что дает пример одномерного аналитического многообразия, не имеющего счетной базы.

А. Л. Онищик

9954. О модулярных функциях Зигеля. Сатакэ (On Siegel's modular functions. Satake Ichiro), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 107—129 (англ.)

Пусть $\mathfrak{V}$ — топологическое пространство. Локальной униформизирующей системой для открытого множества $U \subset \mathfrak{V}$ называется набор $(\widetilde{U}, G, \varphi)$, где $\widetilde{U}$ — область в n-мерном комплексном пространстве C^n, G — конечная группа аналитических автоморфизмов этой области, φ — непрерывное отображение области $\widetilde{U}$ на U такое, что $\varphi\sigma = \varphi$ $(\sigma \in G)$, индуцирующее гомеоморфизм фактор-пространства $\widetilde{U}/G$ на U. Если $(\widetilde{U}', G', \varphi')$ — локальная униформизирующая система другого открытого в $\mathfrak{V}$ множества, то вложением системы $(\widetilde{U}, G, \varphi)$ в $(\widetilde{U}', G', \varphi')$ называется аналитический изоморфизм λ области $\widetilde{U}$ на подобласть области $\widetilde{U}'$ такой, что для каждого $\sigma \in G$ существует $\sigma' \in G'$, удовлетворяющий условию $\lambda\sigma = \sigma'\lambda$. Хаусдорфово пространство $\mathfrak{V}$ называется V-многообразием, если задано семейство $\mathfrak{F}$ локальных униформизирующих систем для некоторой базы его открытых множеств такое, что если две системы из $\mathfrak{F}$ униформизируют открытые множества $U \subset U' \subset \mathfrak{V}$, то существует вложение первой из этих систем во вторую. Если $\mathfrak{D}$ — ограниченная область C^n и $\mathfrak{G}$ — собственно разрывная группа ее аналитических автоморфизмов, то фактор-пространство $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ обладает естественной структурой V-многообразия. Пусть, в частности, $\mathfrak{D}$ — пространство всех комплексных симметрических матриц $Z = X + iY$ второго порядка с мнимой частью $Y > 0$, а $\mathfrak{G}$ — модулярная группа Зигеля, т. е. группа всех целочисленных симплектических матриц порядка 4, действующая на $\mathfrak{D}$ обычным образом. Доказывается, что V-многообразие $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ может быть реализовано как открытое подмножество некоторого компактного V-многообразия $\overline{\mathfrak{B}}$ так, что $\overline{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{F}$ — подмногообразие в $\overline{\mathfrak{B}}$, гомеоморфное произведению двух сфер Римана.

А. Л. Онищик

9955. О многопериодических функциях. Форти (Le funzioni multiperiodiche. Forti Umberto), Illustr. scient., 1958, **10**, № 109, 20—24 (итал.)

9956. Об одном классе автоморфных функций многих переменных, представимых через периодические функции. Ч. I. Коммутативные группы. Ч. II. Некоммутативные группы. Мюрберг (Über eine Klasse von automorphen Funktionen mehrerer Variablen, die vermittels periodischer Funktionen darstellbar sind. Erster Teil: Kommutative Gruppen. Zweiter Teil: Die nichtkommutativen Gruppen. Myrberg P. J., Suomalais tiedeakat. toimitukas., 1957. Sar. AI, № 235, 10 S.; № 238, 16 S.) (нем.)

Пусть Γ_N — группа преобразований пространства $(x \times y)$ (x и y — комплексные переменные), N порождающих которой имеют вид: $x' = x + \omega_\nu$, $y' = y + \tau_\nu(x)$, где $\nu = 1, 2, \ldots, N$, ω_ν — комплексные числа и $\tau_\nu(x)$ — целые функции.

В первой части рассматривается случай, когда Γ_N — коммутативная группа. Если исключить случай, когда все отношения $\omega_\nu : \omega_\mu$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots, N)$ — рациональные числа, то имеется такая целая функция $\varphi(x)$, что заменой $y = z + \varphi(x)$ порождающие группы Γ_N преобразуются в $x' = x + \omega_\nu$, $z' = z + \tau_\nu$, где $\nu = 1, 2, \ldots, N$, и τ_ν — постоянные. Пользуясь этим и известными предложениями о периодических функциях, автор устанавливает существование целых автоморфных функций группы Γ_N в случаях $N = 1, 2$ и мероморфных в случаях $N = 1, 2, 3, 4$. Рассматривается также исключительный случай, когда $\omega_\nu : \omega_\mu$ — рационально, и случай, когда число переменных больше двух (Ряд, представляющий функцию $\varphi(x)$, может оказаться расходящимся, когда все отношения $\omega_\nu : \omega_\mu$ — действительные иррациональные числа.— *Реф.*).

Во второй части изучается случай некоммутативной группы Γ_2. Можно положить, что $\tau_1(x) \equiv 0$; тогда группа Γ_2 содержит подгруппу Γ с преобразованиями вида $x' = x$, $y' = y + \lambda(x + n\omega_i)$, где $i = 1, 2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $\lambda(x) = \tau_2(x + \omega_1) - \tau_2(x)$. Подгруппа Γ может быть разрывной только в однопериодическом случае, когда функции $\lambda(x + n\omega_i)$ равны целым кратным одной функции (основного периода), и в двоякопериодическом, когда функции $\lambda(x + n\omega_i)$ выражаются линейно с целыми коэффициентами через две функции (через два основных периода). В однопериодическом случае $\lambda(x) = \text{const}$ и существуют (при условии $I(\omega_1 : \omega_2) \neq 0$) целые автоморфные функции группы Γ_2. Находится вид функции $\lambda(x)$ и в двоякопериодическом случае, но в этом случае не существует мероморфных во всем пространстве $(x \times y)$, автоморфных невырожденных функций подгруппы Γ. Подгруппа Γ может быть (в двоякопериодическом случае) функциональной только в частном случае, когда $\omega_1 : \omega_2$ рационально.

А. Г. Нафталевич

9957. Угловые граничные значения субгармонических функций. Толстед (Non-tangential limits of subharmonic functions. Tolsted Elmer), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 27, 321—333 (англ.)

Рассматриваются граничные значения субгармонических функций класса A в единичном круге, т. е. такие субгармонических функций $u(z)$, что $u^+(z)$ имеет гармоническую мажоранту во всем единичном круге. Автор ссылается вначале на ранее построенный им пример ограниченной субгармонической функции в единичном круге, нигде на окружности не имеющей угловых граничных значений (Tolsted E., Proc. Amer. Math. Sos., 1950, **1**, 636—647). Следует заметить, что указанный пример неверен, так как построенная там „супергармоническая" функция $w_2(P)$ на самом деле, как легко проверить, не является супергармонической в точках малых окружностей C_{ni} (см. стр. 646 цитированной работы). Корректные примеры ограниченных субгармонических функций без угловых граничных значений см. в работе Цудзи (реф. 9958) и в диссертации референта (МГУ, 1959).

Далее доказываются следующие две теоремы для субгармонических функций $u(z) = u(re^{i\Theta})$ класса A в единичном круге $r < 1$.

1) пусть $U(z_0)$ — среднее от $u(z)$ по площади круга $C(z_0, R)$ с центром z_0 и радиусом $R = k(1 - r_0)$, $0 < k < 1$. Тогда почти всюду на единичной окружности существуют конечные предельные значения

$$\lim_{z_0 \to e^{i\xi}} U(z_0) = \overline{U}(\xi), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi,$$

по всем некасательным путям.

2) Пусть распределение масс $F(e)$ субгармонической функции $u(z)$ абсолютно непрерывно в единичном круге и пусть $f(\rho e^{i\varphi})$ — производная аддитивной неотица-

тельной функции множества $F(e)$. Если выполнено условие

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho) f(\rho e^{i\varphi}) \ln^+ f(\rho e^{i\varphi}) \rho \, d\rho \, d\varphi < +\infty,$$

то $u(z)$ почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения.

Доказательство разбито на ряд лемм и в основном следует идеям Литлвуда (Littlewood J. E., Proc. London Math. Soc., 1928, 28, №2, 383—394).

В работе имеются неточности Так, например, лемма 2. 2 сформулирована неточно, а приводимое в работе доказательство леммы 2. 6 представляется неубедительным, так как, показав, что каждый из n (причем относительно числа n известно только, что $n \leqslant B/\sigma$) некоторых интегралов $\leqslant A\sigma$, автор заключает отсюда, что и сумма этих интегралов $\leqslant A_1\sigma$ (A, A_1, B, — константы). Имеются также мелкие опечатки.

Е. Д. Соломенцев

9958. Теорема Литлвуда о субгармонических функциях в единичном круге. Цудзи (Littlewood's theorem on subharmonic functions in a unit circle. Tsuji Masatsugu), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1956, 5, № 1, 3—16 (англ.)

Рассматриваются граничные значения субгармонических функций класса A в единичном круге $G: |z| < 1$. Говорят, что субгармоническая функция $u(z)$ принадлежит классу A в C, если $u^+(z)$ имеет в C гармоническую мажоранту. Это условие равносильно каждому из следующих:

$$\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta}) \, d\theta = O(1), \quad \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = O(1); \; 0 < r < 1.$$

В § 1 формулируется теорема Литлвуда о существовании у субгармонических функций класса A радиальных граничных значений почти всюду на единичной окружности (Littlewood J. E., Proc. London Math. Soc., 1928, 28, 383—394) и основной результат автора: Если субгармоническая функция $u(z) \in A$ и

$$\Omega(r) = -\int_{|a|<r} d\mu_a(e) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right), \; 0 < \lambda < 1, \quad (1)$$

где $\mu(e)$ — аддитивная функция множества $e \subset C$, представляющая собой распределение неположительных масс функции $u(z)$, то на окружности $|z| = 1$ существует такое множество E полной меры, что для всякой точки $e^{i\theta} \in E$ и для почти всех ψ из интервала $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ существует предел

$$\lim u(z) = u(e^{i\theta}) \neq \infty,$$

когда $z \to e^{i\theta}$ по лучу, проходящему через $e^{i\theta}$ и составляющему угол ψ с радиусом-вектором точки $e^{i\theta}$. Условие (1) равносильно следующему:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \, d\theta\right) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right), \; 0 < \lambda < 1.$$

В § 2 доказываются вспомогательные предложения, а в § 3 и 4 дается доказательство результатов Литлвуда, несколько отличающееся от предложенного Литлвудом. В § 5 доказывается сформулированная выше основная теорема.

Кроме того, в замечании к § 4 построен пример ограниченной субгармонической в единичном круге функции $u(z)$, не имеющей нигде на окружности $|z| = 1$ угловых граничных значений. Несмотря на свою простоту, это первый пример такого рода. Отметим, что в примере автора распределение масс функции $u(z)$ есть сингулярная функция множества. В § 1 высказывается гипотеза, что основная теорема верна и без предположения (1).

Примечание референта. Вспомогательные предложения автора содержатся в сущности в известной монографии И. И. Привалова (Субгармонические функции, М.—Л., ГТТИ, 1937, часть II, гл. III). В частности, лемму 2 вместе с доказательством можно найти на стр. 186 этой книги. Е. Д. Соломенцев

9959. Теоремы о субгармонических функциях в единичном круге. Каваками (Theorems on subharmonic functions in the unit circle. Kawakami Yoshiro), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 4, 158—163 (англ.)

Цудзи доказал (реф. 9958), что если субгармоническая функция $u(z)$ класса A в единичном круге удовлетворяет дополнительному условию

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \, d\theta\right) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right), \; 0 < \lambda < 1, \quad (1)$$

то на окружности $|z| = 1$ существует такое множество E полной меры, что в каждой точке $e^{i\theta} \in E$ для почти всех ψ из интервала $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ существует конечный предел $\lim u(z) = u(e^{i\theta})$, когда $z \to e^{i\theta}$ вдоль луча, проходящего через точку $e^{i\theta}$ и составляющего с нормалью в $e^{i\theta}$ угол ψ.

В реферируемой статье доказывается следующая теорема, своеобразно дополняющая указанную теорему Цудзи. Если субгармоническая функция $u(z)$ принадлежит классу A в единичном круге и удовлетворяет условию Цудзи (1), то на окружности $|z| = 1$ существует такое множество E полной меры, что в каждой точке $e^{i\theta} \in E$ соотношение

$$\lim_{\rho \to 0} u(z) = \lim_{\rho \to 0} u\left[e^{i\theta} - \rho e^{i(\theta-\varphi)}\right] = u(e^{i\theta}) \neq \infty$$

выполняется равномерно по φ на любом отрезке $|\varphi| \leqslant \varphi_0$, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, когда $\rho \to 0$, оставаясь вне некоторого множества $\Delta(\theta, \varphi_0)$ значений ρ конечной логарифмической длины.

При доказательстве этой теоремы используется одна лемма Цудзи из упомянутой работы. Е. Д. Соломенцев

9960. Об одном определении квазиконформного отображения. Песин И. Н., Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1957, вип. 7, ч. 3, 257—259

Доказывается, что введенные Каччополи (Caccioppoli R., Atti Accad. naz. Lincei, 1952, **13**, № 5, 197—204) отображения плоскости z на плоскость w, $w = f(z)$, именуемые в статье q-отображениями, являются общими Q-квазиконформными отображениями, по терминологии автора. Этот факт используется для доказательства одного недоказанного утверждения работы Каччополи (см. предыдущую ссылку). Имеются опечатки: стр. 257, 4 строка снизу, вместо „Q“ должно быть „q“; 2 строка снизу, вместо „В. В. Меньшова“ должно быть „Д. Е. Меньшова“.

Примечание референта. Условие а) определения q-отображений следует из б) и в) (РЖМат, 1959, 9125). Б. В. Боярский

9961. Единственность отображений, осуществляемых решениями уравнений эллиптического типа. Мак-

Лауд, Герген, Дрессел (Uniqueness of mapping pairs for elliptic equations. McLeod R. M., Gergen J. J., Dressel F. G.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 2, 173—181 (англ.)

Рассматриваются решения линейной системы уравнений эллиптического типа

$$v_y = \alpha u_x + \beta u_y, \quad -v_x = \gamma u_x + \delta u_y, \qquad (1)$$

заданной в области D, осуществляющие гомеоморфное отображение области $\overline{D}$ на некоторое множество T. Предполагается, что граница D^* области D есть простая замкнутая кривая Жордана, принадлежащая классу Ah по Лихтенштейну. Относительно коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ системы (1) предполагается, что они непрерывны в $\overline{D}$, принадлежат классу C^1 в D, причем их первые производные ограничены в D. В этих предположениях доказывается, что непрерывное в $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемое в D решение системы (1), осуществляющее гомеоморфное отображение области $\overline{D}$ на T, при обычных добавочных условиях нормировки, единственно в классе решений, непрерывных в $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемых в D.

Работа по используемому в ней аппарату является продолжением работы двух авторов (Gergen J. J., Dressel F. G., Duke Math. J., 1952, **19**, 435—444).

Примечание референта. В работе референта (РЖМат, 1959, 9125) теорема единственности доказана в предположении, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — измеримые ограниченные функции, не удовлетворяющие каким бы ни было предположениям гладкости. Кроме того, в некоторых случаях снимается также ограничение на кривую D^*, но вводится некоторое предположение о границе T. Там же доказаны теоремы единственности для некоторых квазилинейных систем вида (1).

Б. В. Боярский

9962. Об общей эллиптической системе первого порядка и об автоморфных квазианалитических функциях на поверхностях. Данилюк И. И., Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 2, 253—255

Об автоморфных квазианалитических функциях на поверхностях. Данилюк И. И., Матем. сб., 1957, **41**, № 1, 97—104

1. Результаты автора по обобщенным аналитическим функциям на поверхностях (РЖМат, 1959, 9126) частично переносятся на системы таких функций $f^s = u^s + iv^s$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$, определяемых как решения эллиптической системы дифференциальных уравнений первого порядка, которой придается следующий вид:

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} = \overset{(i)}{c}{}^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial v^i}{\partial x^\beta} + \overset{(i)}{d}{}^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial v^{i-1}}{\partial x^\beta} + \overset{(i)}{g}_{\alpha r} u^r + \overset{(i)}{g}_{\alpha r} v^r + \overset{(i)}{\varphi}_{\alpha}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2;\ i, r = 1, 2, \ldots, m;\ \overset{(j)}{d}{}^{\beta}_{\alpha} \equiv 0$$

для $j = 1$ и некоторых других индексов) или, если перейти к f^i и использовать

$$\frac{\partial}{\partial_j \overline{z}^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i \overset{(l)}{c}{}^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right), \text{ где } z = x^1 + i x^2,$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial_i x^\alpha} = \overset{(l)}{b}{}^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial f^{i-1}}{\partial x^\beta} - \overset{(i)}{b}{}^{\beta}_{\alpha} \overline{\frac{\partial f^{i-1}}{\partial x^\beta}} +$$

$$+ \overset{(i)}{A}_{\alpha r} f^r + \overset{(i)}{B}_{\alpha r} \overline{f^r} + \overset{(i)}{\Phi}_{\alpha}.$$

Для области $G \subset R$ эта система приводится к эквивалентной системе интегральных уравнений вида

$$f^r(z) = F(z) + \iint_G [\Gamma^r_s(\zeta, z) f^s(\zeta) + \widetilde{\Gamma}^r_s(\zeta, z) \overline{f^s(\zeta)}]\, d\sigma_\zeta,$$

где F связана с граничными значениями f^r. Отмечается приложение к системе уравнений Дирака в релятивистской теории электрона.

Во второй части заметки дается построение квазианалитических функций $f = u^1 + iu^2$ на R, определяемых с помощью эллиптической системы уравнений

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \alpha^j_i \frac{\partial x^2}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, 2), \qquad (1)$$

инвариантных вместе с (1) относительно некоторой собственно разрывной группы преобразований (движений) $\{T_k\}$ метризованной поверхности R в себя. Предполагая, что R содержится в объемлющей поверхности R', рассматривается квазианалитическая функция h на R' и доказывается, что ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} [h\{T_k(Q)\} - h\{T_k(Q)\}] J_k^p(Q_0)$$

(Q — переменная тока R, Q_0 — фиксированная точка R, J_k — функциональный определитель преобразования T_k, $p \geqslant 2$; в заметке нужный для сходимости множитель J_k^p пропущен, но он имеется в реферируемой здесь одновременно статье автора). Доказательство сходимости опирается на построение гильбертова пространства квазианалитических функций f в области $D \subset R$ с нормой $\|f\| = \sqrt{(f, \overline{f})}$, $(f, \overline{g}) = \frac{i}{2} \iint_D \frac{D(f, \overline{g})}{D(x, y)} dxdy$ (РЖМат, 1958, **4717**) и теорему автора о том, что из сходимости по норме следует равномерная сходимость внутри D.

2. Дается развернутое изложение второй части рассмотренной выше заметки автора.

Примечание референта. Некоторые свойства h и утверждение о равномерной ограниченности функциональных определителей, используемые при доказательстве, остались референту непонятными.

Л. И. Волковыский

См. также: 9975, 10102, 10104, 10115, 10152

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

9963. Доказательство теорем существования в целом решений некоторых дифференциальных уравнений. Хаймович (Une démonstration globale du théorème d'existence pour les intégrales de certaines équations différentielles. Haimovici Adolf), An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1958, Sec. 1, **4**, № 1, 53—60 (франц.; рез. рум., русск.)

Пусть B — пространство Банаха и R — действительная прямая. Пусть $f(t, x)$ — непрерывная функция в $\Omega = R \times B$ и имеет значения в B. Относительно пространства B в области Ω мы будем предполагать следующее: а) Если F — замкнутое множество в $B \times R$

и $f(t,x)$ — непрерывная функция, определенная на F и имеющая значения в B, то существует функция $g(t,x)$ являющаяся продолжением $f(t,x)$, ограниченная в $R\times B$ и равная $f(t,x)$ на F. Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad (t,x)\in\Omega\subset R\times B \qquad (1)$$

и $f(t,x)$ непрерывна на Ω. Пусть $\{F_n\}$ — семейство замкнутых и ограниченных множеств, удовлетворяющих условиям: $F_n\subset F_{n+1}$, $(t_0,x_0)\in F_n$, $\bigcup_n F_n=\Omega$ $(n=1,2,\ldots)$. Согласно сделанной гипотезе, существует функция $g_n(t,x)$, непрерывная и ограниченная в $R\times B$ и равная $f(t,x)$ на F_n. Пусть M_n — граница $g_n(t,x)$, т. е. пусть $\|g_n(t,x)\|\leqslant M_n$; далее предполагаем, что операторы

$$A_n x=x_0+\int_{t_0}^{t} g_n(t,x)\,dt,\quad (t_0,x_0)\in\Omega,$$

$$t\in I\equiv[t_1,t_2],\ t_1\leqslant t_0\leqslant t_2,$$

$$x=x(t)\in C^0(t^1,t^2),\ x(t_0)=x_0$$

вполне непрерывны, каковы бы ни были n, t_1 и t_2. В этих предположениях уравнение (1) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x_0$, и если график его заключается в F_n, а концы графика находятся на границе F_n, построенное решение может быть продолжено следующим образом. Пусть F' — ограниченное замкнутое множество, удовлетворяющее условиям $F_n\subset F'$, тогда решение можно продолжить вправо и влево до границы F'. Условия теоремы, в частности, осуществляются, если Ω — звездообразная область и оператор

$$A^0 x=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau))\,d\tau,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

где точки $(\alpha,x(\alpha))$, $(\beta,\beta(\alpha))$ внутри Ω, вполне непрерывен, т. е. в этом случае, каково бы ни было $F_n\in\Omega$ существует решение, доходящее до границы F_n.

Кроме того, имеет место следующая теорема: Пусть B имеет базис $\{e_n\}$ такой, что каждый элемент $x=\sum_1^\infty \xi_l e_l$, где ξ_l — функционалы относительно x. Пусть далее $\|e_l\|=1$ и ряд $\sum_l \|\xi_l\|_{C_\bullet}$ сходится. Здесь $\|\xi_l\|=C=\sup_{x\subset C_\bullet}|\xi_l(x)|$; норма в B определена формулой $\|x\|_B=\sum_{l=1}^{n}|\xi_l|_{C_\bullet}$. Пусть далее $f(t,x)$ — непрерывная функция в $\Omega\in R\times B$ и имеющая значение в B и пусть f_l (составляющие f_l) также непрерывные по t и x. Тогда операторы, определенные в начале статьи, оказываются вполне непрерывными, и решение, график которого находится в F_n, может быть продолжено до границы замкнутого множества F_{n+1}, которое удовлетворяет условию $F_n\subset F_{n+1}\subset\Omega$. Автор недостаточно учитывает имеющуюся литературу поэтому вопросу. В. В. Немыцкий

9964. Об одной оценке решения дифференциального уравнения первого порядка. Муратов Л. М., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 12, 53—55

Для уравнения

$$f(x,y)\,dy+[\varphi(x,y)+g(x,y)]\,dx=0,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $f>0$ и f,φ,g — непрерывные функции в некоторой области $G(x,y)$, на основе теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах построен приближенный метод.

Область $G(x,y)$ разбивается прямыми $x=x_l$ $(i=1,\ldots,n-1)$ на n частей. Приближенные решения $z_{1n}(x)$ и $z_{2n}(x)$ определяются следующим образом: $z_{1n}(x_0)=z_{2n}(x_0)=y(x_0)$, а на отрезке $[x_l,x_{l+1}]$ $z_{kn}(x)$ суть решения уравнений

$$f(x,y)\,dy+[\varphi(x,y)+g_{kl}(x)]\,dx=0,$$

$$y_k(x_l)=z_{kn}(x_l)\ (k=1,2).$$

Здесь $g_{1l}(x)=\inf_{y\in G_l} g(x,y)$, $g_{2l}(x)=\sup_{y=G_l} g(x,y)$, G_l — криволинейная трапеция, образованная прямыми $x=x_l$, $x=x_{l+1}$ и решениями уравнений

$$f(x,y)\,dy+[\varphi(x,y)+\inf_{y\in G} g(x,y)]\,dx=0,$$

$$y(x_l)=z_{1n}(x_l),$$

$$f(x,y)\,dy+[\varphi(x,y)+\sup_{y\in G} g(x,y)]\,dx=0,$$

$$y(x_l)=z_{2n}(x_l).$$

Утверждается, что $z_{1n}(x)\geqslant y(x)\geqslant z_{2n}(x)$ и при $n\to\infty$ $z_{1n}(x)-z_{2n}(x)\to 0$. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

9965. Аппроксимация нелинейных дифференциальных уравнений линейными высшего порядка. Каляев А. В., Тр. Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1958, 2, 105—110

Предлагается решение $y=y(t)$ нелинейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}=f(y^{(n-1)},\ldots,y',y,t),$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y^{(k)}(0)=y_0^{(k)}$ $k=0,1,\ldots,n-1)$, приближенно искать в виде

$$y=\sum_{k=1}^{m} a_k e^{\alpha_k t}.$$

Коэффициенты a_k и α_k определяются из системы уравнений

$$y_0^{(p)}=\sum_{k=1}^{m} a_k \alpha_k^p\ (p=0,1,\ldots,2m-1).$$

Доказательство сходимости процесса не является математически строгим.

Примечание референта. Автор вместо общепринятого термина „целая аналитическая функция" пользуется нечетко сформулированным понятием „идеально гладкая функция". Для бесконечно дифференцируемых функций из равенства $\varphi_1^{(k)}(0)=\varphi_2^{(k)}(0)$ $(k=0,1,2,\ldots)$, вообще говоря, не следует, что $\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)$. Б. П. Демидович

9966. Теорема о неподвижной точке и ее применение в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Замфиреску (O teoremă de punct fix cu aplicaţii în teoria ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Zamfirescu Ion), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, **9**, № 2, 321—327 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор приводит ряд утверждений без доказательств. Эти утверждения составили предмет исследований его дипломной работы. Речь идет об одной теореме о неподвижной точке при сложных условиях. Если функции, о которых говорится в теореме, равно ограничены и множество, на котором они определены, кон-

ексно, то эта теорема обращается в следствие теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Сформулированная теорема применяется к доказательству существования решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где f_i ограничены в области $D \subset R^{n+1}$ и приближенно-непрерывны в $P_0 \in D$, в проекции на Ox. Введя понятие квазисходимости (сильной и слабой), автор доказывает существование решения уравнения в частных производных (или системы уравнений) для задачи Коши. Доказательства, равно как и некоторые добавления будут опубликованы в другой статье. I. Barbălat

9967. О некотором дифференциальном уравнении. Раджагопал (On a ceratin differential equation. Rajagopal A. K.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 343, 45 (англ.)

9968. Решение систем линейных дифференциальных уравнений в квадратурах. Бернстейн, Трусделл (The solution of linear differential systems by quadratures. Bernstein B., Truesdell C.), J. reine und angew. Math., 1957, **197**, № 1-2, 104—111 (англ.)

Система $x = A(t)\,x$ итегрируется в квадратурах, если матрица $A(t)$ треугольна. Если $A(t)$ имеет клеточное стр сение и одна из клетск треугольна, то интегрируется часть системы и тем самым ее порядок понижается.

В работе приводятся условия, при которых систему можно привести к такому виду преобразованием $y = Tx$ с постоянной матрицей T. Р. Э. Виноград

9969. О некоторых свойствах однородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Густый (O některých vlastnostech homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu. Hustý Zdeněk), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 2, 202—213 (чешск.; рез. русск., нем.)

Доказано, что уравнение $y''' + 4a_3y''' + 6a_2y'' + 4a_1y' + a_0y = 0$, является итерацией уравнения $A_1y' + A_0y = 0$, $A_1 \neq 0$, тогда и только тогда, когда

$$4a_3^3 + 6a_3a_3' - 6a_3a_2 + a_3'' - 3a_2' + 2a_1 = 0;$$

$$44a_3^4 + 288a_3^2a_3' + 140a_3a_3'' + 84a_3'^2 + 20a_2''' + 12a_3^2a_2 - 150a_3a_2' + 12a_3'a_2 - 81a_2^2 - 45a_2'' + 25a_0 = 0.$$

Затем автор рассматривает некоторые свойства инвариантов уравнения (1). В. А. Кондратьев

9970. Об одном дифференциальном уравнении Хальма. Долапчиев, Чобанов (Über eine Differentialgleichung von J. Halm. Dolaptschiew Blagowest, Tschobanow Iwan), Math. Nachr., 1956, **15**, № 3, 197—200 (нем.)

Авторы показывают, что уравнение

$$4(ax^2 + bx + c)^2 z'' + [(ax^2 + bx + c)\,\Theta + \frac{3}{4}(b^2 - 4ac)]\,z = 0$$

имеет решение

$$z = (c_1 \cos\lambda\xi + c_2 \sin\lambda\xi)(ax^2 + bx + c)^{1/4},\ \Theta = a + 4\lambda^2 > a,$$

$$z = (c_1 \cos h\,\lambda\xi + c_2 \sin h\,\lambda\xi)(ax^2 + bx + c)^{1/4},\ \Theta = a - 4\lambda^2 < a,$$

где $\xi = \int (ax^2 + bx + c)^{-1/2}\,dx$, следовательно, уравнение $4(ax^2 + bx + c)^2 z'' + [-4a\alpha(1 + \alpha)(ax^2 + bx + c) + (1 - \alpha^2)(b^2 - 4ac)]\,z = 0$

имеет решение

$$z = [c_1 \int (ax^2 + bx + c)^{-\alpha - 1}\,dx + c_2]\,(ax^2 + bx + c)^{(\alpha+1)/2}.$$

В частности, значения a, b, c этого уравнения получены для случая уравнения, изученного Хальмом

$$(x^2 + 1)^2 z'' + (Ax^2 + B)\,z = 0.$$

D. C. Gilles

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 3, 273.

9971. Принцип зависимости в аналитической теории дифференциальных уравнений. Винтнер (On the principle of subordination in the theory of analytic differential equations. Wintner Aurel), Acta math., 1956, **96**, № 3-4, 143—156 (англ.)

Если $f(z, w)$ — голоморфная функция от двух комплексных переменных z и w, определенная в бицилиндре $D(|z| < 1,\ |w| < 1)$, символ $\|f\|$ означает радиус сходимости степенного ряда, в который разложено решение $w(z)$ дифференциального уравнения.

$$dw/dt = f(z, w),\quad w(0) = 0.$$

Полагая $M = \sup|f|$ и предполагая $M < +\infty$, можно $\|f\|$ снизу ограничить функцией от M. После критического и сравнительного изучения предыдущих результатов, полученных в этой области, начиная с классических исследований Коши, автор получает новый предел. Точнее, если $f = \sum c_{mn} z^m w^n$, $f^* = \sum |c_{mn}|\,z^m w^n$, то $\|f\| \geqslant \|f^*\| \geqslant 1$, если $M \leqslant 1/2$, $\|f\| \geqslant \|f\|^* \geqslant \sin(\pi/4M)$, если $M \geqslant 1/2$. C. Miranda

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 10, 798.

9972. Аналитическое приведение системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Сибуя (Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre. Sibuya Yasutaka), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 1958, Sec. 1, **7**, № 5, 527—540 (франц.)

Рассматривается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^\sigma \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon)\,y, \qquad (1)$$

$\sigma > 0$ — целое, матрица $A(x, \varepsilon)$ голоморфна по комплексным переменным x и ε в области $D_0(|x| < \delta_0,\ 0 < |\varepsilon| < \rho_0,\ |\arg\varepsilon| < \alpha_0\ (\delta_0, \rho_0, \alpha_0 > 0)$ и имеет асимптотическое разложение $A(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x)\,\varepsilon^\nu$ ($A_\nu(x)$ голоморфны по x при $|x| < \delta_0$).

Преобразование $y = P(x, \varepsilon)\,z$, где $P(x, \varepsilon)$ голоморфно по x и ε в области $D(|x| < \delta,\ 0 < |\varepsilon| < \rho,\ |\arg\varepsilon| < \alpha)$, $(0 < \delta \leqslant \delta_0,\ 0 < \rho \leqslant \rho_0,\ 0 < \alpha \leqslant \alpha_0)$ и $P(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x)\,\varepsilon^\nu$ ($P_\nu(x)$ голоморфны по x при $|x| < \delta$) приводит систему (1) к виду

$$\varepsilon^\sigma \frac{dz}{dx} = B(x, \varepsilon)\,z.$$

Доказано, что при соответствующем выборе области D можно определить $P(x, \varepsilon)$ таким образом, чтобы было $P_0(0) = E$ и чтобы матрица $B(x, \varepsilon)$ имела каноническую форму

$$B(x, \varepsilon) = \left\| \begin{matrix} B_1(x, \varepsilon), & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0, & B_s(x, \varepsilon) \end{matrix} \right\|,$$

где $B_s(x, \varepsilon)$ — n_j-мерные матрицы $\left(\sum n_j = n\right)$.

Для уравнения n-го порядка

$$\varepsilon^n \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{k=1}^{n} p_k(x, \varepsilon)\, \varepsilon^{n-k} \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0,$$

где $p_k(x, \varepsilon)$ голоморфны по x и ε в D_0 и $p_k(x, \varepsilon) \simeq \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{k\nu}(x)\, \varepsilon^{\nu}$ ($p_{k\nu}(x)$ голоморфны по x при $|x| < \delta_0$) как следствие получается результат: если

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} p_{k0}(0)\, \lambda^{n-k} = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \quad (\lambda_j \neq \lambda_k; \quad j \neq k),$$

то при надлежащем выборе D можно вышеуказанной заменой переменных привести это уравнение к уравнению вида

$$\varepsilon^{n_j} \frac{d^{n_j} z_j}{dx^{n_j}} + \sum_{k=1}^{n_j} q_{jk}(x, \varepsilon)\, \varepsilon^{n_j-k} \frac{d^{n_j-k} z_j}{dx^{n_j-k}} = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, s),$$

где $q_{jk}(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{jk\nu}(x)\, \varepsilon^{\nu}$ в D и

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} p_{k0}(x)\, \lambda^{n-k} = \prod_{j=1}^{s} \left(\lambda^{n_j} + \sum_{k=1}^{n_j} q_{jk0}(x)\, \lambda^{n_j-k}\right),$$

$$\lambda^{n_j} + \sum_{k=1}^{n_j} q_{jk0}(0)\, \lambda^{n_j-k} = (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

А. Б. Васильева

9973. Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной. Фаге М. К., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 5, 874—877

В предыдущей заметке (РЖМат, 1959, 6874) автор показал, что любые два дифференциальные оператора с непрерывными коэффициентами

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_0(x), \qquad (1)$$

$$M = \frac{d^n}{dw^n} + q_{n-1}(w) \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} + \ldots + q_0(w) \qquad (2)$$

локально линейно эквиваленты, т. е. существуют пространства функций A_{L,X_0} и A_{M,W_0}, определенные в окрестностях точек X_0 и W_0 и оператор T такие, что если M рассматривать на A_{M,W_0} и L — на A_{L,X_0}, то

$$M = T^{-1} L T.$$

В реферируемой заметке строится интегральное представление для оператора T, в случае когда коэффициенты оператора (2) суть аналитические функции в некоторой области G.

Пусть $F_k(w, x)$ есть решение задачи Коши

$$M_w F_k = L_x F_k, \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial^s F_k}{\partial x^s}\right|_{x=x_0} = \begin{cases} 0, & s \neq k \\ f(w), & s = k \end{cases} \quad (s = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (4)$$

Тогда

$$Tf(w) = g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left.\frac{\partial^k F_k(w, x)}{\partial w^k}\right|_{w=w}$$

Выражая решение задачи (3)—(4) явно через $f(w)$ и предполагая, что $p_k(x) \in C^k$, автор дает представление оператора T с помощью определенных интегралов различной кратности (до $(n-1)$-й кратности). При этом применяется разработанное автором обобщение метода Римана (РЖМат, 1959, 377). В конце заметки приводится явная формула для оператора T в случае $n = 3$, $x_0 = w_0 = 0$. Эта формула имеет следующий вид:

$$Tf(w) = g(x) = f(x) + \int_0^{|x|} K_2(x, t) f[\pm(\varepsilon_1 t + \varepsilon_2(|x| - t))]\, dt + \int_0^{|x|} K_3(x, t) f[\pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_3(|x| - t))]\, dt + \int_0^{|x|} ds \int_0^{|x|-s} K_{23}(x, s, t) f[\pm(\varepsilon_1 s + \varepsilon_2 t + \varepsilon_3(|x| - s - t))]\, dt.$$

Здесь ε_1, ε_2, ε_3 — кубические корни из единицы, K_2, K_3, K_{23} — функции, полученные из обобщенной функции Римана для задачи (3)—(4). Б. М. Левитан

9974. Конформное отображение, даваемое рядом Лагранжа и решением уравнения $dw/dz = f(w)$. Хартман, Винтнер (On conformal maps defined by Lagrange's series and by solutions of $dw/dz = f(w)$. Hartman Phillip, Wintner Aurel), Rend Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 2, 282—292 (англ.)

Уравнение $w = z f(w)$, где $f(w)$ — регулярная функция в $|w| < 1$, причем $|f(w)| < 1$ и $f(0) \neq 0$, является уравнением, предложенным Кеплером, и определяет $w(z) \not\equiv 0$, аналитическую в окрестности $z = 0$. Классический результат показывает, что $w(z)$ регулярна в $|z| < 1$ и что область D $w(z)$ содержится в $|w| < 1$. Автор доказывает, что D расположена во внутренней области многоугольника Бореля от $1/f(w)$. Для того же класса функций автором рассмотрено решение $w(z)$ уравнения $dw/dz = f(w)$ и изучена область $w(z)$. L. Markus

Перев. из Math. Revs., 1955, **16**, № 5, 461

9975. Замечание относительно линейного дифференциального уравнения класса Фукса с алгебраическими коэффициентами. Сайто (A note on the linear differential equation of Fuchsian type with algebraic coefficients. Saito Tosiya), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 2, 58—63 (англ.)

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^n v}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n v = 0, \qquad (1)$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — алгебраические функции. Строится r-листная риманова поверхность f жанра p, на которой все функции $p_1, \ldots, p_n$ однозначные и мероморфные. Затем выводится, какой характер должна иметь каждая из особенностей функций $p_1, \ldots, p_n$ для того, чтобы уравнение (1) было уравнением класса Фукса.

На основании этого и используя теорему Римана—Роха, решается основная проблема, поставленная в статье: находится число независимых параметров функций $p_1, \ldots, p_n$, которое необходимо и достаточно задать для того, чтобы уравнение (1) класса Фукса было бы определено полностью. Это число определяется порядком уравнения, числом особых точек коэффициентов уравнения и жанром поверхности Римана $\mathfrak{F}$.

А. И. Яблонский

9976. Системы дифференциальных уравнений типа Фукса в теории обобщенных функций. Мете (Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. Méthée Pierre-Denis), Comment. math helv., 1959, **33**, № 1, 38—46 (франц.)

Известно, что нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений $T_i' + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(x) T_k = 0$ ($i = 1, \ldots$

..., n, $A_{ik}(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции) не имеет решений в обобщенных функциях, отличных от классических решений. Для системы типа Фукса $xT_i' + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(x) T_k = 0$ автор устанавливает, что ее общее решение в обобщенных функциях зависит от $2n$ произвольных постоянных. В частности, если характеристическое уравнение $\det \| A_{ik} - \lambda \delta_{ik} \| = 0$ не имеет целых отрицательных корней, то общее решение (1) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x)\, \theta(x) + \sum_{i=1}^{n} \overline{C_i} \varphi_i(x)\, \theta(-x),$$

где $\varphi_i(x)$ — классическая фундаментальная система решений, и $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и 0 при $x < 0$. В общем случае в состав общего решения входят некоторые обобщенные функции, сосредоточенные в точке $x = 0$. Г. Е. Шилов

9977. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Одно интересное приложение. Халл (Linear differential equations with constant coefficients: an interesting application. Hull L. W. H.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 343, 48—49 (англ.)

9978. Ограниченность решений линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами. Бейли, Чезари (Boundedness of solutions of linear differential systems with periodic coefficients. Bailey H. R., Cesari Lamberto), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 3, 246—271 (англ.)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon \Phi(t)\, x, \qquad (1)$$

где $x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$; A — постоянная $n \times n$-матрица; $\Phi(t)$ — периодическая $n \times n$-матрица, периода T, L — интегрируемая на $[0, T]$ и ε — малый параметр. В предположении, что характеристические корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны и $\mathrm{Re}\, \lambda_k \leqslant 0$, даются простые критерии ограниченности и неограниченности решений системы (1). Для доказательства используется специальный вариант метода последовательных приближений, развитый Чезари, Хейлом, Гамбилом и Фуллером (РЖМат, 1955, 5783, 5784, 5785). Приведенная библиография неполна; в частности, в ней отсутствуют ссылки на работы советских математиков, имеющие непосредственное отношение к данному вопросу. (см. также, РЖМат, 1958, 8821). Б. П. Демидович

9979. Применение принципа неподвижной точки к одной краевой задаче. Ешуков Л. Н., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 24—29

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

$$x_i(t_i) = A_i \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2)$$

при следующих предположениях: 1) X_i удовлетворяют условиям Каратеодори при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$, $|x_i - A_i| \leqslant a$, 2) $t_1, \ldots, t_n \in [t_0, t_0 + h]$, 3) $|X_i| \leqslant M(t)$, причем $\int_{t_0}^{t_0+h} M(t)\, dt \leqslant a$.

Эта задача сведена к задаче о существовании решения системы интегральных уравнений

$$x_i(t) = A_i + \int_{t_i}^{t} X(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\, d\tau. \qquad (3)$$

Существование решения системы (3) установлено с помощью принципа Шаудера. С помощью этого же принципа доказано существование решения задачи (1) и (2) при произвольных t_i и A_i, если выполнены некоторые условия, основное из которых состоит в том, что $|X_i| = o(r)$, где $r = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. (См. также РЖМат, 1959, 2622). А. И. Перов

9980. Об алгебраических предельных циклах дифференциального уравнения 2-го порядка $\frac{dy}{dx} = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} a_{ij} x^i y^j \Big/ \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} b_{ij} x^i y^j$. **Цинь Юань-сюнь** (On algebraic limit cycles of degree 2 of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} a_{ij}\, x^i\, y^j \Big/ \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} b_{ij}\, x^i\, y^j$. Chin Yuan-shun), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, **1**, № 2, 1—3 (англ.)

Автор доказывает следующий результат:

1. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} a_{ij} x^i y^j \Big/ \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} b_{ij} x^i y^j \qquad (1)$$

имеет эллипс предельным циклом, если и только если после соответствующего аффинного преобразования (1) может быть преобразовано к виду

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-x_1 (a x_1 + b y_1 + c)}{y_1 (a x_1 + b y_1 + c) + x_1^2 + y_1^2 - 1},$$

где $a \neq 0$ и $c^2 > a^2 + b^2$.

2. Эллипс в этом случае единственное периодическое решение (1), кратности 1,

т. е. $I = \int_0^T \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dt \neq 0$, где T — период.

3. Уравнение (1) структурно устойчиво. Yeh Yenchien

9981. Бесконечно малое возмущение периодического решения второго рода с приложением к уравнению маятника. Урабэ (Infinitesimal deformation of the periodic solution of the second kind and its application to the equation of a pendulum. Urabe Minoru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A18**, № 2, 183—219 (англ.)

Изучаются периодические решения второго рода для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = Q(x, \theta), \qquad (1)$$

т. е. решения, соответствующие периодическим решениям уравнения

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{P(x, \theta)}{Q(x, \theta)} = X(x, \theta), \qquad (2)$$

P и Q предполагаются периодическими функциями θ с одинаковым периодом (2π), непрерывными по x, θ для $|x|, |\theta| < \infty$ и аналитическими по x для $|x| < \infty$, предполагаются также выполненными условия единственности решения.

Дана общая теория бесконечно малого возмущения периодического решения второго рода. Возмущенное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{d\theta} = X_1(x, \theta, \varepsilon) = X(x, \theta) + \varepsilon L(x, \theta, \varepsilon).$$

Пусть $x = x(\theta)$ — невозмущенное периодическое решение. Тогда в случае абсолютной устойчивости при до-

статочно малом возмущении в окрестности $x(\Theta)$ существует по крайней мере одно периодическое решение $x=x(\Theta, c, \varepsilon)$ $(c=u(\Theta_0, c, \varepsilon)=x(\Theta_0, c, \varepsilon)-x(\Theta_0)$, имеющее тот же тип устойчивости, единственное, если $h_0\neq 0$ или $I\neq 0$ $(X_1(x+u, \Theta, \varepsilon)-X(x, \Theta)=$

$$=U(u, \Theta, \varepsilon)=u\frac{\partial X}{\partial x}(x, \Theta)+\varepsilon L_0(x, \Theta)+\ldots, \quad h=$$

$$=\int_{\Theta_*}^{\Theta}\frac{\partial X}{\partial x}d\Theta, \quad h_0=h(\Theta_0+2\pi), \quad I=\int_0^{\Theta_*+2\pi}e^{-h}L_0 d\Theta).$$

Устанавливаются также свойства возмущенного решения в случае, если $x(\Theta)$ полуустойчиво, а также, если в окрестности $x(\Theta)$ существует континуум периодических решений.

Прослеживается изменение периодического решения системы $\frac{dx}{d\Theta}=X(x, \Theta, \alpha)$ при непрерывном изменении параметра α. Общие результаты применяются к уравнению маятника

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\alpha f(\Theta)\frac{d\Theta}{dt}+g(\Theta)=0$$

и соответственно

$$\frac{dz}{d\Theta}=\frac{-\alpha f(\Theta)z-g(\Theta)}{z}\quad\left(z=\frac{d\Theta}{dt}\right).$$

Если $G(2\pi)=0$ $(G(\Theta)=\int_0^{\Theta}g(\Theta)d\Theta)$, то не существует периодических решений, кроме как для $\alpha=0$, при $\alpha=0$ имеется континуум периодических решений. Если $G(2\pi)\neq 0$, то для достаточно малых α существует единственное периодическое решение, траектория которого лежит в полуплоскости (Θ, z), отделенной осью $z=0$. Это решение устойчиво и положительно или неустойчиво и отрицательно соответственно $G<0$ или >0. С возрастанием α траектория движется вверх или вниз из бесконечности соответственно $G<0$ или >0. Для $\alpha=0$ периодического решения не существует. Исследуется вопрос о точной верхней грани значений α, для которых существует периодическое решение.

Работа тесно связана с предыдущей работой автора (РЖМат, 1956, 2197). А. В. Васильева

9982. Применение метода малого параметра к исследованию колебаний упругих систем с гистерезисом. Писаренко Г. С., Тр. Научно-техн. совещания по изуч. рассеяния энергии при колебаниях упругих тел. Киев, АН УССР, 1958, 22—33

Рассматривается задача о свободных вертикальных колебаниях массы, подвешенной на однородном упругом стержне постоянного сечения с учетом рассеяния энергии в материале. Предполагается, что масса стержня мала по сравнению с колеблющейся массой. Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x+\omega^2\varepsilon\overrightarrow{\Phi}(x)=0, \qquad (1)$$

где ω^2 — собственная частота колебаний линейной системы, ε — малый параметр, $\varepsilon\overrightarrow{\Phi}(x)$ — функция, учитывающая затухание энергии в материале, значения которой при восходящем и нисходящем движении различны (в уравнении (1) отмечено двумя различно направленными стрелками). Пользуясь методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (Введение в нелинейную механику, АН УССР, 1937), автор получил первое приближение решения задачи, описываемой уравнением (1) при

$$\varepsilon\overrightarrow{\Phi}(x)=\mp\frac{\eta}{n}a^n[(1\pm\cos\tau)^n-2^{n-1}],$$

где η и n — постоянные параметры петли гистерезиса, характеризующие демпфирующие свойства материала, $\tau=\omega t+\psi$, где a — амплитуда, ψ — фаза колебаний. Найденное решение имеет вид: $x=a\cos(\omega t+\psi)$, где

$$a=a_0\sqrt[n-1]{\frac{\pi n(n+1)}{2^n\eta(n-1)^2a_0^{n-1}t+\pi n(n+1)}}; \qquad (2)$$

$$\psi=\omega t+\frac{\eta a^{n-1}}{\pi n}t\int_0^{\pi}(1-\cos\tau)^n\cos\tau\,d\tau+\Theta,$$

$$a_0=a(0), \quad \Theta=\psi(0).$$

Сопоставляя теоретические результаты, следуемые из (2), с экспериментальными, автор приходит к заключению о возможности применения асимптотических методов малого параметра для расчета колебаний упругих систем, обладающих гистерезисными потерями при слабой нелинейности исходной зависимости.

М. И. Розовский

9983. О предельной амплитуде одного класса незатухающих колебаний. Шубарт (Über die Grenzamplitude einer Klasse selbsterregter Schwingungen. Schubart Hans), Ingr-Arch., 1959, **27**, № 1, 66—72 (нем.)

Клоттер и Крайзиг изучали класс незатухающих колебаний, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\ddot{q}-(\operatorname{sign}\dot{q})\left[\frac{\beta}{2}(1-\alpha^2q^2)\dot{q}^2\right]+\varkappa^2f(q)=0 \quad (\beta>0). \qquad (1)$$

Важной проблемой в теории колебаний является оценка величины амплитуды колебания q^* в зависимости от $f(q)$.

В этой заметке даются высказывания о верхней и нижней границе от q^*, причем ударная сила представлена в виде

$$f(q)=\sum_{l=0}^{k}C_lq^{2l+1} \quad (C_l\geqslant 0).$$

Для вычисления границ используются только элементарные функции. Из статьи автора

9984. Критерий для однородного линейного дифференциального уравнения с затухающими решениями. Винтнер (A criterion for homogeneous linear differential equations with damped solutions. Wintner Aurel), J. Math. and Mech., 1957, **6**, № 1, 109—117 (англ.)

Действительная или комплекснозначная функция, определенная для больших положительных t, называется экспоненционально малой, если она имеет вид: $O(e^{-\gamma t})$ при $t\to\infty$, где γ — положительная постоянная.

Автор доказывает эквивалентность следующих четырех утверждений:

I. Если $\omega=\omega(r)$, $0<r\leqslant r_0$ — непрерывная функция для $r\omega(r)$, остающаяся между двумя положительными границами при $r\to 0$, тогда существует постоянная $\alpha=\alpha(\omega)$ такая, что (1) $x(r)=O(r^{\alpha})$, когда $r\to 0$, где $x(r)$ решения (2) $d^2x/dr^2+\omega^2x=0$.

II. Если $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $0<r\leqslant r_0$ — действительные непрерывные функции, ограниченные при $r\to 0$, и если

$\varphi(r)$ остается выше положительной границы и $\psi(r)$ остается ниже границы, которая меньше 1, тогда существует постоянная $\alpha = \alpha(\psi, \varphi) > 0$ такая, что (1) следует для каждого решения $x(r)$ уравнения

$$r^2(d^2x/dr^2) = \psi(r)\, r\,(dx/dr) + \varphi(r)\, x = 0.$$

III. Если $g = g(t)$, $f = f(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$ — непрерывные функции, остающиеся между положительными границами при $t \to \infty$, тогда все решения $x(t)$ уравнения

$$d^2x/dt^2 + g\,dx/dt + fx = 0 \qquad (4)$$

экспоненциально малы.

IV. Если $g = 1$ и $f(t)$ остается между положительными границами, то все решения уравнения (4) экспоненциально малы.

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 9, 737.

9985. К вопросу о переходе через резонанс упругих систем. Филиппов А. П., Голоскоков Е. Г., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1958, 14, 7—21

Приводится дальнейшее развитие решения задачи о прохождении через резонанс в линейных колебательных системах, разработанного А. П. Филипповым (Колебания упругих систем, Киев, Изд-во АН УССР, 1956).

Задача о прохождении через резонанс для линейной системы с одной степенью свободы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = P(t)\cos\left(\frac{at^2}{2} + \varepsilon_0\right),$$

где μ — коэффициент затухания, ω — собственная частота системы, at — мгновенная частота возмущающей силы, $P(t)$ — амплитуда возмущающей силы, φ — координата, ε_0 — начальная фаза возмущающей силы, при начальных условиях $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ сводится к вычислению интеграла

$$\varphi(t) = \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^t P(\tau)\cos\left(\frac{a\tau^2}{2} + \varepsilon_0\right) e^{-\frac{\mu}{2}(t-\tau)} \sin k(t-\tau)\, d\tau,$$

где $k^2 = \omega^2 - \frac{\mu^2}{4}$.

В работе показывается что при использовании таблицы функций в комплексной области:

$$W_1(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}dt\right), \qquad (3)$$

$$W_2(z) = e^{-z^2}\int_0^z e^{t^2}dt,$$

вычисление интеграла (2) не представляет затруднений. В качестве примеров рассматривается прохождение через резонанс трехмассовой системы, совершающей крутильные колебания и описываемой системой уравнений:

$$I_1\ddot{\varphi}_1 + k_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = M_1(t),$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2 + k_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + k_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = M_2(t),$$

$$I_3\ddot{\varphi}_3 + k_2(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = M_3(t), \qquad (4)$$

где I_j — момент инерции j-й массы, c_j — жесткость j-го участка валопровода, $M_j(t)$ — внешний момент, действующий на j-ю массу, k_j — коэффициент затухания, а также вынужденные колебания консольного стержня, опора которого колеблется с мгновенной частотой at по закону

$$y(0, t) = f(t).$$

В этом случае исследуется следующее дифференциальное уравнение колебаний стержня с учетом внутреннего затухания:

$$EI\left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = 0, \qquad (5)$$

где EI — жесткость стержня, m — масса единицы длины стержня, ψ — коэффициент, характеризующий внутреннее затухание. Ю. А. Митропольский

9986. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 5, 778—781

Методика построения асимптотики по малому параметру переносится на некоторые классы нелинейных дифференциальных уравнений.

Метод подробно иллюстрируется на примере обыкновенного уравнения

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y'' + \varphi(x, y)\, y' - \psi(x, y) = 0, \quad y(0) = A,$$
$$y(1) = B. \qquad (1)$$

Пусть в полосе $0 < x < 1$ существует область M, удовлетворяющая следующим условиям: 1) она покрыта полем интегральных кривых $y = w(x)$ предельного уравнения

$$L_0 w = \varphi(x, w)\, w' - \psi(x, w) = 0, \qquad (2)$$

которые соединяют точки прямых $x = 0$, $x = 1$; 2) она ограничена отрезками $[A_0, A_1]$ и $[B_0, B_1]$ прямых $x = 0$, $x = 1$ и кривыми $r_1(x)$ и $r_2(x)$, для которых если $\widetilde{y}_\varepsilon \leqslant r_1$ ($\widetilde{y}_\varepsilon \geqslant r_2$), то линия $y = \widetilde{y}_\varepsilon$ не может иметь внутри полосы $0 < x < 1$ соприкосновения с $y = r_1$ ($y = r_2$); 3) отрезок $[B_0, B_1]$ прямой $x = 1$ содержит отрезок $[\overline{B}_0, \overline{B}_1]$ такой, что всякая выходящая из точки $(1, B)$, $\overline{B}_0 \leqslant B \leqslant \overline{B}_1$ предельная кривая $y = w(x)$ лежит при $0 \leqslant x \leqslant 1$ целиком внутри M.

Имеет место следующая

теорема. Пусть в $\overline{M}$ выполняется условие

$$\varphi(x, y) \geqslant \gamma > 0$$

и функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ достаточно гладки. Для $A_0 < A < A_1$, $\overline{B}_0 < B < \overline{B}_1$ и решения задачи (1) $\widetilde{y}_\varepsilon(x)$, лежащего в M, справедливы асимптотические формулы

$$\widetilde{y}_\varepsilon(x) = w_0(x) + v_0(x) + \widetilde{R}_0(x), \widetilde{R}_0(x) = O(\varepsilon|\ln|\varepsilon||) \qquad (3)$$

$$\widetilde{y}_\varepsilon(x) = \left[w_0(x) + \sum_{s=1}^{n}\varepsilon^s w_s(x)\right] + \left[v_0(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{n+1}\varepsilon^s v_s(x)\right] + R_n(x), \quad R_n(x) = O(\varepsilon^{n+1}), \qquad (4)$$

где $w_0(x)$ удовлетворяет уравнению (2) и условию $w_0(1) = B$, $v_0(x)$ — решение уравнения

$$\varepsilon v_0'' + \varphi(v_0 + a)\, v_0' = 0 \quad (v_0(0) = A - a,\ a = w(0),$$

$$\varphi(y) = \varphi(0, y)),$$

соответствующее пограничному слою.

Приводится схема доказательства формулы (4).

В конце заметки приводятся замечания, относящиеся к перенесению этой теоремы на некоторые квазилинейные уравнения в частных производных. Б. М. Левитан

9987. Об устойчивости вверх максимального характеристического показателя и устойчивости вниз минимального характеристического показателя. Чжан Сюэ-мин (Ghang H. m.), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, 8, № 3, 324—332 (кит.; рез. англ.)

Результаты работы известны, см. Б. Ф. Былов (Прикл матем. и механ., 1950, **14**, вып. 4; РЖМат, 1956, 3814).

Р. Э. Виноград

9988. Об инвариантах кривых отображения $x = x + \varepsilon Y(x) + Y\varepsilon(x\varepsilon)$. **Зеликин М. И.**, Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 2, 28—36

Рассматривается отображение n-мерного пространства на себя, которое задается формулой

$$x^* = x + \varepsilon Y(x) + \varepsilon Z(x, \varepsilon), \qquad (1)$$

где ε — малый параметр, x—n-мерный вектор, $Y(x)$ и $Z(x, \varepsilon)$ — дважды непрерывно дифференцируемые векторные функции, а $\lim_{\varepsilon \to 0} Z = 0$. При этом предполагается, что вспомогательная система уравнений

$$\dot{y} = Y(y) \qquad (2)$$

имеет периодическое решение $y = y_0(t)$, являющееся невырожденным в том смысле, что $(n-1)$-характеристических корней уравнений в вариациях

$$\frac{d\delta y}{dt} = Y'_y(y_0(t))\,\delta y,$$

соответствующих решению $y_0(t)$, отличны по модулю от единицы (один корень имеет модуль, равный единице из-за наличия периодического решения $y_0(t)$ системы (2)). При этих предположениях доказано, что: 1. Отображение (1) имеет неподвижную замкнутую кривую, стремящуюся к циклу $y_0(t)$ при $\varepsilon \to 0$. 2. Эта кривая лежит на пересечении двух инвариантных относительно преобразования (1) многообразий размерностей $(s+1)$ и $(n-s)$ соответственно. При итерациях (1) внутри первого многообразия точки приближаются к неподвижной кривой, а внутри второго — удаляются. Последнее предложение доказывается в предположении, что среди $(n-1)$-характеристических корней, отличных по модулю от единицы, s-корней имеют модуль, больший единицы, а остальные $(n-1-s)$ — меньший чем единица. В заключение указано, что из результатов реферируемой работы вытекает как частный случай известная теорема Н. Н. Боголюбова о существовании многообразия в виде тора, состоящего из интегральных кривых, для системы вида $\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x,t)$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, X — периодична по t с периодом 1, в предположении, что система $\dot{y} = Y(y)$, $Y(y) \equiv \int_0^1 X(x,t)\,dt$, имеет невырожденное периодическое решение, причем этот тор притягивает при $t \to \infty$ решения, начинающиеся на $(s+1)$-мерном многообразии, а прочие решения покидают малую окрестность тора при $t \to \infty$.

В. М. Волосов

9989. Поправка. Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 8, 812. См. РЖМат, 1959, 2642.

9990. Некоторые математические работы горьковской школы А. А. Андронова. Леонтович-Андронова Е. А., Тр. 3-го. Всес. матем. съезда, 1956. **3**, М., АН СССР, 1958, 116—125

9991. О дифференциальных уравнениях в банаховых пространствах. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **3**, М., АН СССР, 1958, 73—80

Статья представляет собой краткое изложение доклада на III Всесоюзном математическом съезде. В докладе дан обзор общих теорем существования решений операторных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

и их применений в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

В. В. Немыцкий

9992 К. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Плисс В. А., Л., Ленингр. ун-т, 1958, 183 стр., 8 р. 40 к.

Рассматриваются системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y_1 + a_{23}z_1, \\ \frac{dz_1}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y_1 + a_{33}z_1. \end{aligned} \qquad (1)$$

С помощью некоторого преобразования переменных, указанного Н. Н. Красовским, эта система приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = y - f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = z - cx - df(x), \qquad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -ax + bf(x), \quad f(0) = 0.$$

Обобщенными условиями Рауса—Гурвица называются неравенства

$$\frac{f(x)}{x} > 0,\ x \neq 0,\ a + b\frac{f(x)}{x} > 0,\ x \neq 0,$$

$$d\frac{f^2(x)}{x} + (c-b)\frac{f(x)}{x} - a > 0,\ x \neq 0.$$

По поводу систем (1) и (2) ставятся две проблемы: 1) Найти такие условия для коэффициентов a, b, c, d, чтобы при любой нелинейности $f(x)$, удовлетворяющей обобщенным условиям Рауса—Гурвица, была бы устойчивость положения равновесия в целом. 2) В случае, когда не выполнены условия, обеспечивающие устойчивость в целом, найти дополнительные условия на функцию $f(x)$, которые обеспечивали бы наличие периодического решения.

Автор разбивает все представляющиеся возможности на 22 случая. Например, 1-й случай: $0 < b < 1$, $a > 0$, $\frac{f(x)}{x} > \frac{a}{1-b}$, $x \neq 0$ или 15-й случай: $d > 0$, $b > 0$ $(c-b)^2 + 4ad < 0$; $\frac{f(x)}{x} > -\frac{a}{b}$ при $x \neq 0$ и тому подобные условия. Каждый из этих случаев подвергается специальному исследованию, основанному на рассмотрении направлений поля в тех или иных областях пространства и построении функции Ляпунова в виде: „квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности". Таким образом устанавливается устойчивость в целом. Более сложные рассмотрения приходится делать для установления существования периодического решения. Автор не пользуется для установления существования периодического решения какими-либо общими принципами. Он в своих исследованиях исходит из частного вида исследуемой системы и накладывает весьма тонкие метрические ограниче-

ния, например, пусть $k=\max\left\{1,\frac{1}{c}\right\}$ и h и H — некото-

рые константы, подчиненные неравенствам, тогда пред-полагается, что

$$x \leqslant \frac{1}{c}\sqrt{k^2(1+c^2)+0{,}012}.$$

Конечный этап рассуждения, приводящего к существованию периодического решения, примерно заключается в следующем: на плоскости $x=0$ находится некоторая трапеция такая, что все решения, выходящие из этой трапеции, снова возвращаются на плоскость $x=0$, и, используя специальные свойства системы и неравенства с весьма точно подобранными числовыми коэффициентами, удается установить, что существует точка возвращения на плоскость $x=0$, симметричная относительно начала координат исходной точке, тоже лежащей на плоскости $x=0$. Затем предполагается, что $f(x)=-f(-x)$, и выводится, что решение, проходящее через эти две точки, периодическое. Наконец, в 7-й главе приводятся условия, дающие отрицательный ответ на вопрос проблемы Айзермана, и если учесть, что эти условия вместе с теми условиями, которые дают положительный ответ на вопрос проблемы Айзермана, составляют полную систему всех возможных случаев, то тем самым получаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы проблема Айзермана применительно к системе трех уравнений имела положительное решение. В. В. Немыцкий

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редакторы *И. Н. Векуа, Н. И. Мозжерова*

9993. Абстрактные задачи Коши эллиптического типа. Балакришнан (Abstract Cauchy problems of the elliptic type. Balakrishnan A. V.), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 5, 290—291 (англ.)

Пусть $T(\xi)$ $(\xi>0)$ — сильно непрерывная полугруппа ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, A — ее производящий оператор. Под абстрактной задачей Коши эллиптического типа ($ACPE_n$) автор понимает задачу о нахождении вектор-функции $u(t)$, $(t>0)$, удовлетворяющей условиям:

1) $u(t)$, $u'(t),\ldots,u^{n-1}(t)$ абсолютно непрерывны;

2) $u^{(n)}(t)=(-1)^{n+1}Au(t)$;

3) $\|u^{(k)}(t)-u_k\|\to 0$ при $t\to 0+$ $(k=0,\ldots,n-1)$.

Теорема 1. $ACPE_n$ имеет не более одного решения, если при всяком $\sigma>0$

$$\int_1^\infty \|T(\xi)\|\,\xi^{-\sigma-1}\,d\xi<\infty. \qquad (1)$$

Следующий результат показывает, что при определенных ограничениях на рост решения $ACPE_2$ равносильна первой краевой задаче в полубесконечном промежутке.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1). Если $u(t)$ — решение $ACPE_2$, такое, что

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log\|u(t)\|\leqslant 0,$$

то необходимо

$$u(t)=(t/2\sqrt{\pi})\int_0^\infty T(\xi)u_0\,\xi^{-3/2}\exp(-t^2/4\xi)\,d\xi.$$

Утверждается, что аналогичные результаты имеют место для других n.

Доказательства отсутствуют. М. З. Соломяк

9994. Замечание о дифференциальном операторе и решениях дифференциального уравнения в частных производных. Ямагути (Une remarque sur l'opérateur différentiel et les solutions de l'équation aux dérivées partielles. Yamaguti Masaya), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1958, **A31**, № 2, 111—119 (франц.)

1. Настоящая работа посвящена изучению свойств элементарных ядер уравнения с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, примыкая к работам Мальгранжа, Гротендика, Ниренберга и Кальдерона в этой области.

2. Определения и обозначения.

E — пространство бесконечно дифференцируемых функций в R^n.

D — пространство E функций с компактным носителем.

D' — распределения.

E' — подпространство D' распределений с компактным носителем.

Линейное отображение D в D' называется ядром. Известно, что оно может быть реализовано как распределение E на $R^n\times R^n$. E называется регулярным, если $\psi\to E\psi$ из D в D' может быть продолжено до непрерывного отображения $T\to ET$ из E' в D' и если $\psi\to E\psi$ отображает D в E.

Если E — регулярно и бесконечно дифференцируемо всюду, кроме диагонали, то оно называется весьма регулярным.

Ядро E называется левым (правым) элементарным ядром оператора P, если для всех $\varphi\in D$ $EP\varphi=\varphi$ $(PE\varphi=\varphi)$. Ядро, являющееся одновременно левым и правым, называется двусторонним.

3. Условия существования двустороннего элементарного весьма регулярного ядра.

Первое такое условие дал Мальгранж — это условие (C).

Будем обозначать через $\hat{\hat{K}}$ для произвольного компакта K наименьшее замкнутое множество такое, что из условия $K\subset\hat{\hat{K}}$; $\mu\in E'$, $P_\mu\subset K$ следует $\mu\subset\hat{\hat{K}}$ (P_μ и μ — суть носители P_μ и μ).

Свойство (C). Говорят, что оператор P обладает свойством (C), если для любого компакта $K\subset R^n$, $\hat{\hat{K}}$ есть компакт и отображение $P:E'\to E'$ взаимнооднозначно.

Свойство (C) не очень удобно проверяется для операторов с переменными коэффициентами, поэтому автор вводит два более сильных требования, но более удобных:

Свойство (C_1). Говорят, что оператор P обладает свойством (C_1), если для любого $u\in E'$, являющегося решением $Pu=0$ в окрестности гиперплоскости, опорной k носителю u, существует другая окрестность этой гиперплоскости, где $u\equiv 0$.

Предложение 1. Свойство (C_1) влечет за собой свойство (C).

Предложение 2. Если дифференциальный оператор P обладает свойством (C_1), то для любого компакта K $\hat{\hat{K}}$ содержится в замкнутой выпуклой оболочке K.

Определение: Множество называется строго выпуклым относительно точки p этого множества, если существует гиперплоскость, опорная к этому множеству и не имеющая общих точек с данным множеством, отличных от точки p.

Свойство (C_2). Если распределение u есть решение уравнения $Pu=0$ в окрестности некоторой точки своего носителя и если носитель u строго выпуклый относительно этой точки, то существует другая окрестность этой точки, где $u\equiv 0$.

Легко видеть, что (C_2) слабее (C_1).

Предложение 3. Если гипоэллиптический дифференциальный оператор P обладает свойством (C_2), то $\hat{\hat{K}} \subset \overline{\Gamma(K)}$ для любого компакта $K \subset R^n$ (через $\overline{\Gamma(K)}$ обозначается замкнутая выпуклая оболочка K).

Далее доказывается „слабое свойство Рунге".

Теорема 1. (Мальгранж)

Если имеет место свойство (C), для транспонированного оператора P', а P обладает левым элементарным ядром, полурегулярным справа на R^n, и если для любого множества Ω, открытого относительно некоторого компакта, существует другое открытое относительно компакта множество Ω', содержащее Ω и обладающее следующим свойством: $f \in E(\Omega')$ и $Pf = 0$ на Ω, тогда f есть предел в $E(\Omega)$ функций $g \in E(R^n)$, удовлетворяющих уравнению

$Pg = 0$ в R^n.

Следствие. Если эллиптический оператор P' удовлетворяет условию (C_1) или (C_2) для любого открытого выпуклого Ω, то решение f уравнения $Pf = 0$ в Ω может быть приближено решениями g_i уравнения $Pg_i = 0$ в R^n.

4. Свойство Рунге и свойство единственности продолжения.

Свойство (A) (единственность продолжения). Говорят, что оператор P обладает свойством (A), если для любого решения u уравнения $Pu = 0$ в Ω, обращающегося в нуль на открытом множестве $\Omega' \subset \Omega$, имеет место $u \equiv 0$ в Ω.

Свойство Рунге. Говорят, что оператор обладает свойством Рунге, если для любого открытого в R^n множества Ω такого, что $\hat{\Omega} = \Omega$, имеет место следующее: любое $f \in E(\Omega)$, удовлетворяющее уравнению $Pf = 0$ в Ω, есть предел g_i, которые суть решения уравнения $Pg_i = 0$ в R^n (здесь $\hat{\Omega}$ есть объединение Ω и всех выпуклых составляющих компактов замыкания Ω).

Теорема 2. Если P' — оператор, транспонированный к дифференциальному гипоэллиптическому оператору P, обладающему правым элементарным ядром, то свойство Рунге для P эквивалентно свойству единственности продолжения для P'.

Следствие: Если P есть эллиптический оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, то для него свойство Рунге эквивалентно свойству единственности продолжения.

А. Л. Крылов

9995. Исследование о принципе максимума. I. Александров А. Д., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, №5, 126—157

Пусть в области G переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задан линейный оператор

$$L(u) = a^{ij}u_{ij} + b^k u_k + cu,$$

нигде не гиперболический в том смысле, что матрица коэффициентов a^{ij} не имеет отрицательных собственных значений. Ставится следующий вопрос: что можно сказать о распределении нулей функции u, удовлетворяющей в области G условиям: $u \geqslant 0$, $L(u) \leqslant 0$.

Для случая, когда оператор L строго эллиптический (форма $a^{ij}\xi_i\xi_0$ — положительно определенная), этот вопрос рассматривался Хопфом, который доказал, что если $L(u) = 0$ и $u \geqslant 0$, всюду в G и хоть где-нибудь в G $u = 0$ то $u \equiv 0$ в G. Ниренберг рассмотрел случай, когда форма $a^{ij}\xi_i\xi_j$ допускает представление в виде суммы двух форм $\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}\xi_i\xi_j > 0$ и $\sum_{i,j=m+1}^{n} a^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$, и доказал в условиях теоремы Хопфа, что обращение u в нуль в точке x_0 области G влечет за собой обращение ее в нуль на линейном многообразии $x^{m+1} = \text{const}, \ldots, x^n = \text{const}$, содержащем точку x_0.

В данной работе поставленный вопрос получает исчерпывающее решение. Как частные случаи получаются здесь теоремы Хопфа и Ниренберга.

По определению функция u касается нуля в точке x_0 (в области G или на ее границе Γ), если в этой точке $u = 0$ и $du = 0$. Точка x_0 называется обыкновенной по отношению к оператору L, если из условия касания u нуля в точке x_0 и $L(u) \leqslant 0$ следует существование нуля функции u близкого x_0 и отличного от него. Оператор L не вырождается в направлении l, если при переходе к системе координат x^i, в которой ось x' совпадает с l, коэффициент $a'' > \text{const} > 0$. Параболоидом называется поверхность, представившая в соответствующих прямоугольных декартовых координатах сравнением

$$x' = a\left(\sum_{i>1} x_i^2\right)^{p/2}, \quad a > 0, \quad p > 1.$$

Основной результат работы, из которого выводятся различные многочисленные следствия о распределении нулей функции u, удовлетворяющей условиям $u \geqslant 0$ $L(u) \leqslant 0$, является

Теорема 1. Если точки x_0 границы Γ области G можно коснуться изнутри вершиной какого-нибудь параболоида и в окрестности x_0 оператор L не вырождается в направлении оси параболоида, то x_0 — обыкновенная точка.

Регулярная кривая C называется линией эллиптичности оператора L, если в каждой точке эта линия касается плоскости, определяемой главными направлениями, отвечающими положительным собственным значениям матрицы a^{ij}. В частности, если оператор L эллиптический, то любая линия C является линией эллиптичности.

Теорема. Если в области G $u \geqslant 0$ $L(u) \leqslant 0$ и в точке $x_0 \subset G$ $u = 0$, то $u \equiv 0$ на всякой линии эллиптичности, проходящей через точку x_0.

Следствие. Если некоторая m-мерная поверхность S такова, что в каждой точке ее касательная плоскость содержится в плоскости положительных главных направлений матрицы a^{ij}, если в G $u \geqslant 0$ $L(u) \leqslant 0$ и $u(x_0) = 0$ $x_0 \subset S$, то $u \equiv 0$ на S. Отсюда получаются упомянутые теоремы Хопфа и Ниренберга.

Множество M называется множеством эллиптической связности оператора L, если любые две точки M можно соединить кривой, состоящей из дуг эллиптичности, и не существует M' большего M, обладающего этим свойством. Оператор L называется эллиптически связным, если $M \equiv G$. Строго эллиптический оператор, очевидно, эллиптически связный.

Теорема. Если всюду в G $u \geqslant 0$ $L(u) \leqslant 0$ и в некоторой точке $x_0 \subset G$ $u(x_0) = 0$, то $u \equiv 0$ на множестве эллиптической связности, содержащем точку x_0.

Автор указывает, что настоящая статья является первой в серии публикаций, посвященных принципу максимума, которую он собирается предпринять, и излагает в общих чертах программы исследования.

А. В. Погорелов

9996. Уравнение 2-го порядка и симплектические преобразования. Лепаж (Equation du second ordre et transformations symplectiques. Lepage Th.), Colloq. Centre belge rech. math. 1, 1953, Paris, 1954, 79—104 (франц.)

9997. Поведение решений линейного уравнения 2-го порядка в окрестности особой точки одного из коэффициентов. Блондель (Comportement des solutions d'une équation linéaire du second ordre, au voisinage d'une singularité d'un coefficient. Blondel Jean-Marie), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 8, 981—983 (франц.)

9998. Задача Дирихле в пространстве Грина. Эрве (Sur le problème de Dirichlet dans un espace de Green. Hervé Rose-Marie), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 4, 401—404 (франц.)

В пространстве Грина (специальное топологическое пространство, обладающее тем свойством, что в нем существует положительная супергармоническая функция, отличная от константы; один из примеров — абстрактная риманова поверхность) изучается связь между обобщенными гармоническими мерами (Brelot M., J. math., pures et appl. 1956, 35, № 4, 297), соответствующими различным точкам. А. А. Дезин

9999. О видоизмененной задаче Дирихле. Якоб (Observări asupra problemei lui Dirichlet modificate. Iacob Caius), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 11, 1107—1111 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть Ω — многосвязная область, граница которой C состоит из внешней кривой C из p внутренних кривых C_j $(j=1, \ldots, p)$. Вводятся гармонические меры $u_j(M)$ компонент C_j $(j=1, \ldots, p)$ границы и функции $U_j(M)$, определенные формулой

$$U_j(M) = \sum_{k=1}^{p} C_{jk} u_k(M) \quad (j=1, 2, \ldots, p),$$

где

$$\sum_{k=1}^{p} C_{jk}\omega_{kl} = 2\pi\delta_{jl},$$

а w_k — периоды гармонически сопряженной к $u_j(M)$ функции. Устанавливается, что квадратичная форма $\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} C_{jk}x_j x_k$ положительно определена. Пусть $g(M, P)$ видоизмененная функция Грина области. Имеем $U_j(M) > 0$ для $M \in \Omega$, откуда вытекает неравенство $g(M, P) > G(M, P) > 0$ в Ω. Общее, если граничные значения $\Phi(Q)$ гармонической задачи Дирихле таковы, что

$$d_j = \int_C \Phi(Q)\,\frac{du_j}{dn}(Q)\,ds_Q > 0,$$

то из условий однозначности функции, сопряженной к решению видоизмененной задачи Дирихле относительно граничных значений $\Phi(Q) + c_j$, $Q \in C_j$ $(j=0, 1, \ldots, p)$, где c_j — постоянные, а $c_0 = 0$, следует, что

$$c_j > 0 \quad (j=1, 2, \ldots, p).$$

Из резюме автора

10000. Решение задачи Дирихле методом конечных разностей. Литман (Résolution du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies. Littman Walter), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 25, 2270—2272 (франц.)

Задача Дирихле для сильно эллиптического дифференциального оператора порядка $2m$ и конечной области N-мерного пространства Евклида R^N решается при помощи метода конечных разностей.

По своим обозначениям статья примыкает к работе Ниренберга (РЖМат, 1958, 1203). Намечены доказательства. Б. М. Левитан

10001. Об устойчивости задачи Дирихле для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. Могилевский Ш. И., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, 26, 103—128

Результаты, полученные автором ранее для уравнения Лапласа (РЖМат, 1955, 3203), распространяются на случай линейного уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами вида

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \qquad (1)$$

Доказывается, что вопрос об устойчивости задачи Дирихле для уравнения (1) в граничной точке области D относительно множества E типа F_σ, принадлежащего дополнению к D, а также вопрос об устойчивости задачи Дирихле для уравнения (1) внутри области D относительно множества E типа F_σ сводятся к соответствующим проблемам для трехмерного уравнения Лапласа.

Автор отмечает, что все результаты легко распространяются на случай большего числа независимых переменных. А. Х. Гелиг

10002. Теория гармонических функций классических областей. Гармонические функции в области гиперболичности матриц. Хуа Ло-гэн, Лу Ци-кэн (Hua L. k., Look K. h.), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, 8, № 4, 531—547 (кит.; рез. англ.)

Изучается проблема Дирихле дифференциального уравнения в частных производных

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{m}\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{m}\overline{z}_{l\alpha}z_{l\beta}\right)\left(\delta_{jk} - \sum_{\gamma=1}^{n}\overline{z}_{j\gamma}z_{k\gamma}\right)\frac{\partial^2 u(Z)}{\partial z_{k\beta}\partial\overline{z}_{j\alpha}} = 0 \qquad (1)$$

в области

$$R_{\mathrm{I}} : I^{(m)} - Z\overline{Z}' > 0,$$

где $Z = (z_{j\alpha})$ — $m \times n$ $(m \leqslant n)$ - матрица.

Очевидно, уравнение (1) эллиптического типа и вырождается на границе R_{I}. Функция $u(Z)$, удовлетворяющая уравнению в замкнутой области R_{I}, является гармонической функцией класса $\mathfrak{R}_1$. Пусть дана непрерывная функция $u(Z)$ унитарной группы $\mathfrak{L}_1$ $(U\overline{U}' = 1)$, тогда имеется одна и только одна гармоническая функция из $\mathfrak{R}_1$, задаваемая интегралом Пуассона

$$u(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{L}_1)}\int_{\mathfrak{R}_1}\frac{\det(I - Z\overline{Z}')^n}{|\det(I - Z\overline{U}')|^{2n}}\,\dot{U}$$

с $\lim_{Z\to U} u(Z) = \varphi(U)$.

Интересно отметить, что любая функция из $\mathfrak{R}_1$ удовлетворяет также системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{m}\overline{z}_{l\alpha}z_{l\beta}\right)\frac{\partial^2 u(Z)}{\partial z_{k\beta}\partial\overline{z}_{j\alpha}} = 0, \quad j, k = 1, \ldots, m.$$

Из резюме авторов

10003. Теорема о спектре возмущенного дифференциального оператора. Лидский В. Б., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 6, 994—997

Рассматривается оператор

$$Lu = -\Delta u + p_1(x)\,u; \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

с непрерывной комплексной функцией $p_1(x)$. Устанавливается, что оператор $\widetilde{L}u = Lu + p_2(x)\,u$ с единственным условием; $p_2(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, имеет те же предельные точки спектра, что и L. Точнее, доказывается, что в области регулярности резольвенты R_λ оператора L могут быть лишь полюсы резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ оператора $\widetilde{L}$. Как было отмечено позже автором, в доказательстве имеется пробел, состоящий в следующем. Теоремы типа Фредгольма справедливы для $E + A(\lambda)$ ($A(\lambda)$ вполне непрерывен) при условии, что существует $[E + A(\lambda)]^{-1}$ хоть при одном λ из рассматриваемой области. По-видимому, для рассматриваемого случая, когда

$A(\lambda) = R_\lambda p_2$, это так, но доказательство референту неизвестно. Э. Э. Шноль

10004. О полноте системы собственных и присоединенных функций возмущенного дифференциального оператора в частных производных. Максудов (h əjəvanlandırılmış xüsusi törəməli diferensial operatorun məxsusi və qoşulmuş funksiyalары sisteminin tamlığı haqqında. Максудов Ф. Г.), АзәрбСССР, Элмләр Акад. хәбәрләри. Физ.-техн. вә кимя элмләри сер., Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и хим. н., 1958, № 6, 15—21 (азерб.; рез. русск.)

Рассматривается оператор

$$L_0 u = -\Delta u + p(x, y, z)\, u,$$

действующий в гильбертовом пространстве $L_2(E_3)$, где $p(x, y, z) \geqslant -c^2$ — суммируемая и ограниченная в каждой конечной области действительная функция, удовлетворяющая условиям:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} p(x, y, z) = \infty$,

б) $p(x, y, z) < Ae^{c\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$

в) $|p(\alpha, \beta, \gamma) - p(x, y, z)| < Ar\,[p(x, y, z)]^3$, $r \leqslant 1$,

$$p(x, y, z) < Ae^{\frac{1}{2}r\sqrt{p(x, y, z)}}, \quad r > 1$$

г) $$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy\,dz}{(p(x, y, z)+\mu)^2} < \infty.$$

При этих условиях оператор L_0 является самосопряженным, имеющим чисто дискретный спектр. Наряду с оператором L_0 рассматривается возмущенный оператор

$$Lu = L_0 u + q(x, y, z)\, u,$$

где $q(x, y, z)$ — суммируемая и ограниченная по модулю в каждой конечной области комплексная функция.

Очевидно, оператор L является вообще несамосопряженным оператором. Доказана теорема: Если функция $p(x, y, z)$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в), (г), то для полноты системы собственных и присоединенных функций оператора L в $L_2(E_3)$ достаточно, чтобы

$$\lim \frac{|q(x, y, z)|}{p(x, y, z)} = 0, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Из резюме автора

10005. Некоторые применения операторов трансмутации. Лион (Quelques applications d'opérateurs de transmutation. Lions J. L.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. **71**, Paris, 1956, 125—136. Discuss., 136—137 (франц.)

Пусть

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - q(x), \qquad x \in R$$

и $q(x)$ — действительная или комплексная бесконечно дифференцируемая функция. Пусть H — пространство функций или распределений, определенных на R. Рассматриваются операторы X, определенные и непрерывные в H и удовлетворяющие условию коммутирования

$$D^2 XT = XLT \qquad (1)$$

для всех $T \in H$. Если X отображает H в H изоморфно, то он называется оператором трансмутации (в русской литературе „оператор преобразования"). Аналогично можно определить оператор трансмутации для случая линейного дифференциального оператора L произвольного порядка m (заменив D^2 на D^m).

Рассматриваются следующие три случая пространства H:

I. H=пространству E бесконечно дифференцируемых функций на R (или H=пространству D' обобщенных функций на R).

II. H=пространству D_+ бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю слева от некоторой точки.

III. H=пространству E_a (соответственно F_a) дважды непрерывно дифференцируемых функций для $x \geqslant a$ и равных нулю в точке $x = a$ (соответственно первая производная в этой точке равна нулю).

Естественно, что оператор X зависит от пространства H. Более того, в данном пространстве оператор X определяется неоднозначно. Можно искать оператор X в виде:

$$\text{(I)} \quad Xf(x) = f(x) + \int_{-x}^{x} X(x, y) f(y)\, dy,$$

$$\text{(II)} \quad Xf(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{x} X(x, y) f(y)\, dy,$$

$$\text{(III)} \quad Xf(x) = f(x) + \int_{a}^{x} X(x, y) f(y)\, dy.$$

Во всех случаях для $X(x, y)$ получается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X - \frac{\partial^2}{\partial y^2} X + q(y)\, X = 0$$

и дополнительные условия в зависимости от случая. Изучаются также операторы трансмутации для случая сингулярного оператора

$$L_x = D^2 + \frac{2(k + 1/2)}{x} D.$$

Во второй части автор рассматривает ряд применений операторов трансмутации. Идею этих применений мы поясним кратко на одном примере (также рассмотренном автором).

Если $u(t, P)$ есть решение смешанной задачи $\partial^2 u/\partial t^2 = Au$ (при некоторых дополнительных условиях, которые мы не выписываем), где A—оператор, не зависящий от t, то из (1) следует, что $X_t^{-1} u = v(t, P)$ есть решение задачи $L_t v = Av$.

Примечание референта. Некоторые из применений операторов трансмутации рассматривались в работах Олевского (РЖМат, 1956, 428; РЖМат, 1954, 5581). Б. М. Левитан

10006. О задаче Коши для одного класса гиперболических уравнений с начальными данными на линии параболического вырождения. Цзи Минь-и (в подлиннике Чи Минь-ю), Шусюэ сюэбао, Acta Math. sinica, 1958, 8, № 4, 521—530 (кит.; рез. русск.)

В настоящей заметке доказываются существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши для уравнения

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad a = \text{const} \qquad (1)$$

с начальными данными на прямой $y = 0$

$$u(x, 0) = \tau(x),$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x).$$

В характеристических переменных

$$\xi = x + \frac{y^2}{2}, \qquad \eta = x - \frac{y^2}{2},$$

уравнение (1) переходит в уравнение Эйлера—Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1-a}{4(\xi-\eta)}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1+a}{4(\xi-\eta)}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0, \qquad (1')$$

а условия (2) принимают вид

$$u(\xi,\xi)=\tau(\xi),$$

$$\lim_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\nu(\xi). \qquad (2')$$

Пользуясь интегралом Римана—Лиувилля, доказано в предположениях $\tau\in C_{[1-\beta']+1}$, $\nu\in C_{[\beta]+1}$, что решение задачи (2') для уравнения (1') существует и выразится формулами

$$u(\xi,\eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\beta')}\int_\eta^\xi \nu(\alpha)(\xi-\alpha)^{-\beta}(\alpha-\eta)^{-\beta'}d\alpha+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,(\xi-\eta)^{1/2}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta')}\int_\eta^\xi \tau(\alpha)(\xi-\alpha)^{\beta'-1}(\alpha-\eta)^{\beta-1}d\alpha,$$

$$a\not\equiv 1,3 \pmod 4,$$

$$u(\xi,\eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\beta')}\int_\eta^\xi \nu(\alpha)(\xi-\alpha)^{-\beta}(\alpha-\eta)^{-\beta'}d\alpha+$$

$$+\sum_{k=0}^{[-\beta']}\frac{(-\beta')!\,\sqrt{\pi}\,\tau^{(k)}(\xi)}{k!\,(-k-\beta')!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}(\xi-\eta)^k, \quad a\equiv 1 \pmod 4$$

$$u(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{[\beta-1]}\frac{(\beta-1)!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\nu^{(k)}(\xi)}{k!\,(\beta-k-1)!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}(\xi-\eta)^{k+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,(\xi-\eta)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta')}\int_\eta^\xi \tau(\alpha)(\xi-\alpha)^{\beta'-1}(\alpha-\eta)^{\beta-1}d\alpha,$$

$$a\equiv 3 \pmod 4,$$

где $\beta=\frac{1+a}{4}$, $\beta'=\frac{1-a}{4}$ и все расходящиеся интегралы понимаются в смысле Римана—Лиувилля.

Доказано, что общее решение уравнения (1') можно представить в виде

$$Z(\beta,\beta')=\int_\eta^\xi \Phi(\alpha)(\xi-\alpha)^{-\beta}(\alpha-\eta)^{-\beta'}d\alpha+$$

$$+(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_\eta^\xi \Psi(\alpha)(\xi-\alpha)^{\beta'-1}(\alpha-\eta)^{\beta-1}d\alpha,$$

где Φ и Ψ—произвольные функции и все интегралы—интегралы Римана—Лиувилля, из которого сразу вытекают единственность решения задачи (2') для уравнения (1') и устойчивость его в следующем смысле: для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$ так, если

$$|\tau^{(k)}(\xi)-\tau^{*(k)}(\xi)|<\delta, \quad k=0,1,\ldots,[1-\beta'],$$

$$|\nu^{(k)}(\xi)-\nu^{*(k)}(\xi)|<\delta, \quad k=0,1,\ldots,[\beta],$$

то

$$|u(\xi,\eta)-u^*(\xi,\eta)|<\varepsilon.$$

Резюме автора

10007. О регулярности областей для параболических уравнений. Мураками (On the regularity of domains for parabolic equations. Murakami Haruo), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 6, 347—348 (англ.)

Пусть G — область с границей Γ в m-мерном евклидовом пространстве R^m, $D\equiv G\times(0,\infty)$.

Фулкс показал (РЖМат, 1957, 8669) следующее: если область D регулярна для уравнения теплопроводности, то G регулярна для уравнения Лапласа.

В реферируемой заметке доказывается обратное. Если G регулярна для уравнения Лапласа, то D регулярно для уравнения теплопроводности.

Доказательства приводятся единым методом (построением барьеров). Результат не является новым.

А. Л. Крылов

10008. Отношение между решениями параболических и эллиптических дифференциальных уравнений. Мураками (Relations between solutions of parabolic and elliptic differential equations. Murakami Haruo), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 6, 349—352 (англ.)

Пусть G есть область, регулярная для уравнения Лапласа в m-мерном евклидовом пространстве E^m с границей Γ, $D\equiv G\times(0\propto)$, $B\equiv\Gamma\times(0,\infty)$. Известно (реф. 10007), что D и G регулярны одновременно.

Определяются обобщенные операторы теплопроводности и Лапласа

$$\smile u=\lim_{r\to 0}\frac{(n+2)^{\frac{m}{2}+1}}{m\pi^{\frac{m}{2}}r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ldots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{u(\xi,\tau)-u(x,t)\}\times$$

$$\times\sin^{m-1}\upsilon\cos\upsilon\,(\log\operatorname{cosec}\upsilon)^{\frac{m}{2}}J d\varphi_1,\ldots,d\varphi_{m-1}d\upsilon$$

$$\Delta u=\lim_{r\to 0}\frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{m}{2}}r^2}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ldots$$

$$\ldots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{u(\xi)-u(x)\}J d\varphi_1,\ldots,d\varphi_{m-1},$$

обращающиеся на функциях из C^2 в обычные операторы

$$\smile u=\sum_{i=1}^m\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Delta u=\sum_{i=1}^m\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Рассматриваются уравнения

$$\smile u=f(x,t,u), \qquad (E_1)$$

$$\Delta v=\overline{f}(x,v), \qquad (E_2)$$

где f и $\overline{f}$—непрерывные функции в D и G соответственно, ограниченные на любом компакте по u и v и неубывающие по последним переменным.

Имеет место следующая теорема: Пусть $u(x,t)$ есть решение уравнения (E_1) в D, удовлетворяющее непрерывным начальному условию $u(x,0)=g(x)$ и граничному условию $u(\overline{x},t)=\varphi(\overline{x},t)$, $(\overline{x}\in B)$, причем $g(\overline{x})=\varphi(\overline{x},t)$, и пусть $\varphi(\overline{x},t)\underset{t\to\infty}{\to}\varphi(\overline{x})$ равномерно.

Тогда, если для любого $U>0$, $f(x,t,u)\to\overline{f}(x,u)$ равномерно на множестве $\{\{x,u\};\ x\in G,\ |u|\leqslant U\}$ при $t\to\infty$, то $u(x,t)\to v(x)$ равномерно ($v(x)$ есть решение уравнения (E_2), обращающееся в $\varphi(\overline{x})$ при $\overline{x}\in\Gamma$). Доказательство проводится элементарно.

Следствие. Если $f(x,t,0)\equiv 0$ (тогда $g(\overline{x})=0$, $\overline{x}\in B$), то $u(x,t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$. А. Л. Крылов

10009. Об одной задаче теплопроводности для двух сред. Шилькрут Д. И., Прикл. матем. и механ. 1956, **20**, № 2, 284—288

10010. Доминирование и параболические операторы. Трев (Domination et opérateurs paraboliques. Trèves François), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 6, 867—870 (франц.)

Статья является продолжением заметок автора, помещенных в РЖМат, 1958, 8862; 1959, 2861, откуда берется основная терминология. Автор устанавливает несколько характеристических признаков p-параболичности в смысле И. Г. Петровского дифференциальных операторов с постоянными и переменными коэффициентами. Л. Н. Слободецкий

10011. О решении задачи Коши для параболических уравнений. Асрал (On the solution of the Cauchy problem for parabolic equations. Asral Bediz), Istanbul üniv. fen. fac. mecm., 1956, **A21**, № 2, 65—83 (англ.; рез. турецк.)

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}+k(x)\,u=0.$$

Доказывается, что если функция $k(x)$ удовлетворяет хотя бы одному из некоторой последовательности нелинейных дифференциальных уравнений, то решение задачи Коши может быть получено с помощью некоторой интегральной формулы, аналогичной формуле Пуассона для уравнения теплопроводности. Рассмотрен пример. Д. М. Эйдус

10012. Корректная граничная задача для некоторых неклассических операторов. Дезин А. А., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 4, 595—598

Пусть $V=[0\leqslant x_0\leqslant 1]$ — цилиндр над звездной областью Q ν-мерного пространства $x_1,\ldots,x_\nu$. В V изучается уравнение

$$au\equiv -D_0^3u+bu=f;\qquad D_0=\frac{\partial}{\partial x_0},\qquad (1)$$

где b—эллиптический оператор (в обобщенном смысле) с постоянными коэффициентами, с определенными свойствами дефинитности. Вводится норма

$$(u,v)=\int_V uvdV;\quad |u,H|\equiv(u,u).$$

Пусть C—гладкие функции, финитные в V. Оператор b предполагается обладающим свойством, что на $u\in C$

$$(D_0u,\ D_0u)+(bu,u)=(D_0u,\ D_0u)+$$
$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\,b_\alpha\,(D^\alpha u,\ D^\alpha u)\qquad (2)$$

можно рассматривать как некоторую норму u. Замыкание C в этой метрике обозначается W:

$$|u,W|=(D_0u,\ D_0u)+(Bu,\ Bu).$$

Примером эллиптического в этом смысле оператора является оператор

$$b\equiv -D_1^2+D_2^4.$$

Далее строится два расширения оператора a, разрешимых в смысле Хёрмандера.

Расширение S: на функциях $u\in W$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$D_0^2u\in H,\quad D_0u\,|_{x_0=0}=0\qquad (S)$$

определяется оператор a как функционал на W:

$$\langle au,v\rangle=(D_0^2u,D_0v)+(Bu,\ Bv),\quad v\in W.\qquad (3)$$

Пространство W^{-1} линейных функционалов над W получается, как правило, замыканием H по норме

$$|fW^{-1}|=\sup_{v\in W}\frac{|(f,v)|}{|v,W|}.$$

Функция $u\in W$ называется S-решением уравнения (1) с правой частью $f\in W^{-1}$, если u есть предел в W функций u_i таких, что $|au_i-f,W^{-1}|\to 0$.

Соответствующее расширение оператора a называется S-расширением.

Теорема о разрешимости S-расширения: При любой $f\in W^{-1}$ S — решение уравнения (1) существует и единственно в W.

Далее в работе определяется другое расширение оператора a, отличное от S, с помощью которого определяется „слабое“ решение (1). Доказывается совпадение слабого и сильного решения уравнения (1) с правой частью из W^{-1}.

Существенным отличием от более ранних работ, посвященных этим вопросам, автор считает замыкание оператора в пространстве обобщенных функций W^{-1} (обычно замыкания строились в H). А. Л. Крылов

10013. О частном классе линейных уравнений в частных производных 3-го порядка с тремя независимыми переменными. Георгиу (O clasă particulară de ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordinul III, cu trei variabile independente. Gheorghiu O. E.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR, Baza Timişoara. Ser. ştiinţe tehn., 1956, **3**, № 1-2, 17—27 (рум.; рез. русск., франц.)

10014. О некоторых областях применения полиоператоров. Борняс (Asupra unor domenii de aplicabilitate a polioperatorilor. Borneas M.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR, Baza Timişoara. Ser. 1, 1955, **2**, № 1-4, 45—50 (рум.; рез. русск., франц.)

10015. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. Богдан-Теодореску (Asupra unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul patru. Bogdan-Teodorescu Gabriela), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1958, **9**, № 1, 181—190 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор решает задачу Коши для уравнения четвертого порядка вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha_2\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0$$

в полосе $x\in(-\infty\ +\infty)$; $t\in[0,T]$ $T>0$ с начальными данными $u(x,0)=f_1(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=f_2(x)$, используя преобразование Фурье. Резюме автора

10016. О проблеме пластинки, ограниченной эллипсоидальной и закрепленной границей. Ночилла (Sul problema della piastra a contorno epicicloidale incastrata. Nocilla Silvio), Atti Accad. sci. Torino. Cl.

sci. fis., mat. e natur., 1952—1953, 87, № 1, 79—89 (итал.)

Автор ищет решение уравнения $\nabla^4 w - \lambda^4 w = 0$ в виде

$$\sum [c_k J_k(\lambda r) + d_k I_k(\lambda r)] \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\theta$$

и подчиняет это решение однородным граничным условиям $w = dw/dn = 0$ на границе эпициклоиды $x + iy = re^{i\theta} = nae^{i\varphi} + be^{in\varphi}$. Система однородных уравнений сводится к бесконечному детерминантному уравнению для λ. и автор доказывает, что бесконечный детерминант сходится. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, №1, 90

10017. Дифференциальные свойства решений систем дифференциальных уравнений. Хёрмандер (Differentiability properties of solutions of systems of differential equations. Hörmander Lars), Arkiv mat., 1958, 3, № 6. 527—535 (англ.)

Рассматривается система уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{n} P_{jk}(D) u_k(x) = f_j(x) \quad (j = 1, \ldots, m) \qquad (1)$$

(обозначения те же, что и в РЖМат, 1957, 2325). Она называется гипоэллиптической, если из $f_j \in C^\infty$ для всех j следует $u_k \in C^\infty$ для всех k, и эллиптической, если из аналитичности f_j следует аналитичность u_k. Обобщая свой прежний результат для случая $m = n = 1$ (см. цит. выше реферат), автор устанавливает необходимое и достаточное условие гипоэллиптичности системы (1): если V — многообразие в ν-мерном комплексном пространстве C^ν точек ζ, на котором ранг матрицы $P_{jk}(\zeta)$ меньше n, а ξ — вещественная точка из C^ν, то расстояние от ξ до V стремится к ∞ при $\xi \to \infty$. Необходимость этого условия доказывается тем же путем, что и в случае $m = n = 1$. Доказательство достаточности сводится к случаю $m = n = 1$ с помощью алгебраической теоремы Леха (работа Леха опубликована в том же журнале), в силу которой из указанного условия следует, что каждое u_j — решение гипоэллиптического уравнения.

Условие эллиптичности формулируется так: расстояние от ξ до V имеет порядок $\| \xi \|$.

Для случая $m = n = 1$ автором ранее были получены оценки роста производных от решения гипоэллиптического уравнения $P(D) u = 0$ в компактной области при росте порядка производных. Эти оценки обобщали классические оценки Жевре для уравнения теплопроводности. Здесь эти оценки обобщаются с помощью теоремы Леха на гипоэллиптические системы (1) (а также на более общие системы) и показывается, что их нельзя улучшить. М. С Агранович

10018. О единственности решения смешанной задачи для одной системы линейных уравнений в частных производных. Чэнь Цин-и (в подлиннике: Чэнь Чин-и), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, 8, № 4, 483—489 (кит.; рез. русск.)

В этой заметке доказана следующая

Лемма. Пусть $f(x, \lambda)$ относительно x есть непрерывная на $(0, \infty)$ функция, причем удовлетворяет при фиксированном λ условию

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x, \lambda)}{\frac{1}{2} \alpha x} = 0, \quad \alpha > 0.$$

Пусть $f(x, \lambda)$ относительно λ есть полином. Если для всех $\lambda > \alpha$ имеем

$$\int_0^\infty f(x, \lambda) e^{-\frac{\lambda}{2} x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda x dx = 0,$$

то $f(x, \lambda) \equiv 0$.

С помощью этой леммы установлена

Теорема. Пусть в области $(t \geqslant 0, x_l \geqslant 0, l = 1, \ldots, L)$ дана система вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(t, \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}, \ldots, \frac{\partial^3}{\partial x_L^3}\right) u, \quad u = (u_1, \ldots, u_M),$$

$$P = (P_{ij})_{i,j}^{M} = 1, \qquad (1)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad (2)$$

и при граничных условиях одного из следующих типов:

$$\left.\frac{\partial^{3l_{ij}+K} u_j}{\partial x_i^{3l_{ij}+K}}\right|_{xl=0} = 0; \quad l_{ij} = 0, 1, \ldots, m_{ij} - 1; \quad i = 1, \ldots, L;$$

$$j = 1, \ldots, M; \begin{cases} K = 0,1; & (3_1) \\ K = 1,2; & (3_2) \\ K = 0,2; & (3_3) \end{cases}$$

где $3m_{ij}$ — порядок наивысших производных функции u_j по x_i в системе (1). Пусть коэффициенты в правой части системы (1) есть непрерывные функции от t. Если смешанная задача (1) — (3) имеет решение $u(x, t)$, удовлетворяющее условиям

$$\left|\frac{\partial^{l_0 + l_{ij} + \ldots + l} L_i u_j}{\partial t^{l_0} \partial x_1^{l_{1j}} \ldots \partial x_L^{l_{Lj}}}\right| \leqslant A e^{\sum \frac{a_l}{2} x_l}, \quad x_i \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T (\leqslant \infty),$$

$$a_i > 0, \quad l_0 = 0, 1; \quad l_{ij} \leqslant 3m_{ij};$$

то это решение является единственным решением данной задачи. Резюме автора

10019. Нелинейная краевая задача для системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа. Кропачев В. Ф., Тр. Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1958, 2, 241—245

Ищется регулярное в области T, ограниченной замкнутым контуром $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$, и непрерывное в области $T + L$ решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = a(x, y) u(x, y) + b(x, y) v(x, y) + f(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c(x, y) u(x, y) + d(x, y) v(x, y) + g(x, y), \qquad (1)$$

удовлетворяющее на L условию

$$\alpha(t_0) u(t_0) + \beta(t_0) v(t_0) = \lambda \Phi[t_0, u(t_0), v(t_0), \lambda] + F(t_0).$$

Здесь $\alpha(t_0)$, $\beta(t_0)$, $F(t_0)$ — действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера на L; $\Phi(t_0, u, v, \lambda)$ — непрерывная действительная функция аргументов, удовлетворяющая условиям Гёльдера по t_0 и Липшица по u и v, не содержащая членов, линейных относительно u и v, λ — вещественный параметр.

Задача решается с помощью сведения системы (1) к системе нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Н. И. Мозжерова

10020. Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами. Житомирский Я. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1 (8), 55—74

Рассматриваются линейные системы, параболические по И. Г. Петровскому и имеющие коэффициенты, зависящие лишь от пространственных переменных. Коэффициенты при старших производных предполагаются ограниченными, остальные коэффициенты могут иметь на бесконечности степенной рост, зависящий от порядка

производной, при которой стоит данный коэффициент. Для таких систем доказывается существование фундаментальной матрицы, а также оценки для нее и для ее производных. С помощью этих результатов доказывается существование и единственность решения задачи Коши в некоторых классах быстро растущих функций. Кроме того, показывается, что если коэффициенты растут быстрее, чем предположено, то единственность решения задачи Коши может не иметь места даже в классе $L_2(-\infty, \infty)$. Д. М. Эйдус

10021. О поведении собственных функций уравнения Шредингера. Шноль Э. Э., Матем. сб., 1957, **42**, № 3, 273—286

Устанавливаются теоремы о связи между расположением точки λ относительно спектра дифференциального оператора, определяемого операцией

$$-\Delta u + q(P)\,u \qquad (1)$$

во всем пространстве E, и поведением решений $\varphi(P, \lambda)$ соответствующего однородного уравнения

$$-\Delta\varphi + q(P)\,\varphi = \lambda\varphi \qquad (2)$$

при $|OP| \to \infty$.

Потенциал $q(P)$ предполагается полуограниченным снизу, так что $q(P) \geqslant q_0 > -\infty$ ($P \in E$) и, следовательно, $L = L^*$.

Основные результаты статьи сводятся к следующему.

Теорема 1. Если расстояние собственного значения λ оператора L от непрерывной части спектра этого оператора равно d, то при всех $P \in E$ будет

$$|\varphi(P, \lambda)| < Ce^{-\mu r},$$

где $r = |OP|$, $\mu = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\eta^2}{a^2}\right)$, η — любое положительное число, меньшее d, и $a = a(q_0)$.

Теорема 2. Если при данном λ для некоторого решения $\varphi(P, \lambda)$ уравнения (2) при всех $P \in E$ выполнено неравенство

$$|\varphi(P, \lambda)| < Ce^{\mu r},$$

то расстояние точки λ от спектра оператора L не превосходит величины $d = a(e^{2\mu} - 1)^{\frac{1}{2}}$, где $a = a(q_0)$.

При доказательстве этих двух предложений используются некоторые оценки для решений эллиптических уравнений, приводимые в статье без доказательств. Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Если некоторое решение $\varphi(P, \lambda)$ уравнения (2) при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет для всех $P \in E$ неравенству

$$|\varphi(P, \lambda)| < C(\varepsilon)\,e^{\varepsilon r},$$

то точка λ принадлежит спектру оператора L. В частности из теоремы 3 следует

Теорема 4. Если при данном λ существует ограниченное решение $\varphi(P, \lambda)$ уравнения (2), то точка λ принадлежит спектру оператора L.

Неполным обращением этой теоремы для одномерного случая, когда операция (1) и уравнение (2) имеют вид

$$-y'' + q(x)\,y \quad (x \geqslant 0), \quad -\varphi'' + q(x)\,\varphi = \lambda\varphi, \qquad (3)$$

является следующая

Теорема 5. Если при $x \geqslant 0$ выполнено неравенство $q(x) \geqslant q_0 > -\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех по спектральной мере $\rho(\lambda)$ оператора L значений λ будет

$$|\varphi(x, \lambda)| < C(\varepsilon)\,|x|^{1/2+\varepsilon}.$$

Доказательство этой последней теоремы в статье не приводится.

Примечания референта. 1) В статье имеется несколько несущественных погрешностей. В частности, в формулировках теорем 1 и 2 вместо указанных выше значений величин μ и d дано $\mu = \ln\left(1 + \frac{\eta}{a}\right)$ и $d = a(e^{\mu} - 1)$. 2) В § 5 автор неправильно считает решенной проблему об ограниченности при почти всех по спектральной мере значениях λ решений $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (3). В действительности, для одномерного случая теорему 5 автора следует считать наилучшим из результатов, достигнутых при обращении теоремы 4.

И. М. Глазман

10022. О некоторых классах нелинейных уравнений в частных производных 2-го порядка. Жилли (Sur certaines classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre, non linéaires. Gillis P.), Colloq. Centre belge rech. math. 1, 1953, Paris, 1954, 105—118 (франц.)

10023 К. Упражнения по инженерной математике. В. VIII. Дифференциальные уравнения в частных производных. Фрёйд (Műszaki matematikai gyakorlatok. B. VIII. Parciális differenciálegyenletek. Freud Géza. Budapest, Tankönyvkiadó, 1958, 254 l., ill., 24 Ft.) (венг.)

10024 К. Краевые задачи математической физики. Гарнир (Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction à leur étude générale. Garnir H. G. Basel — Stuttgart, Birkhäuser, 1958, 234 p., ill., 28.— Sfr.), Schweiz. Buch, 1959, **A59**, № 1, 28 (франц.)

10025 К. Базисный метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Нобл (Methods based on the Wiener — Hopf technique for the solution of partial differential equations. Noble B. London, Pergamon Press, 1958, x, 246 pp., ill., 65 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 472, 9 (англ.)

10026 К. Дифференциальные уравнения гиперболического типа. Лере (Hyperbolic differential equations. Leray Jean. The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1953, 240 pp., 4.00 doll., mimeogr.) (англ.)

10027 К. Аналитическая теория теплопроводности. Фурье (Analytical theory of heat. Fourier Joseph, Transl. New York, Dover Publs, Inc., 1955, xxiii, 466 pp., 1.95 doll.) (англ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

Редакторы *В. В. Немыцкий, А. Г. Свешников, Н. И. Мозжерова*

10028. Релятивистские поправки в теории движения Луны. Брумберг В. А., Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1958, **6**, № 10, 733—756 (рез. франц.)

10029. Выбор параметров динамических систем по минимуму интеграла действия. Никитин Е. А., Научн. докл. высш. школы. Машиностр. и приборостр., 1958, № 3, 197—206

10030. Вопросы нелинейной механики. Де-Кастро-Бжезицкий (Estudios sobre la mecanica no-lineal. De Castro Brzezicki A. de), Rev. mat. hisp.-amer., 1958, **18**, № 4, 146—156 (исп.)

Начало см. РЖМат, 1959, 4682.

10031. Об эквивалентности неголономных механических систем. Гриндей (Sur l'équivalence des systèmes mécaniques non holonomes. Grindei I.), An.

ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I., 1957, 3, № 1-2, 197—206 (франц.; рез. русск., рум.)

Рассматриваются неголономные механические системы с реономными нелинейными связями первого порядка, т. е. со связями, выражающимися уравнениями вида

$$f_\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, t) = 0$$
$$(\sigma = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Отказываясь от применения принципа Даламбера — Лагранжа, автор выводит уравнения движения подобных систем из принципа Гаусса, считая, что реакции связей принадлежат к подпространству векторов $\frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{x}_i}$ (терминология принадлежит референту) и вводя, следовательно, неопределенные множители λ_σ .

Далее показывается, что множители λ_σ можно исключить из уравнений движения, пользуясь уравнениями связей, в результате чего получаются собственно уравнения движения, без реакций связей.

Затем ставится вопрос об эквивалентности двух механических систем, с разными координатами, но со связями одного и того же вида и, по-видимому, с активными силами общего характера. Показывается, что решение данного вопроса сводится к разрешенной уже задаче об эквивалентности двух пространств аффинной связности. В. В. Добронравов

10032. О достаточных условиях устойчивости вращения волчка «тип-топ», находящегося на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Исаева Л. С., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 2, 403—406

10033. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Эйлера. Гуляев М. П., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 2, 406—408

10034. О форме уравнений Лагранжа второго рода для систем точек переменной массы. Иримичук (Asupra formei ecuaţiilor lui Lagrange de specia a doua pentru sisteme de puncte cu mase variabile. Irimiciuc N.), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1958, **4**, № 1-2, 99—102 (рум.; рез. русск., франц.)

Даются уравнения Лагранжа второго рода для системы точек переменной массы в виде

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_j}\right] - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_i} S_i\right) - \frac{\partial m_i}{\partial q_j} S_i\right] + m_i \times$$
$$\times \langle v_{R_i}, r_i \rangle + \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial \bar{v}_{R_i}}{\partial \dot{q}_j} v_i\right) = Q_j \qquad (1)$$

и рассматриваются частные случаи, когда уравнение (1) имеет более простой вид.

Системы точек переменных масс в зависимости от обобщенных координат, обобщенных скоростей и от времени, считаются голономными с идеальными связями и имеющими m степеней свободы. Резюме автора

10035. Движение системы с n степенями свободы, кинетическая и потенциальная энергии которой даны в квадратичной форме. Гронец (Die Bewegungen mit n Freiheitsgraden, wo die kinetische und die potentionelle Energie mit der quadratischen Form gegeben ist. Hronec J.), Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae Math., 1958, **3**, № 1, 1—15 (нем.; рез. словацк., русск.)

10036. О двух методах локализации собственной частоты электрической системы с линейными звеньями. Пароди (Sur deux méthodes de localisation des fréquences propres des réseaux électriques linéaires maillés. Parodi Maurice), Ann. télécommuns, 1958, **13**, № 1-2, 39—41 (франц.)

Предполагается, что собственные частоты колебаний электрической системы с линейными звеньями, описываемой уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{d^2}{dt^2} + b_{ij}\frac{d}{dt} + c_{ij}\right)x_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

являются решениями для

$$|\, a_{ij}z^2 + b_{ij}z + c_{ij} \,| = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

С помощью двух различных методов, использующих результаты работ Пароди (РЖМат, 1959, 4264) Брауэра, Островского (Ostrowski, Rend. math. e applic., 1951, Ser. V, **1**, §1—2, 156), устанавливаются те части левой комплексной полуплоскости z, в которых содержатся собственные частоты z колебаний.

Используя произвол некоторых параметров электрической системы, оказывается возможным значительно сузить интересующую область собственных частот, т. е. достигнуть лучшей локализации собственных частот колебаний.

Второй метод предпочтительнее первого, так как он, будучи не связан с большими вычислениями, приводит часто к лучшей локализации. Критерий локализации, относящийся к этому методу, имеет вид:

$$|\, a_{ii}z^2 + b_{ii}z + c_{ii} \,| \leqslant k_i^{1/q}\left| |\, z \,|^2 \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,|^p\right)^{1/p} + \right.$$
$$\left. + |\, z \,| \left(\sum_{j=1}^{n} |\, b_{ij} \,|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\, c_{ij} \,|^p\right)^{1/p}\right| \quad (i = 1, \ldots, n;$$
$$i \neq j),$$

где $k_1, \ldots, k_n$, p, q — некоторые положительные числа, которыми можно целесообразно распорядиться, удовлетворяющие лишь соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i + 1} \leqslant 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Р. А. Спасский

10037. Определение начальных условий дифференциального уравнения сложной электрической цепи. Пухов Г. Е., Каляев А. В., Тр. Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1957, **3**, № 2, 129—137

Исследуется задача отыскания эквивалентных начальных условий при заданных линейных дифференциальных уравнениях в случае преобразования системы уравнений. Г. М. Уланов

10038. Приближенное определение траекторий бомб с помощью баллистики точки. Борбей (Bombapályák pontballisztikai közelítő meghatározása. Borbély S.), Magyar tud. akad. Müsz. tud. oszt. közl., 1955, **15**, № 1-4, 151—166 (венг.)

10039. Методы анализа нелинейных процессов. Черненко А. П., Сб. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1958, вып. 161, 62—90

Дается рассмотрение некоторых прикладных методов анализа нелинейных процессов в технике связи и сравнение их на конкретном примере. Г. М. Уланов

10040. О возможности некоторого вида колебаний в системах импульсного регулирования. Шао Да-чуан, Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 1, 85—89

Исследуется существование и устойчивость периодических колебаний в системе импульсного регулирования, линейная часть которой имеет вид:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = y \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \lambda_i \xi_i + y_i \text{ и } \operatorname{Re}\lambda_i < 0.$$

Г. М. Уланов

10041. К теории одной релейной системы. Бояринов В. С., Леонов Н. Н., Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 2, 114—134

Методом точечного преобразования рассмотрена динамика систем II порядка с регулятором типа «да — нет». При помощи диаграмм Кенигса — Лемерая произведено детальное исследование фазовой плоскости (двухлистной). Получены новые по сравнению с известными из литературы результаты о числе и устойчивости предельных циклов. Выделены области топологического подобия фазового пространства в случае ряда релейных характеристик. Г. М. Уланов

10042. Некоторые точные решения уравнения Чаплыгина, описывающие поток за твердым телом. Макки (Some exact solutions of Chaplygin's equation which represent flow past bodies. Mackie A. G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 141 (англ.)

Одной из трудностей при использовании метода годографа в газовой динамике для двумерного потока за каким-нибудь препятствием является определение особенности в точке плоскости годографа, изображающей поток в бесконечности. Для нахождения этой особенности и для получения точных решений автор использует метод функции Грина. Общая форма, в которой получены результаты, позволяет сравнить найденные решения уравнения Чаплыгина с соответствующими решениями различных сверхзвуковых приближений уравнения Чаплыгина.

10043. Приближенное аналитическое представление плоских сверхзвуковых течений газа. Воробьев О. С., Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 5, 778—781

В системе уравнений плоского сверхзвукового течения невязкого газа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\partial\mu} = F(t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right); \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\mu} = -F(t)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right), \quad (1)$$

где ψ и φ — функция тока и потенциал скорости; $2\lambda = t - \theta$, $2\mu = t + \theta$; t — функция модуля скорости, θ — угол наклона скорости, функция $F(t)$, которая в случае адиабатического течения газа определяется равенствами:

$$F = (\varkappa + 1) M^4 (M^2 - 1)^{-3/2}/4,$$

$$t = \nu(M) = \sqrt{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}\ \operatorname{arctg}\sqrt{(\varkappa-1)(M^2-1)/(\varkappa+1)} - \operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1}, \quad (2)$$

аппроксимируется выражением

$$F = k/(c - \nu). \quad (3)$$

Здесь k и c — произвольные постоянные, $\varkappa$ — отношение теплоемкостей газа, M — число Маха. При k целом общее решение уравнений (1) (уравнений Дарбу) имеет вид:

$$\varphi = \partial^{2k-2}[(f_1(\lambda) + f^2(\mu))(\lambda + \mu - c)]/\partial\lambda^{k-1}\partial\mu^{k-1}, \quad (4)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. В ряде работ выражение (4) используется как приближенное решение системы (1) (Христианович С. А., Прикл. матем. и механ., 1947, **11**, № 2 при $k = \pm 1$). В данной работе постоянная $k = (\varkappa + 1)/2(\varkappa - 1)$ определяется из условия касания кривых, заданных равенствами (2) и (3) при $M \to \infty$ и $k = 3$ при $\varkappa = 1{,}4$ (воздух). Путем выбора постоянной c могут быть получены различные степени приближения этих кривых более высокие, чем ранее имевшиеся. Удается получить четвертый порядок касания аппроксимационной кривой $p(\rho)$ с кривой адиабатического изменения давления p в зависимости от плотности ρ. Даны методы решения четырех основных краевых задач плоских сверхзвуковых течений газовой динамики: задачи Гурса, задачи Коши, задачи с заданными условиями на характеристике и свободной поверхности и задачи с заданными условиями на характеристике и прямолинейной стенке. И. Л. Кароль

10044. Построение точных решений уравнений одномерной газодинамики при наличии разрывов. Рязанов Е. В., Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 5, 720

Референтом и автором для построения точных разрывных решений уравнений одномерной газодинамики был дан (Прикл. матем. и механика, 1958, **22**, вып. 2) метод сопряжения частного решения, найденного Л. И. Седовым (РЖМат, 1955, 1776), с тривиальным решением — покоем. Было показано, что основная трудность в решении задачи о сопряжении заключается в отыскании решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка типа Риккати и исследованы некоторые частные случаи решения задачи.

В рассматриваемой заметке найдено общее решение упомянутого уравнения Риккати, позволяющее построить точное аналитическое решение уравнений газодинамики при наличии разрывов типа ударных волн.

В. П. Коробейников

10045. Проблема стационарного движения в газовом лучистом слое. Погожельский (Problème du mouvement stationnaire dans une couche gazeuse rayonnante. Pogorzelski W.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, **2**, № 1, 7—8 (франц.)

См. РЖМат, 1955, 1800.

10046. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. Погодин Ю. Я., Сучков В. А., Яненко Н. Н., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 3, 443—445

Кратко излагаются результаты статьи (РЖМат, 1959, 950). Н. Н. Кузнецов

10047. Вырожденные волны в нестационарном течении газа. Нейлор (Degenerate waves in unsteady gas flow. Naylor D.), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 5, 705—722 (англ.)

Рассматривается пространственное потенциальное течение газа с адиабатическим уравнением состояния. Вырожденными волнами автор называет частные решения уравнений движения, выражающиеся через функции меньшего, чем четыре, числа независимых переменных. Строится точное решение вида $q = q(\lambda(x, y, z, t), \mu(x, y, z, t))$, где q — скорость. Для плоского случая это было сделано в предыдущей работе автора (J. Rational Mech. and Analysis, 1956, **5**, 687—714). Показано, в частности, что линии, на которых скорость постоянна, являются прямыми, не пересекающимися в одной точке (т. е. отсутствуют центрированные волны). Вообще говоря, в вырожденных течениях указанного вида скорость звука явно зависит от t: $a = a(t, \lambda, \mu)$. В заключение рассмотрен случай, когда $a = a(\lambda, \mu)$.

Н. Н. Кузнецов

10048. О предельных линиях в диабатическом течении. Кшивоблоцкий, Хассан (On the limiting lines in diabatic flow. Krzywoblocki M. Z., Hassan H. A.), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1958, **6**, № 2, 115—139 (англ.)

Исследуется плоское течение идеального газа при наличии источников тепла (такое течение называется диабатическим). Выводятся потенциальное уравнение и

уравнение для функции тока в плоскости годографа и обсуждается ряд специфических особенностей диабатического течения. Показано, например, что при соответствующем распределении тепла в дозвуковом течении могут существовать вещественные характеристики. При переходе через линию параболичности течение, вообще говоря, не становится сверхзвуковым, т. е. в противоположность изэнтропическому течению линия параболичности и звуковая линия не совпадают. Исследован вопрос о предельных линиях в диабатическом течении. При некоторых предположениях показано, что в непрерывном течении с ограниченной областью гиперболичности предельных линий не существует.

Рассмотрено течение в плоском сопле Лаваля. Проведено его исследование в окрестности линии параболичности. Н. Н. Кузнецов

10049. Об одном точном решении уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости для слоистого течения. Кашкаров В. П., Уч. зап. Казахск. ун-та, 1957, **30**, 79—86

Рассмотрено частное решение уравнений гидродинамики для случая нестационарного одномерного течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскостями.

Найдены поля скоростей и температур при условии, что одна из плоскостей совершает гармонические колебания, а другая находится в покое.

В. П. Коробейников

10050. Плоские волны конечной амплитуды. Квек (Les ondes planes d'amplitude finie. Kwiek M.), Bull. Soc. amis sci. et lettres Poznań, 1956—1957 (1958), **B14**, 37—43 (франц.)

Автор рассматривает одномерное движение идеальной жидкости. Уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial m}=0,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho^2\frac{\partial u}{\partial m}=0\quad \left(p=\frac{a^2}{n}\rho^n\right),$$

где $m=\int_{x(0,t)}^{x(m,t)}\rho(x,t)\,dx$ — переменная Лагранжа, u, p, ρ — скорость, давление и плотность соответственно, после исключения p и u приводятся к следующему уравнению для $s(m,t)=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$

$$a^2\rho_0^n\frac{\partial}{\partial m}\left\{\frac{\partial s}{\partial m}\left[1+(n-1)s+\ldots\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial s}{\partial t}\left[1-2s+\frac{3}{2}s^2+\ldots\right]\right\}. \qquad (1)$$

Пусть в жидкости помещен источник колебаний. Автор строит решение (1), удовлетворяющее заданному условию на подвижной границе. Для этого $s(m,t)$ представляется в виде

$$s=A\sigma_1+A^2am\,\sigma_2+A^3a^2m^2\sigma_3+\ldots \qquad (2)$$

Здесь $A\sigma_1$ является звуковой конечной амплитуды, $\sigma_1(m,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial m^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial t^2}=0. \qquad (3)$$

Добавочные волны $\sigma_2, \sigma_3,\ldots$ вдали от источника ($m\to\infty$) также удовлетворяют уравнению (3). Возрастание амплитуды добавочных волн $A^2am\sigma_2$, $A^3a^2m^2\sigma_3,\ldots$ при удалении от источника приводит к бесконечному росту энергии волны. Поэтому решение (2) не удовлетворяет закону сохранения энергии. Н. Н. Кузнецов

10051. О возможности установившегося течения Бельтрами в вязкой жидкости. Баллабх (On the possibility of steady Beltrami flow in a viscous liquid. Ballabh Ram), Math. Student, 1958, 26, № 1, 21—24 (англ.)

Рассматривается течение вязкой жидкости в случае, когда вектор скорости колинеарен вихрю. В русской литературе такое течение обычно связывают с именем Громеко. В работе показывается, что такое течение не может иметь места как в безграничной вязкой жидкости при постоянном значении вектора скорости на бесконечности, так и в любом замкнутом объеме.

В. И. Меркулов

10052. Некоторые вопросы теории смазки поверхностей вращения. Тарапов И. Е., Бондаренко Л. И., Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-та, 1957, **21**, 25—36

Рассматривается задача о смазке подшипника конечной длины в обычном предположении малости зазора между шипом и подшипником. Полученные уравнения интегрируются методом Галеркина, причем предполагается отсутствие осевого перетекания смазки. Рассматриваются примеры, когда скользящие поверхности образованы эллипсоидом вращения, гиперболоидом и сферой. В. И. Меркулов

10053. Потенциал и функция тока вихревого диска в присутствии жесткой сферы. Мартинек, Е, Зорн (Potential and stream function of a vortex disk in the presence of a rigid sphere. Martinek J., Yeh G. C. K., Zorn H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 3, 717—727 (англ.)

См. РЖМех, 1959, № 7, 7556.

10054. О единственности решения основной задачи свободной тепловой конвекции жидкости. Севрук И. Г., Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1958, № 4, 218—221

Доказывается единственность решения основной граничной задачи нестационарного теплового конвективного движения вязкой несжимаемой жидкости в области, ограниченной замкнутой, кусочно-гладкой поверхностью при заданной скорости и температуре на границе и в начальный момент. Для доказательства используются результаты работы референта (РЖМат, 1955, 2225).

Д. Е. Долидзе

10055. Смешанная задача теории установившихся колебаний изотропного упругого тела для контуров с угловыми точками. Цандеков М., Тбилисис университетис шромеби, Тр. Тбилисск. ун-та, 1957, **64**, 209—214 (рез. груз.)

Рассматривается следующая задача. В односвязной области D, ограниченной кусочно-гладким контуром C, состоящим из конечного числа дуг, пересекающихся под углами $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$, отличными от 0 и 2π, найти решение уравнения

$$\Delta^* u+\omega^2 u=0,\quad \Delta^*\equiv\mu\Delta+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div},$$

удовлетворяющее на C условию:

$$Tu-h(s)\,u+\pi f(s)=0,$$

где T — оператор напряжения, $h(s)$ — непрерывная функция, $f(s)$ — абсолютно интегрируемая вектор-функция.

Решение поставленной задачи, так же как в работах В. Д. Купрадзе (Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, 1950, М.—Л.; РЖМат, 1954, 1674), ищется в виде потенциала антенного слоя и приводится к векторным интегральным уравнениям сингулярного типа в угловых точках контура C. Пользуясь методом Карлемана (Carleman T., Über das Neumann—Poincaresche Problem für ein Gebiet mit Ecken, Upsala, 1916), автор сводит задачу к эквивалентной системе двух интегральных уравнений, на которые распространяются теоремы Фредгольма. Д. З. Авазашвили

10056. К решению задачи поперечных колебаний жестких балок переменного сечения с помощью интегрального уравнения. Картошкин Л. И., УзССР

Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 10, 5—10 (рез. узб.)

Рассматривается уравнение распространения волны сдвига для двухступенчатого консольного стержня. Предполагается, что в начальный момент все точки стержня получают одинаковую скорость v. Решение задачи, как известно, сводится к определению $u(x, t)$ из условий

$$u_{tt} = a^2 u_{xx};\quad a^2 = \begin{cases} a_1^2; & 0 \leqslant x \leqslant l_1 \\ a_2^2; & l_1 \leqslant x \leqslant l_1 + l_2 \end{cases} \tag{1}$$

$$u(0, t) \equiv 0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l_1+l_2} = 0,\quad \text{если } t > 0; \tag{2}$$

$$u(x, 0) = 0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v,\quad 0 < x \leqslant l_1 + l_2$$

и условий сопряжения.

Здесь a_1, a_2 — некоторые постоянные. Автор решает данную задачу, не используя дифференциальное уравнение (1), а исходя из эквивалентного ему интегрального соотношения, данного в книге А. Н. Тихонова и А. А. Самарского (РЖМат, 1955, 3218 К). Из этой же книги заимствуется метод решения поставленной задачи. На основе полученного решения объясняются некоторые характерные особенности разрушения сооружений при динамической нагрузке. Естественно заметить, что определение u из (1), (2) возможно произвести непосредственным применением метода Даламбера.

И. И. Ворович

10057. К теории вынужденных колебаний мембраны. Хике (Ein Beitrag zu den erzwungenen Schwingungen einer Membran. Hieke Max), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 9-10, 356—368 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается задача о колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем под действием внезапно приложенной радиально-симметричной нагрузки.

Примечание референта. Статья не содержит новых научных результатов. Решение задач данного типа легко получается с помощью применения классических методов математической физики (РЖМат, 1957, 478 К). Н. Н. Лебедев

10058. О некоторых новых работах по математической теории упругости в Тбилисском университете. Купрадзе В. Д., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 3, М., АН СССР, 1958, 453—462

Сообщаются основные идеи и результаты исследований по теории упругости, проведенных в Тбилисском университете автором и его сотрудниками: Н. Г. Кахниашвили, М. И. Башалейшвили, Т. В. Бурчуладзе и К. И. Месхи. Изучались уравнения равновесия и уравнения стационарных колебаний упругих изотропных и, в некоторых случаях, неизотропных тел. Основная идея исследования заключалась в построении потенциалов, обобщающих на соответствующие уравнения теории упругости классические свойства ньютоновских потенциалов; коль скоро такие потенциалы построены, задача сводится в интегральному уравнению, разрешимость которого затем подробно исследуется. С. Г. Михлин

10059. Функция и тензоры Грина некоторых краевых задач теории потенциала и статической теории упругости для слоя и полупространства с шаровой полостью. Кауфман Р. Н., Инж.-физ. ж., 1958, 1, № 7, 72—83 (рез. англ.).

Строится функция Грина задачи Дирихле для трехмерного уравнения Лапласа и для области, имеющей вид слоя с шаровой полостью. Отраженная часть функции Грина получается в виде некоторого ряда по сферическим функциям; окончательный результат приведен для случая полости, симметричной относительно граничных плоскостей слоя. Отмечается, что тот же прием позволяет строить функцию Грина для слоя с несколькими шаровыми полостями, если их центры расположены на прямой, перпендикулярной к граничным плоскостям слоя. Построение существенно упрощается для случая полупространства со сферической полостью. Сходным приемом в случае слоя со сферической полостью построен также тензор Грина для уравнения статической теории упругости; среда предполагается изотропной. Построение проведено для краевых условий $\sigma_{zx} = 0$, $\sigma_{zy} = 0$, $U_z = 0$ на граничных плоскостях слоя и условии $U = 0$ на поверхности полости; здесь $U(U_x, U_y, U_z)$ — вектор смещений, $\sigma_{xx}, \ldots \sigma_{zy} \ldots$ — составляющие напряжений. Отмечается возможность построения тензора Грина и для некоторых других граничных условий. С. Г. Михлин

10060. Напряжения и деформации в слое грунта, лежащего на жесткой горизонтальной плоскости и нагруженного сверху силой, распределенной по прямоугольной площади. Цеули (Sforzi e deformazioni in uno strato del suolo, poggiante su un piano orizzontale rigido e sollecitato superiormente da un carico distribuito su un'area rettangolare. Zeuli Tino), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 1-3, 59—72 (итал.; рез. англ.)

Преобразование Фурье применяется к решению уравнений Бельтрами задачи о равновесии бесконечного упругого слоя, покоящегося на жестком плоском основании при отсутствии массовых сил в случае, когда на второй ограничивающей плоскости задано нормальное давление, распределенное по площади прямоугольника. Дается лишь общий вид решения. Фактическое же вычисление интегралов Фурье, входящих в решение задачи, представляет значительные трудности, оставшиеся, по-видимому, неизвестными автору, как и то, что эта задача с большей общностью и полнотой исследована (иным методом) в работах А. И. Лурье, результаты которых в сводной форме представлены в главе 3 монографии этого автора: „Пространственные задачи теории упругости; ГТТИ, М., 1955. Н. А. Ростовцев

10061. Специальные решения для изгибных колебаний диска переменной толщины. Конуэй (Some special solutions for the flexural vibration of discs of varying thickness. Conway H. D.), Ingr-Arch., 1958, 26, № 6, 408—410 (англ.)

Рассматривается задача определения частоты свободных колебаний круглого диска переменной толщины при следующих предположениях. Жесткость D диска изменяется вдоль радиуса r по степенному закону $D = D_0 r^m$. Коэффициент поперечной деформации ν связан с постоянным числом m равенством $\nu = \dfrac{2m-3}{9}$.

При этих условиях решение дифференциального уравнения изгибных колебаний диска берется из справочника Камке (Изд-во ин. лит., 1951 г.).

Указываются значения частот колебаний в четырех частных случаях $m = 2$; 18/7; 3 и 6.

К. В. Соляник-Красса

10062. Задача Алманси для составных цилиндрических брусьев. Хатиашвили Г. М., Сб. тр. Тбилисск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1956, вып. 29, 100—107

Дается решение задачи о нагружении составного прямолинейного упругого стержня с многосвязным поперечным сечением силами, распределенными вдоль оси по степенному закону (задачи Алманси). Показывается, как, зная напряжение, соответствующее поверхностной нагрузке

$$\tau_k^* = p_k(x, y)\, z^n,$$

найти напряжения при нагружении стержня силами

$$\tau_k = p_k(x, y)\, z^{n+1}$$

($k = 1, 2, 3$; z — координата, отсчитываемая вдоль оси). При этом новые напряжения выражаются через старые и семь функций напряжений, определяемых условиями равновесия, совместности и сопряжения областей между собой и решением трех вспомогательных задач о плоской деформации. К. В. Соляник-Красса

10063. Кручение призматических стержней коробчатого поперечного сечения с трещиной. Баблоян А. А., Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Физико-математикакан гитутюннери сериа, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1958, **11**, № 2, 89—97 (рез. арм.)

Решение задачи о кручении призматических стержней коробчатого сечения с трещиной получено в виде рядов по тригонометрическим функциям, коэффициенты которых определяются из вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Г. Н. Положий

10064. О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с поперечным сечением в виде параллелограмма. Минасян Р. С., Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Физико-математикакан гитутюннери сериа, Изв. АН АрмССР. Сер. Физ.-матем. н., 1958, **11**, № 3, 41—62 (рез. арм.)

Рассмотрены задачи кручения и изгиба анизотропного призматического стержня, имеющего в каждой точке нормальную к оси плоскость упругой симметрии. Решения представляются в виде тригонометрических рядов, содержащих две вспомогательные функции, коэффициенты Фурье которых должны быть найдены в результате решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Доказано, что эти системы являются вполне регулярными. Получены выражения для жесткости стержня и касательных напряжений при кручении, произведены двусторонние оценки решений бесконечных систем, а также дан численный пример.

Я. С. Уфлянд

10065. Поперечный изгиб тонких пологих оболочек переноса. Оравас (Transverse bending of thin shallow shells of translation. Oravas Gunhard-Aestius), Österr. Ingr-Arch., 1957, **11**, № 4, 264—276 (англ.)

Система уравнений Муштари — Власова для произвольной пологой оболочки с прямоугольным планом приводится известным способом к одному уравнению относительно вспомогательной комплексной функции.

Далее предполагается, что функция, определяющая изгиб оболочки, удовлетворяет уравнению вида

$$(\triangle^2 - i\lambda^2)\, V = 0,$$

а граничные условия соответствуют случаю свободного опирания. Задача решается методом Фурье. Числовой пример показывает, что изгибные напряжения локализуются вблизи контура оболочки Библ. 21 назв.

В. Я. Павилайнен

10066. К теории изгиба толстых круглых плит. Круг (До теорії вигину товстих круглих плит. Круг Е. М.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-т, 1955, **12**, 25—43 (укр.; рез. русск.)

Решение задачи об изгибе круглой плиты представляется суммой частного решения, соответствующего нагружению торцов плиты (неоднородные решения), и однородных решений, зависящих от корней трансцендентного уравнения. Последние используются, чтобы удовлетворить краевым условиям на боковой цилиндрической поверхности плиты. Методика построения решений того и другого класса не отличается от предложенной в гл. 4 книги референта „Пространственные задачи теории упругости" (М., Гостехиздат, 1955), которая не могла быть известна автору в 1955 г., когда писалась работа. А. И. Лурье

10067. Расчет прямоугольных железобетонных плит переменной толщины. Киреева (Розрахунок прямокутних залізобетонних плит змінної товщини. Кіреєва С. В.), Прикл. механіка, 1958, **4**, № 1, 30—46 (укр.; рез. русск., англ.)

Приводится методика расчета прямоугольных плит с трапецеидальным сечением, основанная на методе конечных разностей с аппроксимацией дифференциального оператора по 13 точкам квадратной сетки. Определяются величины прогибов, изгибающих моментов, поперечных сил и опорных реакций в прямоугольных плитах при различных граничных условиях. Г. Н. Положий

10068. О применении операционного исчисления к расчету тонких плит из упруго-вязкого материала. Самуль В. И. Сб. научн. тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1958, вып. 29, 189—201

Находится изображение связи между деформациями ε и напряжениями σ в упруго-вязком изотропном теле с учетом возраста материала τ при линейном напряженном состоянии

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{H(\tau)} + \int_0^t K(t-\theta, \tau)\, \sigma(\theta)\, d\theta,$$

где H — мгновенный модуль упругости, $K(t-\theta, \tau)$ — функция влияния загружения на деформацию в момент времени t. Показывается, что задача о деформации тела из упругого вязкого материала в области изображения сводится к задаче теории упругости.

Получается дифференциальное уравнение изогнутой тонкой плиты в области изображений, аналогичное уравнению Софи Жермен. Производится построение решения в частных случаях изгиба прямоугольных бетонных плит. К. В. Соляник-Красса

10069. Влияние термических свойств твердого тела на скорость распространения волн Релея. Локкетт (Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves. Lockett F. J.), J. Mech. and Phys. Solids, 1958, **7**, № 1, 71—75 (англ.)

Пусть имеется упругое изотропное полупространство $z \geqslant 0$, граница которого $z = 0$ свободна от напряжений. Через граничную плоскость $z = 0$ происходит излучение тепла по закону $\frac{\partial \Theta}{\partial z} + h\Theta = 0$. Тогда для вектора перемещения u и приведенной температуры Θ получается система уравнений

$$\Delta u + (\beta^2 - 1)\, \nabla \operatorname{div} u - b\, \nabla \Theta = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

$$\Delta \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u,$$

где $\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$; $b = \gamma(3\lambda + 2\mu)\, T/\mu$; $g = \gamma(3\lambda + 2\mu)\, \rho c$, λ, μ — постоянные Ламе, γ — коэффициент линейного расширения, ρ — плотность, c — теплоемкость при постоянном объеме и T — начальная температура тела.

Показано, что решение (1) можно искать в форме, сходной с волнами Релея. При этом, если оставаться в пределах обычно рассматриваемых величин частот релеевских волн, то скорость распространения термоупругих волн может быть определена из классических соотношений для волн Релея, если в последних заменить параметр β^2 на $\beta^2(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon = \gamma^2 V_p^2\, T(1+\sigma)^2/c\,(1-\sigma)^2$. Здесь σ — коэффициент Пуассона, а V_p — скорость распространения чисто упругих продольных волн.

В работе проведено сравнение полученных результатов для случая $\beta^2=3$ и $\varepsilon=0{,}05$ с результатами, вытекающими из классической теории релеевских волн, и показано, что различие в величине амплитуды и скорости распространения волн не превосходит 1%.

М. С. Ага

10070. Об одном методе интегрирования граничных нестационарных линейных задач о распространении возмущений в неидеально упругих средах. Шемякин Е. И., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 3, 289—300

Изучается система уравнений теории упругости

$$(\Lambda + 2M)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - M\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = \rho\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2},$$

где Λ и M — „параметры Ламе“, имеющие вид:

$$\Lambda = \lambda + \lambda' K_t, \quad M = \mu + \mu' K_t.$$

Здесь λ, λ', μ, μ' — постоянные, K_t — линейный оператор. Введение оператора K_t позволяет учитывать диссипацию энергии при распространении упругих волн и различную скорость волн разной частоты (дисперсию). Для сред такого типа обычным образом ставятся как статические, так и динамические задачи, только везде вместо обычных параметров Ламе нужно подставлять Λ и M.

Автору удалось в предположении

$$\omega = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu}$$

установить следующую интересную формулу:

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{u}_0(x, y, z, \tau)\, R(t, \tau)\, d\tau,$$

где u_0 — решение задачи при $\lambda' = \mu' = 0$, т. е. решение обычной идеально упругой задачи, а $R(t, \tau)$ — решение уравнения

$$(1 + \omega K_t)\,\frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial t^2},$$

удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Функцию $R(t, \tau)$ можно найти в виде контурного интеграла и довольно подробно исследовать (делая дополнительные ограничения на K_t). Все это позволяет сравнительно просто проводить исследования тех задач, для которых решение „упругой“ задачи хорошо известно. В качестве примера рассматривается случай сосредоточенных воздействий на границе полупространства.

В. М. Бабич

10071. Двухмерные температурные напряжения, обусловленные установившимся тепловым течением в полубесконечной олотропной пластине. Чаудхури (Two-dimensional thermal stresses due to steady heat flow in a semi-infinite aeolotropic plate. Choudhury P.), J. Technol., 1958, 3, № 1, 19—24 (англ.)

Дается решение плоской температурной задачи при установившемся режиме и при отсутствии тепловых источников в области, занимаемой телом. Вводится функция напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$, связанная с температурой T и перемещениями u и v равенствами

$$T = \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad u = \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

и удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Здесь s^2, λ_1 и λ_2 — постоянные. Чтобы удовлетворить граничным условиям к функции φ добавляется решение плоской задачи в форме Эри. Подробно рассматривается распределение температурных напряжений в полубесконечной пластине, ограниченной прямой $y = 0$ при задании функции φ в форме $\varphi = \int_0^{\infty} A(m) \times e^{-msy} \cos mx\,dx$. Приводятся окончательные выражения для перемещений и напряжений.

К. В. Соляник-Красса

10072. Асимптотика собственных функций уравнения $\Delta u + \varkappa^2 k u = 0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых и рассеяние электромагнитных волн в волноводе. Маслов В. П., Докл. АН СССР, 1958, 123, № 4, 631—633

Изучается асимптотика при $k \to \infty$ собственных функций двумерного волнового уравнения в области, ограниченной двумя эквидистантными кривыми и двумя нормалями к ним или уходящими в бесконечность эквидистантными кривыми; на контуре $u = 0$. Последний случай применим к задаче о плоском изогнутом волноводе.

Показано, что для собственной функции u_n имеет место формула

$$u_n(r, s) = \frac{\sin(\pi n r/a)}{\sqrt{(1 - x(s)\,r)\,(1 - x(s)\,a)}}\, z_n(s) = O\left(\frac{a\gamma_n}{n}\right).$$

Здесь s — длина дуги и $x(s)$ — кривизна одной из эквидистантных кривых, r — длина нормали к ней, a — расстояние между обеими кривыми, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2}$, а функции $z_n(s)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$z'' + \left\{\frac{x^2}{4} - \frac{x''}{4}\frac{a}{1 - xa} - \frac{(x')^2}{3}\frac{a^2}{(1 - xa)^2} + \gamma_n^2 (1 - xa)\right\} z_n = 0.$$

Отмечена связь полученной асимптотики с законами распространения лучей (очень коротких волн) в волноводе. Указан возможный путь обобщения метода отыскания асимптотических решений на трехмерную задачу об изогнутом волноводе произвольного сечения.

Б. З. Каценеленбаум

10073. Электромагнетизм Максвелла и принцип Гюйгенса. Дзин (Elettromagnetismo maxwelliano e principio di Huyghens. Zin Giovanni), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957 (1958), 23, № 6, 421—427 (итал.)

Уравнения Максвелла интегрируются в ограниченной области, в которой отсутствуют источники поля, методом, изложенным автором ранее (см. РЖМат, 1959, 1577). В результате получаются формулы, с помощью которых электромагнитное поле внутри области выражается через тангенциальные компоненты на поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. Полученные выражения аналогичны формулам Стрэттона и Чу и позволяют трактовать электромагнитное поле в каждой точке внутри области как суперпозицию полей электрических и магнитных диполей, расположенных на ее поверхности.

П. П. Бирюлин

10074. О волнах Римана в магнитной гидродинамике. Куликовский А. Г., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 6, 987—990

Волны Римана в магнитной гидродинамике (МГД) рассматривались ранее в случае, когда магнитное поле параллельно плоскости волны (Каплан С. А., Станюкович К. П., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 3). В данной работе рассмотрены волны Римана при произвольной ориентации магнитного поля относительно плоскости фронта волны. Уравнения МГД, описывающие изоэнтропические движения идеального газа с бесконечной проводимостью

для волн, распространяющихся в направлении оси x, имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-C\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{1}{8\pi\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(H_y^2+H_z^2\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{H_x}{4\pi\rho}\frac{\partial H_y}{\partial x};\quad \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{H_x}{4\pi\rho}\frac{\partial H_z}{\partial x};\qquad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial H_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uH_y-vH_x)=0;$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uH_z-wH_x)=0;\quad H_x=\text{const};\ p/\rho^{\gamma}=C=\text{const}.$$

Ищутся решения, зависящие от некоторой комбинации независимых переменных $\varphi(x,t)$. Система (1) тогда становится линейной и однородной относительно производных по φ. Из равенства нулю ее определителя находятся скорости распространения малых возмущений. Особое решение (волна Римана), соответствующее волнам Альфвена, имеет вид:

$$u=u_0;\quad \rho=\rho_0;\quad H_y^2+H_z^2=H_r^2=\text{const}.$$

$$H_y=H_r\cos\theta;\quad v=v_0-\frac{H_r}{\sqrt{4\pi\rho}}\cos\theta;\quad H_z=H_r\sin\theta;\qquad (2)$$

$$w=w_0-\frac{H_r}{\sqrt{4\pi\rho}}\sin\theta,$$

где величины с индексом 0 представляют собой произвольные постоянные определяемые из начальных условий, θ — произвольная функция $\varphi(x,t)$.

Для остальных типов волн аналитического выражения для волн Римана не получается. Исследование облегчается тем фактом, что в этих типах волн все движение происходит в плоскости, проходящей через ось Ox и вектор $H_r=H_y j+H_z k$. Для безразмерных переменных

$$R=\frac{\rho}{\rho_*};\quad U=\frac{\sqrt{4\pi\rho_*}}{H_x}u;\quad V=\frac{\sqrt{4\pi\rho_*}}{H_x}v_1;\quad h=\frac{H_r}{H_x};$$

$$A_{\pm}=\frac{\sqrt{4\pi\rho_*}}{H_x}a_{\pm}=\frac{1}{2}\left\{\left(R^{\gamma-1}+\frac{1+h^2}{R}+2R^{\frac{1}{2}\gamma-1}\right)^{1/2}\pm\right.\qquad (3)$$

$$\left.\pm\left(R^{\gamma-1}+\frac{1+h^2}{R}-2R^{\frac{1}{2}\gamma-1}\right)^{1/2}\right\},$$

где ρ_* определяется условием $4\pi\gamma C\rho_*^{\gamma}=H_x^2$ и знак $\pm$ соответствует ускоренным и замедленным магнитозвуковым волнам, получена система, не содержащая параметров, которая и определяет движение в соответствующих волнах Римана:

$$\frac{dh^2}{dR}=2A^2-2R^{\gamma-1};\quad \frac{dU}{dR}=\frac{A}{R};$$

$$(4)$$

$$\frac{dV}{dR}=-\frac{1}{RA}\cdot\frac{A^2-R^{\gamma-1}}{h}.$$

Для решения этой системы достаточно проинтегрировать первое уравнение, после чего U и V находятся квадратурами. Приведена качественная картина поведения интегральных кривых первого уравнения (4) для некоторых случаев. Исследованные решения могут быть применены к задаче о распадении произвольного разрыва в МГД и к различным задачам о движении газа, сжимаемого поршнем.

Приводятся также формулы в переменных (3) для изменения величин на ударной волне, если известно изменение напряженности магнитного поля.

Г. С. Голицын

10075. Отепление пластинок и стержней конечной длины при наличии внутренних источников тепла в задаче одномерного распространения тепла. Кесслер (Otepl̆ování desek a tyčí konečné délky s vnitřním vývinem tepla, při jednorozměrném řešení proudění tepla. Kessler Arnošt), Aplikace mat., 1958, 3, № 3, 190—222 (чешск.; рез. русск., нем.)

Рассматривается задача одномерного распространения тепла в пластинках (стержнях) конечной длины ($0\leqslant x\leqslant l$) при наличии внутренних источников тепла:

$$\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{K}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{h}U(x,t)=-\frac{z}{\lambda},\qquad (1)$$

$$\frac{1}{K}>0,\quad -\infty<\frac{1}{h}<+\infty,\quad t>0,\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Мощность внутренних источников z предполагается постоянной ($z=z_0$) или линейно зависящей от температуры ($z=z_0[1+\alpha U(x,t)]$).

Уравнение (1) решается для краевого условия $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=0$ при нулевой начальной температуре $U(x,0)=0$ и при следующих краевых условиях на втором конце стержня:

$$1)\quad U(l,t)=f(t);\qquad 2)\quad -\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=l}=f(t);$$

$$3)\quad -\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=l}=\vartheta u(l,t).$$

В заключение исследуется случай двух пластинок, соединенных в точке $x=l$, что приводит к обычным условиям сопряжения. Решение проводится при помощи преобразования Лапласа. Отдельные решения были получены в виде ряда посредством интеграла Бромвича. Решение частных случаев автор получил путем предельных переходов для подходящих значений параметров. Результаты приводятся в виде безразмерных соотношений. Для этого используются подходящие безразмерные критерии и параметры. Работа представляет в некотором смысле обобщение результатов А. В. Лыкова (Теплопроводность нестационарных процессов, М., Госэнергоиздат, 1948; Теория теплопроводности, М., Гостехиздат, 1950) и Карслоу и Егера (Carslaw H. S., Jaeger I. C., Conduction of heat, Oxford, 1948). O. Kon̆íček

10076. Расчет вертикальных скоростей в области теплого фронта. Перепелова Р. А., Дюбюк А. Ф., Вестн. Моск. унт-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 1, 97—105

Атмосферными фронтами называются поверхности разрыва метеорологических элементов. Задача сводится к определению вертикальной скорости ветра w из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

и краевого условия на плоской поверхности Земли: $w=0$ при $z=0$ Горизонтальные компоненты ветра u, v находятся из системы уравнений

$$u_t-\nu u_{zz}+lv=-P_x,\quad v_t-\nu v_{zz}-lu=-P_y$$

при известных начальных данных условий „прилипания“ на поверхности Земли и ограниченности на бесконечности. Здесь t — время, ν, l — постоянные, а силы, вы-

зываемые градиентом давления, P_x и P_y постоянны по обе стороны фронта, а на фронтальной поверхности терпят разрыв.

Система координат выбирается так, что $P_y = 0$, уравнение фронтальной поверхности $z = h(x, t)$, где ось x направлена в сторону холодного воздуха. Тогда $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, и, при использовании полученного ранее проф. Дюбюком решения для u (Дюбюк А. Ф., Тр. Центр. ин-та прогнозов, 1949, вып. 15, 3,) расчет сводится к приближенному вычислению интегралов типа

$$J = \int_0^{\sqrt{t}} \cos(ls^2)\, e^{-\left(\frac{m}{s} - ns\right)^2} ds,$$

где m, n — постоянные, и последующему вычислению интеграла $\int_0^z J(\zeta)\, d\zeta$. Б. Н. Трубников

10077. Построение триэдра, связанного с воздушными траекториями. Эртель (Construcción de triedros intrínsecos de las trayectorias de aire. Ertel H.), Gerlands Beitr. Geophys., 1958, **67**, № 4, 324—328 (исп., рез. нем.)

С помощью гидродинамических уравнений движения Эйлера выводятся формулы, необходимые для построения триэдра, связанного с воздушными траекториями, для случая, когда поле гидродинамических сил и вектор ветра заданы. Резюме автора

10078. О функции Грина уравнения диффузии резонансного излучения. Векленко Б. А., Ж. эксперим. и теор. физ., 1959, **36**, № 1, 204—211 (рез. англ.)

Рассматривается нестационарная задача о диффузии резонансного излучения в однородном бесконечном пространстве. Преобразование Амбарцумяна позволяет свести задачу к нахождению решения $A(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \varepsilon_\nu k_\nu E_i(k_\nu |x - x'|)\, A(x', t)\, d\nu dx' -$$

$$-\left(\frac{1}{\tau} + \sigma\right) A(x, t) \qquad (1)$$

с начальным условием $A(x, t) = \delta(x)$ при $t = 0$. Применяя преобразование Фурье к (1), автор получает интегральное представление функции Грина исходного уравнения, связанной с $A(x, t)$ соотношением $f(x, t) = -(1/2\pi x)\, \partial A(x, t)/\partial x$.

Приближенные аналитические выражения для $f(x, t)$ получены и исследованы в случаях:

а) монохроматической спектральной линии

$$(k_\nu = k_0 \delta(\nu - \nu_0), \quad \varepsilon_\nu = 1);$$

б) дисперсионной формы спектральной линии, т. е. при

$$k_\nu = \frac{k_0}{1 + [2(\nu - \nu_0)/\Delta\nu_c]^2}, \quad \varepsilon_\nu = \frac{2}{\pi\Delta\nu_c} \frac{1}{1 + [2(\nu - \nu_0)/\Delta\nu_c]^2}$$

в) допплеровской формы спектральной линии, т. е. при

$$k_\nu = k_0 \exp\left\{-\left[\frac{2(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_D}\sqrt{\ln 2}\right]^2\right\},$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{2}{\Delta\nu_D}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \exp\left\{-\left[\frac{2(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_D}\sqrt{\ln 2}\right]^2\right\};$$

г) для стационарной задачи при дисперсионной форме спектральной линии.

Во всех рассмотренных случаях имеет место экспоненциальное убывание $f(x, t)$ при $t \to \infty$ для x достаточно больших. При допплеровской и дисперсионной формах спектральных линий $f(x, t)$ сравнительно медленно убывает при $x \to \infty$. Найдена также приближенная формула для среднего времени, потребного фотону для смещения его на расстояние, большее заданного.

Т. А. Гермогенова

10079. О двухмерной модели Тирринга. Майер М. Э., Ширков Д. В., Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 1, 45—47

Вычисляется сечение рассеяния двух ферми-частиц с нулевой массой покоя в двухмерной модели Тирринга Thirring W. E., Ann. Phys, 1958, **3**, № 1). Задача сначала рассматривается во втором приближении теории возмущений, а затем полученные выражения улучшаются методом ренормализационной группы. Имеются основания считать, что в модели Тирринга перенормировка заряда отсутствует А. В. Тулуб

10080. Принцип инвариантности с учётом временной зависимости. Прейзендорфер (Time-dependent principles of invariance. Preisendorfer Rudolph W.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1958, **44**, № 4, 328—332 (англ.)

Рассматривается нестационарное линеаризированное кинетическое уравнение Больцмана для плоскопараллельной области. Вводятся односторонние потоки излучения и некоторые интегральные операторы, зависящие от времени, с помощью которых устанавливается связь между односторонними потоками. Исключением из первоначальных уравнений односторонних потоков удается получить замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных. Решение этой системы дает возможность найти требуемые односторонние потоки излучения на границах среды. Изложенный в работе метод является обобщением метода Чандрасекара для стационарных уравнений переноса.

Г. И. Марчук

10081. Вычисление сокращения Лоренца для поля равномерно прямолинейно движущегося элементарного заряда без привлечения принципа относительности. Фламм (Berechnung der Lorentzkontraktion des Feldes einer geradlinig gleichförmig bewegten Elementarladung ohne Heranziehung des Relativitätsprinzips. Flamm L.), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math-naturwiss. Kl., 1957, **94**, № 1-15, 291—298 (нем.)

Заметка методического характера. Подсчитывается поле равномерно прямолинейно движущегося точечного заряда без применения преобразования Лоренца, но с учетом соотношения. $\mathbf{H} = [\mathbf{VD}]$

Д. П. Костомаров

10082. Общее уравнение Лоу. Круликовский (Low's general equation. Królikowski W.), Nuovo cimento, 1957, **5**, № 6, 1611—1621 (англ.; рез. итал.) См. РЖФиз, 1957, 7388.

10083. Актуальный кризис кинетической теории газа. Одно точное решение уравнения Максвелла. Трусделл (La crise actuelle dans la théorie cinétique des gaz. Une solution exacte des équations de Maxwell. Truesdell C.), J. math. pures et appd., 1958, **37**, № 2, 119—133 (франц.)

Излагается содержание доклада, представленного автором в институт А. Пуанкаре 24 и 27 мая 1955 г. Эти результаты опубликованы ранее (РЖМех, 1958, 9615).

И. И. Ольховский

10084 К. Нелинейная механика. Каудерер (Nichtlineare Mechanik. Kauderer Hans. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1958, XI, 684 S., ill.) (нем.)

10085 К. Математические аспекты дозвуковой и трансзвуковой газодинамики. Берс (Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. Lipman Bers (Surv. Appl. Math., vol. 3), New York, John Wiley and Sons Inc., London, Chapman and Hall. Ltd., 1958, XV, 164 pp., ill.) (англ.)

Обзор математической теории дозвукового и смешанного течений сжимаемого газа, рассчитанный, по замыслу автора, не на специалистов-математиков, работающих в этой области, а на более широкую аудиторию, заинтересованную в информации о современном состоянии этой теории.

Содержание книги ограничено вопросами, связанными с установившимся потенциальным течением газа в плоскости, и исчерпывается, в основном, рассмотрением потенциального уравнения в плоскости годографа. Автор не затрагивает собственно сверхзвуковых течений и связанной с ними теории обобщенных решений гиперболических уравнений.

Книга представляет интерес как систематическое изложение математических проблем, возникающих в данной области газодинамики и представляющих подчас не только прикладной, но и принципиальный интерес.

В гл. 1 (Дифференциальные уравнения потенциального течения) кратко выведены общие уравнения потенциального течения, описан метод годографа и обсуждены различные модификации и приближения общего потенциального уравнения. В числе методов упрощения последнего рассмотрены течение несжимаемой жидкости, разложение потенциальной функции по степеням числа Маха, течение, близкое к параллельному (в дозвуковом и звуковом случаях). Рассмотрены модификации потенциального уравнения, получающиеся при конкретизации вида уравнения состояния, и в связи с этим метод Левнера, позволяющий отыскивать уравнения состояния, для которых потенциальное уравнение приводится к простейшим уравнениям второго порядка. Изложены также некоторые методы получения частных решений потенциального уравнения.

В гл. 2 (Математические основания теории дозвукового течения) изложена краткая теория линейных и квазилинейных уравнений эллиптического типа. Коснувшись важных для газодинамики свойств решений таких уравнений, автор излагает основные моменты теории квазиконформных преобразований и псевдоаналитических функций и приводит иллюстрации ее применения в газодинамике.

В гл. 3 (Некоторые задачи теории дозвукового течения) результаты предыдущей главы применены к ряду задач дозвуковой газодинамики (дозвуковое обтекание профиля, течение в канале, течения со свободными границами) и к исследованию поведения дозвукового потока на бесконечности.

Гл. 4 посвящена математическим основаниям теории смешанного течения. После рассмотрения чисто эллиптических и чисто гиперболических задач для уравнения Трикоми

$$y\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$$

и уравнения Чаплыгина

$$k(y)\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (yk(y) > 0) \qquad (1)$$

и ряда их частных решений, автор излагает теорию краевых задач для этих уравнений (задача Трикоми, задача Франкля). Единственность решения задачи Франкля получается так называемым *abc*-методом, идея которого состоит в том, что подбираются такие функции a, b, c, чтобы интеграл $\iint_{(D)} (a\psi + b\psi_k + c\psi_y) \times (k\psi_{xx} + \psi_{yy})\, dxdy$, тождественно равный нулю, если ψ есть решение (1) в области D, будучи преобразован по формуле Грина, давал положительно определенное выражение, могущее обратиться в нуль лишь при $\psi \equiv 0$ в D.

Обобщением этого метода является предложенный Фридрихсом новый метод, позволяющий находить краевые задачи, решение которых единственно, для широкого класса уравнений.

Пусть в уравнении

$$Lu \equiv Au_x + Bu_y + Cu = f \quad (u = (u_1, \ldots, u_k)) \qquad (2)$$

матрицы A, B, C симметричны и матрица $Q = 2C - A_x - B_y$ положительно определенна (при произвольных A B C этим условиям можно удовлетворить, умножая уравнение (2) слева на соответствующую матрицу E; при этом определение E по существу эквивалентно отысканию неопределенных функций в *abc*-методе). Пусть τ — оператор, сопряженный к L. Тогда

$$(v, Lu) - (u, \tilde{L}v) = (v, Au)_x + (v, Bu)_y,$$

так что $\iint_{(D)} (v, Lu)\, dxdy - \iint_{(D)} (u, \tilde{L}v)\, dxdy =$

$$= \oint_{(B)} (v, Au)\, dy - (v, Bu)\, dx.$$

Если на границе задать симметричные неотрицательные матрицы $\tilde{M}$ и M с помощью соотношения

$$A\frac{dy}{ds} - B\frac{dx}{ds} = \tilde{M} - M \quad (ds \text{ — длина дуги на границе}),$$

то последнее выражение можно записать в виде

$$\iint_{(D)} (v, Lu)\, dxdy - \iint_{(D)} (u, \tilde{L}v)\, dxdy =$$

$$= \oint_{(B)} (u, \tilde{M}v)\, ds - \oint_{(B)} (v, Mu)\, ds,$$

откуда вытекают две теоремы единственности: для уравнения (2) с граничным условием $Mu|_B = 0$ и для уравнения $\tilde{L}v = g$ в D с граничным условием $\tilde{M}v|_B = 0$.

В заключение главы обсуждены теоремы существования решения указанных краевых задач.

В гл. 5 рассмотрены некоторые задачи газодинамики смешанного течения. Обсуждены вопросы о продолжении решения за звуковую линию и рассмотрены дозвуковые течения со сверхзвуковыми включениями, когда эти включения представляют собой области, ограниченные линией тока, звуковой линией и, быть может, слабой ударной волной. Рассмотрены также околозвуковое обтекание произвольного профиля и течения в канале и со свободными границами.

В Приложении автор бегло касается методов численного решения.

Библ. (по состоянию на 1957 г.) 395 назв.

Н. Н. Кузнецов

10086 К. Математическая теория распространения электромагнитных волн. Бейтмен Г. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1958, 180 стр., 6 р. 20 к.
См. РЖМат, 1957, 4061

10087 Д. Об одном решении плоской задачи теории упругости для некоторых ортотропных пластинок. Глазунова Н. Т., Автореф. дисс. канд. техн. н., Новочерк. политехн. ин-т, Новочеркасск, 1958

10088. Интегральные уравнения одной граничной задачи для области с углами. Арбенц (Integralgleichungen für einige Randwertprobleme für Gebiete mit Ecken. Arbenz Kurt.—Diss. Dokt. Math., Eidgenöss. Techn. Hochschule Zürich. Zürich, Buchdruck. Berichthaus, 1958, 43 S., ill.) (нем.)

10089. Интегральные уравнения синхронного генератора и общее уравнение колебаний угла работы. Рыбарский (Die Integralgleichungen eines synchronischen Generators und die exakte Schwingungsgleichung des Arbeitswinkels. Rybarski A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, **6**, № 5, 277—280, XXII (нем., рез. русск.)

Векторные дифференциальные уравнения первого порядка с матричными коэффициентами трехфазного синхронного генератора без демпфирующих обмоток путем двух последовательных преобразований приводятся к интегральному уравнению типа Вольтерра

$$z(t) = w(t) + \int_0^t \exp\{(t-\tau)P + [\theta(t) - \theta(\tau)]\}\dot{\theta}(\tau)\Delta Q z(\tau)\,d\tau, \qquad (1)$$

где $w(t)$ выражается через заданные величины. Решение уравнения (1) относительно $z(t)$ образовано путем привлечения повторных ядер, без фактического нахождения последних. Отмечается, что если выражение $z(t)$, полученное в результате решения уравнения (1), подставить в формулу, содержащую момент электродинамической силы, то уравнение колебаний угла работы генератора будет интегро-дифференциальным. Это уравнение в работе не приводится. М. И. Розовский

См. также: 9888, 9961, 9962, 10132, 10143, 10148, 10400, 10474—10480, 10482.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

10090. Метод последовательных приближений для нелинейных интегральных уравнений первого рода. Линьков Е. И., Сб. студ. научн. работ по естеств.-матем. циклу. Моск. обл. пед. ин-та, 1958, **3**, 3—5

В работе доказана теорема: Пусть выполнены условия:

1) уравнение

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds \qquad (1)$$

имеет единственное решение;

2) в каждой точке области $a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y < \infty$ функция $F(y,x)$ непрерывна по совокупности аргументов, существует $F'_y(y,x)$, причем $0 < m \leqslant F'_y(y,x) \leqslant M$;

3) ядро $K(x,s)$ — симметричное, положительно определенное, с суммируемым квадратом.

Тогда:

1) уравнение

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)\,F[\varphi(s), s]\,ds \qquad (2)$$

имеет единственное решение;

2) последовательность $\psi_n(x)$, удовлетворяющая соотношению $F[\psi_n(x), x] = \varphi_n(x)$, сходится в среднем к решению уравнения (2), где $\varphi_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \lambda\left[f(x) - \int_a^b K(x,s)\,\varphi_{n-1}(s)\,ds\right.$$

и сходится в среднем к решению уравнения (1), если $0 < \lambda < 2\lambda_1$, λ_1 — наименьшее из характеристических чисел ядра $K(x,s)$ (РЖМат, 1956, 8884);

3) функции $\psi_n(x)$ могут быть найдены по функциям $\varphi_n(x)$ методом последовательных приближений.

Г. А. Фридман

10091. О продолжении решений нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Гурвич М. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 45—54

В вещественной области рассматривается уравнение

$$u(x) = \lambda\int_B K(x,y)\,g(u(y), y)\,dy \qquad (1)$$

в предположении, что $K(x,y) \in L^2(B\times B)$, $g(u,x)$ измерима по x при каждом фиксированном u и имеет непрерывную частную производную $g'_u(u,x)$, ограниченную почти при всех $x \in B$ и $u \in (-\infty, +\infty)$. B — измеримое множество конечной лебеговой меры s-мерного евклидова пространства. В основной теореме устанавливаются достаточные условия продолжаемости решений уравнения (1), выраженные в виде свойств бесконечного определителя. Из этой теоремы следует предложение: если $v_0(x)$ является решением уравнения (1), соответствующим значению параметра $\lambda = \lambda_0$, причем λ_0 не является характеристическим числом линейного интегрального оператора

$$A\varphi = \int_B K(x,y)\,g'_u(v_0(y), y)\,\varphi(y)\,dy,$$

то в некоторой окрестности точки λ_0 решение $v_0(x) = v(x,\lambda_0)$ имеет единственное продолжение $v(x,\lambda)$, причем $\|v(x,\lambda) - v_0(x)\| \to 0$, когда $\lambda \to \lambda_0$. Доказательство использует метод, предложенный референтом (Вайнберг М. М., Кандид. дисс., МГУ, 1940 г.).

М. М. Вайнберг

10092. О непрерывности оператора Урысона. Лэн Шэн-мин (Leng Sen-ming), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, Beijing daxue xuebao ziran kexue, 1958, **4**, № 2, 131—143 (кит.; рез. англ.)

Пусть $K(x,y,u)$ — вещественная функция, заданная для $(x,y,u) \in \mathfrak{X}\times Y\times(-\infty, +\infty) = H$, где $\mathfrak{X}$ и Y — точечные множества, на каждом из которых задана вполне аддитивная мера. Предполагается, что почти при каждом фиксированном x функция $K(x,y,u)$ непрерывна по u почти при каждом y и измерима по $y \in Y$ при фиксированных u. Рассматривается общий интегральный оператор

$$Kf(x) = \int_Y K(x,y,f(y))\,dy$$

на тех измеримых функциях $f(y)$, на которых он существует почти при каждом $x \in \mathfrak{X}$ (K назван оператором Урысона). Измеримые на $\mathfrak{X}$ функции $f(x)$, для которых множество $(f(x) \neq 0)$ представимо в виде суммы счетного числа подмножеств конечной меры, образуют пространство $L^0(\mathfrak{X})$ относительно сходимости по мере на любом подмножестве конечной меры. Совокупность $f(x) \in L^0(\mathfrak{X})$, для которых

$$\|f\| = \sup_{\mathrm{mes}\,\mathfrak{X}_1 < \infty} \lim_{p\to\infty}\left(\int_{\mathfrak{X}_1} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

образует нормированное пространство, обозначенное через $L^{+\infty}(\mathfrak{X})$ (в отличие от $L^{\infty}(\mathfrak{X})$). Множество $B \subset L^0(\mathfrak{X})$ называется ограниченным, если каждому

$\varepsilon > 0$ отвечает $\beta > 0$ такое, что для любой функции $f(x) \in B$ и любого множества $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ конечной меры выполняется неравенство $\operatorname{mes} \mathfrak{X}_1 (|f(x)| > \beta) < \varepsilon$. Через $L_k^{q(p)}$ обозначается множество из $L^q(Y)$, которое оператором K преобразуется в $L^p(\mathfrak{X})$. Предполагается, что $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ или $p, q = 0$.

Теорема 1. Если $\operatorname{mes}\mathfrak{X} + \operatorname{mes} Y < \infty$ и $K(x, y, u)$ — ограниченная функция, то при $p \neq +\infty$ оператор K вполне непрерывен на $L_k^{q(p)}$ и равномерно непрерывен на всяком ограниченном подмножестве из $L_k^{q(p)}$.

Теорема 2. Если $|K(x, y, y)| \leqslant M(x, y)$ на H и $\int_{\mathfrak{X}} \left[\int_Y M(x, y)\, dy\right]^p dx < \infty$, то справедливо утверждение теоремы 1. Пусть $IK(x, y, u) = K(x, y, u)$ и

$$I_\beta K(x, y, u) = \begin{cases} K(x, y, u) \text{ при } |K(x, y, u)| \leqslant \beta, \\ 0 \text{ при } |K(x, y, u)| > \beta. \end{cases}$$

Теорема 3. Для того, чтобы оператор K был непрерывным в точке $f_0 \in L_k^{q(p)}$ относительно $L_k^{q(p)}$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности $f_n \in L_k^{q(p)}$, сходящейся к f_0, выполнялись условия: 1) если Kf_n сходится почти всюду на $\mathfrak{X}$, то Kf_n сходится в $L^p(\mathfrak{X})$; 2) каждому $\varepsilon > 0$ соответствуют функция $\beta = \beta_\varepsilon(x, y) \geqslant 0$ и подпоследовательность f_{n_k} такие, что почти при каждом $x \in \mathfrak{X}$

$$\int_Y \beta_\varepsilon(x, y)\, dy < \infty$$

и при достаточно больших k и при замене f_{n_k} на f_0

$$\left| \int_Y (I - I_\beta) K(x, y, f_{n_k}(y))\, dy \right| < \varepsilon, \qquad (1)$$

Теорема 4. Для того, чтобы оператор K был компактным на $L_k^{q(p)}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой ограниченной последовательности $f_n \in L_k^{q(p)}$ выполнялись условие 1) теоремы 3 и условие 2), в котором неравенство (1) заменено следующим неравенством:

$$\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} - \underline{\lim_{k\to\infty}}\right) \int_Y (I - I_\beta) K(x, y, f_{n_k}(y))\, dy \leqslant \varepsilon.$$

При помощи теорем 3 и 4 устанавливаются другие предложения о полной непрерывности и равномерной непрерывности оператора K. М. М. Вайнберг

10093. О продолжаемости решения нелинейного интегрального уравнения, ядро которого зависит от параметра. Лобачев С. В., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1958, вып. 20, 3—5

Изучается вопрос о продолжаемости решения $v_0(x) = v(x, \lambda_0)$ нелинейного уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, y, \lambda) f[y, \varphi, (y)]\, dy$$

в предположении, что непрерывное по $x, y \in [0,1]$ ядро $K(x, y, \lambda)$ является аналитической функцией вещественного параметра λ. В первой части разобран случай, когда ядро $K(x, y, \lambda)$ является вырожденным.

Теорема 2. Если единица не является собственным значением ядра $K(x, y, \lambda)\, f'_v(y, v_0(y))$ при $\lambda = \lambda_0$, то в некоторой окрестности λ_0 существует решение $v(x, \lambda)$, стремящееся к $v_0(x)$ при $\lambda \to \lambda_0$. Доказательство использует теорему Харта о неявных функциях. М. М. Вайнберг

10094. Нелинейные интегральные уравнения и краевые задачи. Лобачев С. В., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1958, вып. 20, 7—10

Двухточечная задача для нелинейных дифференциальных уравнений вида: $y'' = \varphi(x, y)$ приводится к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна. В качестве примера рассматривается задача $0.519y'' = 1 - 0.918 \sin y$; $y(0) = 0.137\pi$, $y(0.5) = 0.5\pi$, встречающаяся в электротехнике, которая сводится к нелинейному интегральному уравнению, а затем решается методом последовательных приближений. М. М. Вайнберг

10095. Ползучесть сферического сосуда. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М., Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1958, 27. № 4, 209—216 (рез. арм.)

Исходя из нелинейной теории ползучести (Арутюнян Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М., 1952), решены две задачи: 1) о напряженном состоянии в толстостенном сосуде, ограниченном двумя концентрическими сферами, находящемся под равномерным внешним и внутренним давлениями; 2) о концентрации напряжений у сферической полости в поле равномерного всестороннего растяжения. Первая задача приводится к решению нелинейного интегрального уравнения относительно интенсивности напряжений σ_i:

$$\sigma_i(t) - 3G \int_{\tau_1}^{t} \{\alpha\sigma_i(\tau) + \beta[\sigma_i(\tau)]^m\} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 3G \frac{B(t)}{r^3}, \qquad (1)$$

решение которого при $C(t, \tau) = \varphi(\tau)\{1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]$ находится методом последовательных приближений. Ограничиваясь вторым приближением, задача определения σ_i из уравнения (1) сводится к решению двух линейных интегральных уравнений. В уравнении (1) функция $B(t)$ также подлежит определению. Она находится из нелинейного интегрального уравнения

$$B_0(t, \tau_1) + \beta b_1 \int_{\tau_1}^{t} \{[B_0(\tau, \tau_1)]^m + \int_{\tau_1}^{t} [B_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha)\, dx\} 3G \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} = a_1(p + q), \qquad (2)$$

где $R(t, x, \alpha)$ — резольвента ядра $3G\partial C(t, \tau)/\partial\tau$. Уравнение (2) образовано путем использования граничных условий: $\sigma_r(a, t) = -p$, $\sigma_r(b, t) = q$, где $\sigma_r(r, t)$ — радиальное напряжение, a и b — радиусы сфер, p и q — внутреннее и внешнее давления. При решении уравнения (2) авторы ограничиваются вторым приближением. В заключение показано, что решение второй задачи о концентрации напряжений у сферической полости можно получить из формул, найденных при решении первой задачи, путем замены соответствующих постоянных коэффициентов. М. И. Розовский

10096. Об одном транспортном уравнении. I. Мелзак (A scalar transport equation. I. Melzak Z. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 547—560 (англ.)

Транспортным автор называет следующее уравнение

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^x f(y, t) f(x - y, t) \varphi(y, x - y)\, dt -$$

$$-f(x,t)\int_0^\infty f(y,t)\varphi(x,y)\,dy+$$

$$+\int_x^\infty f(y,t)\,\psi(y,x)\,dy-\frac{f(x,t)}{x}\int_0^x y\,\psi(x,y)\,dy, \qquad (1)$$

где $f(x;t)$ — неизвестная функция, $x,t\geqslant 0$, и $f(x,0)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ даны. Уравнение (1) играет роль в некоторых задачах физики, метеорологии и коллоидной химии. Намечаются также его приложения в социологии и астрофизике. Под $f(x,y)$ можно понимать, например, плотность распределения в определенном фиксированном объеме, отнесенную к единице объема, частиц массы x в момент t, под $\varphi(x,y)$ — функцию сращивания, входящую в выражение $f(x,t)\,f(y,t)\,\varphi(x,y)\,dxdydt$, означающее среднее число сращиваний (в единице объема) частиц с массами от x до $x+dx$ с частицами с массами от y до $y+dy$ за промежуток времени от t до $t+dt$, под $\psi(x,y)$ — функцию распада, фигурирующую в выражении $f(x,t)\,\psi(x,y)\,dxdydt$ для среднего числа (в единице объема) частиц с массами от y до $y+dy$, возникающих за время от t до $t+dt$ в результате распада частиц с массами от x до $x+dx$. Уравнение (1) является выражением закона сохранения массы в этих условиях. Предполагается, что выполняются следующие физически очевидные соотношения: $f(x,0)\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$, $0\leqslant\psi(x,y)$, $\psi(x,y)=0$ для $y>x$, $\int_0^x y\psi(x,y)\,dy\leqslant x$. Доказывается, что уравнение (1) имеет для $x,t\geqslant 0$ непрерывное, ограниченное, неотрицательное решение $f(x,t)$, интегрируемое по x для каждого t и аналитическое по t для каждого x, если 1) $f(x,0)$ — непрерывная, неотрицательная, ограниченная и интегрируемая функция; 2) $0<\sup f(x,0)=B<\infty$; 3) $\int_0^\infty f(x,0)\,dx=N<\infty$; 4) $\varphi(x,y)$ непрерывна и $0\leqslant\varphi(x,y)=\varphi(y,x)\leqslant\sup\varphi(x,y)=A<\infty$ и 5) $\psi(x,y)$ непрерывна, $0\leqslant\psi(x,y)\leqslant\sup\psi(x,y)=C<\infty$, $\int_0^x y\psi(x,y)\,dy\leqslant x$, $\int_0^x\psi(x,y)\,du<\infty$. Решение это будет единственным, если, кроме того, 6) $\int_0^\infty|f(x,t)|\,dx<\infty$ на любом конечном интервале $0\leqslant t\leqslant T$ оси t. В. И. Левин

10097. Об одном транспортном уравнении. II. Мелзак (A scalar transport equation. II. Melzak Z. A.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 3, 193—206 (англ.)

Уравнение (1) (см предыдущий реф.) обобщается на тот случай, когда функции φ и ψ зависят от t. Доказывается следующая теорема. Пусть $f(x,t)$, $\varphi(x,y,t)$, $\psi(x,y,t)$ удовлетворяют следующим условиям: 1) $f(x,0)$ неотрицательна, ограничена, непрерывна, интегрируема и $\int_0^\infty xf(x,0)\,dx<\infty$; 2) $\varphi(x,y,t)$ неотрицательна и ограничена, $\varphi(x,y,t)=\varphi(y,x,t)$, $\varphi(x,y,t)$ непрерывна по x, y и t, причем непрерывность по t, равномерная относительно x и y; 3) $\psi(x,y,t)$ неотрицательна и ограничена, $\int_0^x\psi(x,y,t)\,dy<\infty$, $\psi(x,y,t)$ непрерывна по x, y и t, причем непрерывность по t, равномерная относительно x и y; 4) функция $\frac{1}{x}\int_0^x y\psi(x,y,t)\,dy$ ограничена сверху 1, непрерывна по x и t, причем непрерывность по t, равномерная относительно x. Тогда уравнение

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\int_0^x f(y,t)\,f(x-y,t)\,\varphi(y,x-y,t)\,dy-$$

$$-f(x,t)\int_0^\infty f(y,t)\,\varphi(x,y,t)\,dy+$$

$$+\int_0^\infty f(y,t)\,\psi(y,x,t)\,dy-\frac{f(x,t)}{x}\int_0^x y\psi(x,y,t)\,dy$$

имеет решение $f(x,t)$ для $x,t\geqslant 0$, которое является непрерывной неотрицательной функцией, непрерывно дифференцируемой по t для каждого x и интегрируемой по x для каждого t. В классе функций, непрерывных и интегрируемых по x для всех t, это решение является единственным, принимающим заданное начальное значение $f(x,0)$ при $t=0$. Доказательство, как и в случае, когда φ и ψ не зависят от t, ведется методом последовательных приближений. В. И. Левин

10098. Метод определения оптимальных характеристик одного класса самонастраивающихся систем. Батков А. М., Солодовников В. В., Автоматика и телемеханика, 1957, **18**, № 5, 377—391

Выводится интегральное уравнение, определяющее оптимальную импульсную функцию $k(t,\tau)$ системы автоматического управления (с. а. у.) с точки зрения минимума систематической и случайной ее ошибки. С помощью функций Грина отыскивается решение интегрального уравнения и дается определение постоянных интегрирования. Общее выражение $k(t,\tau)$ определяет с. а. у. с наличием переменных параметров. Приводятся примеры реализиции общей формулы оптимальной $k(t,\tau)$. Статья является дальнейшим развитием известных работ авторов (РЖМат, 1958, 7355) и конференции в Гайденберге (1955). Г. М. Уланов

10099. Интегро-дифференциальные и интегральные уравнения равновесия тонких упругих оболочек. Кильчевский Н. А., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 1, 124—133

Предлагается метод составления интегро-дифференциальных уравнений равновесия тонких упругих оболочек в перемещениях. Сначала для иллюстрации метода выводится интегро-дифференциальное уравнение равновесия круговой арки, рассматриваемой как тонкий стержень, жестко закрепленный на концах, точкам которой ставятся в соответствие точки оси прямолинейной балки. Тогда, применяя теорему о взаимности работ к специально избранным системам нагрузок и перемещений, автор выводит уравнение равновесия арки

$$u(\xi,\eta)=y(\eta,\xi)-\int_0 q(s,\xi)\,u(s,\eta)\,ds+$$

$$+M(0,\eta)\,\theta(0,\xi)+M(l,\eta)\,\theta(l,\xi) \qquad (1)$$

с ядром

$$q(s,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{a^2 l}\,s(l-\xi) & \text{при } s<\xi,\\ -\dfrac{1}{a^2 l}\,\xi(l-s) & \text{при } s>\xi,\end{cases}\qquad q(s,\xi)=q(\xi,s).$$

Уравнение (1) является интегро-дифференциальным, так как реактивные моменты $M(0,\tau_i)$ и $M(l,\tau_i)$ выражаются известным образом через частные производные от смещений $u(s,\tau_i)$ в точках $s=0$ и $s=l$. Интегро-дифференциальное уравнение (1) приводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с несимметричным ядром. Аналогично выводятся интегро-дифференциальные уравнения равновесия тонких упругих оболочек

$$u_{(i)\alpha}(M,N)=F^2(M)\sqrt{G_{\alpha\alpha}(M)}\;X^k_{(i)}(N)\,v_{\alpha(k)}(N,M)-$$

$$-\iint_{(s)}F^2(M)+\sqrt{G_{\alpha\alpha}(M)}\left[K^j_{(\alpha)}(Q,M)\,u_{(i)j}(Q,N)+\right.$$

$$\left.+H^j_{(\alpha)}(Q,M)\,\omega_{(i)j}(Q,N)\right]dS_Q+$$

$$+\oint F^2(M)\sqrt{G_{\alpha\alpha}(M)}\left[T^j_{(i)}(Q,N)\,v_{(\alpha)j}(Q,M)+\right.$$

$$\left.+M^j_{(i)}(Q,N)\,\psi_{(\alpha)j}(Q,M)-S^j_{(\alpha)}(Q,M)\,u_{(i)j}(Q,N)-\right.$$

$$\left.-L^j_{(\alpha)}(Q,M)\,\omega_{(i)j}(Q,N)\right]ds_Q,$$

где интеграл по площади распространяется на срединную поверхность оболочки, а интеграл по контуру — на контур ее срединной поверхности; $M^j_{(i)}$ и $L^j_{(\alpha)}$ — основные и вспомогательные изгибающие моменты, действующие на контур срединной поверхности, $T^j_{(i)}$ и $S^j_{(\alpha)}$ — основные и вспомогательные усилия, $\omega_{(i)j}$ и $\psi_{(\alpha)j}$ — углы поворота оснований нормалей к срединной поверхности. При выводе системы (2) аналогом оси арки в теории оболочек служит ее средняя поверхность, аналогом оси балки — средняя плоскость пластинки. Уравнения (2) являются относительно функции влияния $u_{(i)\alpha}$ интегро-дифференциальными. Эти функции позволяют найти перемещения, вызванные произвольной силовой нагрузкой срединной поверхности оболочки. Отмечается, что, как уравнение (1), так и система (2) не имеют единственного решения. В качестве иллюстрации получена и проанализирована система интегро-дифференциальных уравнений равновесия сферического купола, которая сводится к интегральному уравнению.

М. И. Розовский

См. также: 9979, 10141, 10152, 10159

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

10100. Параболические функции. Джорджес (Parabolic functions. Georges J. S.), School. Sci. and Math., 1958, 58, № 2, 138—147 (англ.)

По аналогии с круговыми и гиперболическими функциями вводятся параболические функции. Указываются элементарные соотношения между ними (например, $\sin p^2 t=1+\cos p\,t$; $\tan p\,t=\dfrac{\sin p\,t}{\cos p\,t}$ и т. д.), их геометрический смысл, формулы дифференцирования, интегрирования и пр.

Б. А. Рымаренко

10101. О некоторых свойствах выпуклых функций. Пуч-Адам (Sobre algunas propiedades de las funciones convexas. Puig Adam P.), Gac. mat., 1958, 10, № 5-6, 145—153 (исп.)

10102. Вывод неравенства Коши для полиномов. Уэйнер, Порчелли (A derivation of Cauchy's inequality for polynomials. Weiner L. M., Porcelli Pasquale), Rev. Univ. nac. Tucumán, 1957, A11, № 1-2, 25—27 (англ.)

Пусть r_i $(i=1,2,\ldots,m)$ — корни степени m из единицы, a_j $(j=0,1,\ldots,m-1)$ комплексные числа, M и R — положительные числа, $f(z)=\sum_{j=0}^{m-1}a_j z^j$. Доказывается, что из неравенств $|f(r_i R)|<M$, $i=1,2,\ldots,m$, следуют неравенства $|a_j|<M/R$, $j=0,1,\ldots,m-1$. Этот результат просто обобщается на степенные ряды. Доказательство использует только элементарные свойства корней из единицы.

Г. К. Энгелис

10103. О формуле Тейлора. Барбенсон (Sur la formule de Taylor. Barbenson W.), Mathesis, 1958, 67, № 9-10, 358—359 (франц.)

10104. О бесконечно дифференцируемых положительно определенных функциях. Девинац (On infinitely differentiable positive definite functions. Devinatz A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 3—10 (англ.)

Устанавливается

Теорема. Пусть $f(x)$ $(-a<x<b;\ a,\ b>0)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Если: а) для $s_k=(-i)^k f^{(k)}(0)$ — проблема моментов Гамбургера

$$s_k=\int_{-\infty}^{\infty}t^k d\sigma(t)\quad(k=0,1,2,\ldots)\qquad(1)$$

разрешима и является определенной и б) для каждого целого $m>0$ существует $M_m>0$ такое, что для всякого x $(-a<x<b)$ и всякой конечной последовательности комплексных чисел $\{\xi_k\}_0^n$ выполняется

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\xi_k(-i)^k f^{(k+m)}(x)\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant M_m\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\xi_r\overline{\xi_s}(-i)^{r+s}f^{(r+s)}(0),$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\sigma(t).\qquad(2)$$

При доказательстве используется спектральная теория операторов в гильбертовом пространстве.

Показывается, что если проблема моментов (1) разрешима, но не является определенной, то может случиться, что при выполнении условия б) ни при каком неубывающем решении $\sigma(t)$ проблемы (1) не будет иметь место представление (2) по крайней мере на части интервала $(-a,\ b)$.

М. Г. Крейн

10105. Звездообразность области существования системы неявных функций. Лясота (Gwiaździstość zbioru określoności funkcji uwikłanych. Lasota Andrzej), Zesz. nauk. Uniw. Iagiell., 1955, № 3, 25—29 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассматривается система уравнений

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Устанавливаются условия, при выполнении которых система (1) определяет систему функций

$$y_i = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

в звездообразной окрестности некоторой точки $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$. В. В. Немыцкий

10106. Общие соотношения теории обобщенного дифференциально-интегрального исчисления. Светланов А. В., Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 1957, **46**, № 4, 1—11

Дается определение. Пусть $u = u(x)$ непрерывна и бесконечно дифференцируема всюду на каком-нибудь отрезке; обобщенной дифференциально-интегральной операцией порядка n от функции $u(x)$ по переменной x на рассматриваемом отрезке назовем бесконечный ряд

$$D^n u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\, x^{k-n}}{k!\,\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(k-n+1)}\, u^{(k)},$$

если он сходится. Изучаются некоторые свойства этой операции. В. В. Немыцкий

10107. Интегрирование по частям как специальный случай теоремы Лейбница. Грегг (Integration by parts as a special case of Leibnitz' theorem. Gregg C. V.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 288 (англ.)

10108. Об интегрировании рациональных дробей. Эрхарт (Sur l'intégration des différentielles rationnelles. Ehrhart E.), Rev. math. spéc., 1958, **69**, № 3, 385—387 (франц.)

10109. О среднем значении функции. Лабутин Д. Н., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-т, 1957, вып. 2, 269—272

Формулируется следующая теорема: При условии, что функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица на параллелепипеде $R = \{a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_m \leqslant x_m \leqslant b_m\}$, последовательность $f_n(x_1, \ldots, x_m)$, определяемая рекуррентным соотношением

$$f_n(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{P} \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_m}^{x_m} f_{n-1}(x_1, \ldots, x_m) \times$$

$$\times \varphi(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m, \qquad (1)$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна и положительна в R,

$$P = \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_m}^{x_m} \varphi(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m \quad \text{и}$$

$$f_0(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m),$$

равномерно сходится на R к $f(a_1, \ldots, a_m)$. Для доказательства устанавливается неравенство

$$|f_n(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1, \ldots, a_m)| \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 - \frac{U(x_1, \ldots, x_m)}{V(x_1, \ldots, x_m)}\right]^n M \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \leqslant \qquad (2)$$

$$\leqslant H^n M \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i),$$

где $U = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{x_i} P dx_i$, $V = P \sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)$, M — постоянная, определяемая условием Липшица, а H — наибольшее на R значение функции $h(x_1, \ldots, x_m) = 1 - \frac{U(x_1, \ldots, x_m)}{V(x_1, \ldots, x_m)}$. Предварительно доказывается, что $U/V \to 1/2$ при $x_i \to a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Примечание референта. Из (2), в силу того, что $U/V > 0$ следует сходимость $f_n(x_1, \ldots, x_m)$ к $f(a_1, \ldots, a_m)$ в любой точке внутри R. Однако утверждение о существовании у $h(x_1, \ldots, x_m)$ наибольшего значения H, меньшего единицы, а следовательно, и равномерная сходимость в R последовательности $f_n(x_1, \ldots, x_m)$, недостаточно обоснованы: $h(x_1, \ldots, x_m)$ не определена в точках границы параллелепипеда, где некоторые (не все) $x_i = a_i$. А. Г. Школьник

10110. Рекурсивная формула для $\int_0^{\infty} e^{-t} (\log t)^{n+1} dt$. Левенсон (A recursion formula for $\int_0^{\infty} e^{-t}(\log t)^{n+1} dt$. Levenson M. E.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 9, 695—696 (англ.)

10111. Вывод асимптотических выражений для интегралов и рядов. Берг (Herleitung asymptotischer Ausdrücke für Integrale und Reihen. Berg Lothar), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1957, **3**, № 1, 5—7 (нем.)

Основная теорема: Пусть для достаточно больших значений параметра s интеграл

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-g(s,\, t)}\, dt$$

сходится, и функция $g(s, t)$ имеет непрерывные частные производные по t первого и второго порядка: $g_1(s, t)$ и $g_2(s, t)$ $(0 \leqslant t_1 \leqslant t)$, причем для уравнения $g_1(y, x) = 0$ существует решение $x = x(y)$.

Сверх того, допустим существование функции $\omega(s)$, $x(s) - t_1 \geqslant \omega(s) > 0$ со следующими свойствами:

1) $\omega^2(s)\, g_2(s, x(s)) \to \infty$ при $s \to \infty$,

2) $g_2(s, \xi(s)) \sim g_2(s, x(s))$

для таких $\xi(s)$, что $|\xi(s) - x(s)| \leqslant \omega(s)$ и

3) интегралы

$$\sqrt{g_2(s, x(s))} \int_0^{x(s) - \omega(s)} \exp\{-q(s, t) + g(s, x(s))\}\, dt,$$

$$\sqrt{g_2(s, x(s))} \int_{x(s) + \omega(s)}^{\infty} \exp\{-g(s, t) + g(s, x(s))\}\, dt$$

стремятся к 0 при $s \to \infty$.

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$G(s) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(s, x(s))}}\, e^{-g(s,\, x(s))} \qquad (s \to \infty).$$

Иногда представляется более целесообразным вместо функции $x = x(y)$ ввести обратную ей функцию $y = y(x)$. При соответствующих условиях (если допустить еще, что $y(x) \to \infty$ при $x \to \infty$) справедлива асимптотическая формула

$$G(y(x)) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(y(x), x)}}\, e^{-g_2(y(x),\, x)} \qquad (x \to \infty).$$

Отсюда, при специальном выборе функции $g(s, t)$, получается ряд асимптотических формул для преобразований Лапласа и Меллина. С помощью формулы Эйлера-Маклорена теоремы об интегралах непосредствен-

но переходят в теоремы о рядах. Так получается асимптотическое равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-g(s,\nu)} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(s,x(s))}}\, e^{-g(s,x(s))} \quad (s\to\infty),$$

однако лишь при дополнительном условии, что $g_2(s,x(s))\to 0$ при $s\to\infty$. Если же $g_2(s,x(s))\to k$ $(k>0)$, то появляется периодический множитель

$$T_k(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k}{2}(\nu-x)^2},$$

и асимптотическая формула принимает вид

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-g(s,\nu)} \sim T_k(x(s))\, e^{-g(s,x(s))} \quad (s\to\infty).$$

Даются применения к степенным рядам. Автор указывает на возможность перенести сказанное об интегралах на случай комплекснозначной подынтегральной функции. Отсюда, путем отделения вещественного от мнимого; получаются новые результаты и для вещественного случая, не охватываемые основной теоремой.

Г. М. Фихтенгольц

10112. Достаточные условия для асимптотического представления параметрических интегралов. Берг (Hinreichende Bedingungen zur asymptotischen Darstellung von Parameterintegralen. Berg Lothar), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1957, 3, № 2, 85—88 (нем.)

Некоторые дополнения к предыдущей работе (реф. 10111). В интересах практических приложений устанавливаются по существу более тяжелые, но зато легко проверяемые условия, например, требование 3) основной теоремы (реф. 10111) может быть заменено предположением, что $g_1(s,t)$ при каждом $s\geqslant s_0$ является монотонно возрастающей функцией от t. Делаются указания и на возможность некоторого ослабления ранее данных условий и применения полученных результатов к интегралам с конечными пределами. Приводятся примеры.

Г. М. Фихтенгольц

10113. Дифференциальные формы и многомерные интегралы. Лоренцен (Differentialformen und mehrdimensionale Integrale. (Fortsetzung). Lorenzen Paul), Math.-phys. Semesterber., 1958, 6, № 1-2, 20—30 (нем.)

Автор определяет многомерный интеграл, исходя из дифференциальных форм как из дифференциалов, индуктивным путем. При проведении индукции предполагается, что для $l<n$ (где l и n — число измерений) уже определен интеграл, для которого имеет место линейность, аддитивность (как функций множества), формула Стокса $\int d\Omega = \oint \Omega$. Если интеграл Римана существует, то он совпадает с интегралом, предлагаемым автором.

В. В. Немыцкий

10114. О теореме о среднем значении. Фридман (On the mean value theorem. Friedman A.), Bull. Res. Council Israel, 1956, A6, № 1, 47—49 (англ.)

Пусть $K(R)$ — n-мерный шар с центром x_0, радиусом R, объемом V и границей $S(R)$. В статье даются некоторые условия, достаточные для того, чтобы множество M бесконечно дифференцируемых функций обладало следующим свойством: любому $\varepsilon>0$ соответствует такое $\theta\in(0,1)$, что из соотношений

$$\int_{K(R)} u(x)\,dV < -\varepsilon V, \quad u(x)\in M$$

следует существование точки $x_1\in K(\theta R)$, для которой $u(x_1)<0$. Цель этих условий—обеспечить достаточно хорошую для всех $u\in M$ сходимость разложения по $R^{2n}\Delta^n u(x_0)$ (Δ—оператор Лапласа) интеграла $\int_{S(R)} u(x)\,dS$.

Г. К. Энгелис

10115. Область сходимости контурных интегралов Лапласа. Дёч (Über den Konvergenzbereich von Laplace-Integralen mit komplexem Integrationsweg. Doetsch Gustav), Math. Nachr., 1958, 18, № 1-6, 129—135 (нем.)

Рассматривается интеграл

$$f(s)=\int_C e^{-st}F(t)\,dt,$$

где C — спрямляемая линия плоскости t, заданная уравнением $t=x(l)+iy(l)=r(l)\,e^{i\varphi(l)}$, выходящая из начальной точки $t_0=x(0)+iy(0)$ и удаляющаяся в бесконечность, так что $\lim_{l\to\infty} r(l)=\infty$, причем функции $x(l)$ и $y(l)$ имеют почти всюду интегрируемые по Лебегу производные такие, что $x'^2+y'^2=1$. Функция $F(t)$, по предположению, интегрируема в смысле Лебега в любом конечном промежутке, так что для любого конечного L существует интеграл

$$\int_{t_0CT} e^{-st}F(t)\,dt =$$

$$=\int_0^L e^{-s[x(l)+iy(l)]}F[x(l)+iy(l)]\,[x'(l)+iy'(l)]\,dl,$$

где $T=t(L)$, а s — любое комплексное число. Если для некоторого s существует предел этого интеграла при $L\to\infty$, то мы обозначаем этот предел через

$$f(s)=\int_C e^{-st}F(t)\,dt=\lim_{L\to\infty}\int_{t_0CT} e^{-st}F(t)\,dt.$$

Пусть $\varphi_1=\varliminf\limits_{l\to\infty}\varphi(l)$, $\varphi_2=\overline{\lim\limits_{l\to\infty}}\,\varphi(l)$.

Предположим, что выполняются следующие условия: а) $\varphi_2-\varphi_1<\pi$; б) при любом $\delta>0$ имеет место сходимость интеграла $\int_{l_0}^{\infty} e^{-\delta r(l)}dl$, причем l_0 может зависеть от δ.

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Если интеграл $f(s)$ сходится в точке $s=s_0$, то он сходится во всей угловой области $G_{s_0}^{(\varphi_1,\varphi_2)}$ с вершиной s_0 и углом при вершине $\pi-(\varphi_2-\varphi_1)$, определяемой условием $-\frac{\pi}{2}-\varphi_1<\arg(s-s_0)<\frac{\pi}{2}-\varphi_2$ $\left(G_{s_0}^{(\varphi_1,\varphi_2)}\right)$.

Положив $\psi(t)=\int_{t_0CT} e^{-s\tau}F(\tau)\,d\tau$, получим

$$f(s)=(s-s_0)\int_C e^{-(s-s_0)t}\psi(t)\,dt=I(s),$$

причем интеграл $I(s)$ сходится абсолютно в области $G_{s_0}^{(\varphi_1,\varphi_2)}$.

Теорема 2. Полная область абсолютной сходимости интеграла $f(s)$ является выпуклой. Логарифм модуля интеграла Лапласа вдоль каждой прямой, лежа-

щей в области сходимости, является выпуклой функцией. Ю. Л. Рабинович

10116. Определение функции на плоскости ее интегралами по прямым линиям. Грин (On the determination of a function in the plane by its integrals over straight lines. Green John W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 758—762 (англ.)

Используя ньютоновский потенциал, автор дает новое доказательство известной теоремы: Если функция $f(x, y)$ непрерывна и суммируема на плоскости и если интегралы $\int f ds$, взятые по любой бесконечной прямой, все равны нулю, то $f \equiv 0$.

По поводу библиографических указаний на другие доказательства, обобщения и связи см. также: Rényi A., Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, № 3, 131—142. Реньи в этой статье делает замечание о том, что для круга $x^2+y^2=1$ существует функция: $1/(\pi\sqrt{1-x^2-y^2})$, от которой интеграл по любой хорде круга равен 1, и ставит вопрос: существуют ли подобные функции для областей постоянной ширины, отличных от круга? Автор реферируемой заметки, снова пользуясь ньютоновским потенциалом, дает на этот вопрос отрицательный ответ. Г. М. Фихтенгольц

См. также РЖМат, 1959, 2495.

10117 К. Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. (Избр. главы высш. матем. для инж. и студ. втузов). Берман А. Ф. М., Физматгиз, 1958, 306 стр., илл., 5 р. 85 к.

10118 К. Краткий курс высшей математики. [Вып. 2. **Дифференциальное исчисление. Белинский В. А.**]. Моск. финанс. ин-т. М., 1958, 208 стр., илл., 3 р. 90 к.

10119 К. Курс математического анализа. Часть 4, гл. IX—X. 2-е изд. Катунда (Curso de análise matemática. IV parte, caps. IX e X. 2. ed. Catunda Omar. S. Paulo, Distr. Liv. Nobel, 1958, 128 p., il., 100,00 cruz. — Mimeogr.), Bol. bibliogr. brasil., 1958, **6**, № 7, 408 (порт.)

10120 К. Математический анализ для педагогических институтов. Куст, Таишл (Matematická analysa pro vyšší pedagogické školy. Kůst Jiří, Taišl Jan. Praha, SPN, 1956, 320 s., il.) (чешск.)

10121 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Банах Стефан. Перев. с польск. М., Физматгиз, 1958, 404 стр., илл., 8 р. 25 к.

Книга рассчитана на студентов втузов, пединститутов и университетов. Ее можно использовать для самостоятельного изучения математического анализа при заочном обучении. Материал изложен просто; в книге имеется много удачно подобранных примеров и задач для самостоятельного решения, что особенно важно при самостоятельном изучении высшей математики.

Краткое содержание по главам: 1. Теория последовательностей. 2. Функции одной переменной. 3. Предел функции. 4. Непрерывность функции. 5. Производная и дифференциал функции. 6. Теорема Ролля. Теорема о среднем значении. Формула Тейлора. 7. Максимумы и минимумы; точки перегиба. Неопределенные выражения. 8. Ряды. 9. Функции двух переменных. 10. Формула и ряд Тейлора. Максимумы и минимумы. Дифференциалы функций двух переменных. 11. Функции многих переменных. 12. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования. 13. Интегрирование рациональных функций. 14. Интегрирование алгебраических функций. 15. Интегрирование некоторых неалгебраических функций. 16. Определенный интеграл. 17. Преобразование определенных интегралов. Интегрирование последовательностей и рядов. 18. Несобственные интегралы. 19. Приложения интегрального исчисления. 20. Двойной интеграл. Условия интегрируемости. 21. Криволинейный интеграл. 22. Непрерывные отображения. Замена переменных в двойных интегралах. 23. Многократный интеграл. В. К. Захаров

10122 К. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. [Учебн. пособие для ун-тов и пед. ин-тов]. **Изд. 4-е, стереотип. Демидович Б. П.** М., Физматгиз, 1958, 511 стр., 11 р. 10 к.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

10123. О некоторых вопросах абсолютного суммирования расходящихся рядов. Обрешков (Sur quelques questions de la sommation absolue des séries divergentes. Obrechkoff N.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 63—64 (франц.)

Ряд $\sum_0^\infty u_n$ суммируем $C_\alpha B_p$, если функция

$$x^{-p} f_p(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{\Gamma(n+p+1)}, \quad s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

целая, и выражение

$$g_\alpha(x) = \alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f_p(t)\, dt, \quad \alpha > 0, \quad g_0(x) = f(x)$$

стремится к s при $x \to \infty$. Ряд $\sum_0^\infty u_n$ абсолютно суммируем $C_\alpha B_p$, кратко $|C_\alpha B_p|$-суммируем, если $g_\alpha(x)$ — функция ограниченной вариации в интервале (a, ∞), $a > 0$. Устанавливаются основные свойства этого суммирования и тауберовы теоремы для абсолютного суммирования Чезаро.

10124. Дополнение к теореме Чезаро. Лорк (Supplement to a theorem of Cesàro. Lorch Lee), Scripta Math., 1958, **23**, № 1—4, 163—165 (англ.)

Речь идет о теореме Чезаро, касающейся видоизмененного метода „нормальных средних Рисса" суммирования последовательностей $\{s_n\}$ (Харди Г., Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951, гл. III). Если $p_n \geqslant 0$, $p_0 > 0$, $P_n = p_0 + \ldots + p_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $t_n = \dfrac{p_0 s_0 + \ldots + p_n s_n}{p_0 + \ldots + p_n} \longrightarrow s$ при $n \to \infty$, то говорят, что последовательность $\{s_n\}$ суммируется к s методом $(\overline{R}, p_n)$ и пишут $s_n \to s\,(\overline{R}, p_n)$ (следуя Харди, автор пользуется обозначением $(\overline{N}, p_n)$).

Теорема Чезаро утверждает, что если $p_n \geqslant 0$, $q_n \geqslant 0$, $\sum p_n = \infty$, $\sum q_n = \infty$ и либо

$$q_{n+1}/q_n \leqslant p_{n+1}/p_n, \qquad \text{(a)}$$

либо

$p_{n+1}/p_n \leqslant q_{n+1}/q_n$ и $P_n/p_n \leqslant HQ_n/q_n$ (H не зависит от n), (b)

то из $s_n \to s\,(\overline{R}, p_n)$ следует $s_n \to s\,(\overline{R}, q_n)$. (c)

В статье теорема дополняется для случая бесконечного s; именно, показывается, что если s бесконечно, то условие (a) влечет за собою (c), но из (b) следует (c) тогда и только тогда, когда в первом из условий (b) имеет место равенство для всех n, начиная с некоторого N. Кроме того, указывается, что из предыдущего следует аналогичное предложение и для случая взвешенного среднего геометрического. А. К. Харадзе

10125. Теоремы включения для консервативных методов суммирования. Коппинг (Inclusion theorems for conservative summation methods. Copping J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1958, **A61**, № 4, 485—499, Indagationes math., 1958, **20**, № 4, 485—499 (англ.)

Бесконечная матрица A (или метод суммирования A) называется консервативной, если она переводит каждую сходящуюся последовательность x в сходящуюся последовательность Ax. Каждая консервативная матрица $A=(a_{nk})$ обладает конечной нормой $\|A\| = \sup_n \Sigma_k |a_{nk}|$.

Консервативная матрица A именуется корегулярной, если

$$\lim_n \sum_k a_{nk} \neq \sum_k \lim_n a_{nk}.$$

Говорят, что A является матрицей типа M, если уравнение $Ax = 0$ имеет лишь нулевое решение в классе последовательностей $x = \{x_k\}$ с $\Sigma \mid x_k \mid < \infty$. Известно, что если корегулярная матрица C имеет левую обратную B с конечной нормой, то B может оказаться консервативной или нет. Виланский и Целлер (РЖМат, 1958, 5846) ставили вопрос, существует ли при этих условиях также консервативная левая обратная. На этот вопрос автор положительно отвечает даже в более общем случае, когда B удовлетворяет условию $BC = A$, где A не обязательно единичная, а произвольная консервативная матрица. Отсюда следует, что $A \supset C$ для ограниченных последовательностей. Показывается, что включение $A \supset C$ применительно к неограниченным последовательностям зависит от того, является ли C матрицей типа M или нет.

Мазур (Mazur S., Math. Z., 1928, 28, 599 — 611) дал необходимые и достаточные условия для того, чтобы произвольная матрица A включала нормальную матрицу C. Этот результат Мазура был обобщен Хиллом (Hill J. D., Duke Math. J., 1942, 9, 373—381) на произвольную реверсивную C. Автор передоказывает теорему Мазура—Хилла и изучает некоторые частные случаи (C — корегулярна, C — матрица типа M и т. д.), когда условия теоремы Мазура — Хилла упрощаются. Устанавливаются также необходимые и достаточные условия для эквивалентности реверсивных корегулярных матриц типа M и изучается совместность матриц A и C при включении $A \supset C$ для реверсивной C.

Г. Ф. Кангро

10126. О перемножении $(C,-\mu)$-суммируемых рядов. Боруэйн (On multiplication of (C,—μ)-summable series. Borwein D.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 4, 441—449 (англ.)

Положим $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} s_k \binom{n}{k} \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^\nu \binom{n-k}{\nu} \mu_{k+\nu}$ (пишем $\sigma_n = H(s_n)$), где $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$, $\{\mu_n\}$ — последовательность действительных чисел. Если $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$, то говорим, что s_n H-суммируемо к s, если $\mid \sigma_n \mid \leqslant M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то s_n H-ограничено.

Полагая в формуле для σ_n $\mu_n = 1/A_n^\alpha$ при $\alpha > -1$ и $\mu_n = A_n^{-\alpha}$ при $\alpha \leqslant -1$, где $A_n^\alpha = \dfrac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!}$, получим соответственно определение (C,α)-суммируемости и (C,α)-ограниченности ряда для любых действительных α (о суммировании методом Чезаро любого порядка см. Lyra G., Math. Z., 1944, **49**, 538—562). Ряд (последовательность) абсолютно суммируем H-методом, если $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \sigma_n - \sigma_{n-1} \mid$ сходится.

Теорема 1. Если $\lambda \geqslant 1$, $\lambda > \mu$, $\delta > 0$ и ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$, $(C,-\mu)$-суммируемы соответственно к A и B и оба ограничены $(C,-\lambda)$, тогда ряд $\sum c_n$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ суммируем $(C,-\lambda+\delta)$ к AB.

Теорема 2. Если $\mu \geqslant 0$, $\sum a_n$ абсолютно суммируем $(C,-\mu)$ к A и $\sum b_n$ абсолютно суммируем $(C,-\mu)$ к B, то ряд $\sum c_n$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, суммируем $(C,-\mu)$ к AB. Отметим также следующий результат работы: Если $\beta > \alpha$, $\delta > 0$ и $\sum a_n$ ограничен (C,α) и суммируем (C,β) к A, то ряд $\sum a_n$ суммируем $(C,\alpha+\delta)$ к A (для $\alpha > -1$ см. Харди, Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951). И. И. Огиевецкий

10127. Замечания о тауберовых теоремах для римановой суммируемости. Яно (Notes on Tauberian theorems for Riemann summability. Yano Kenji), Tohoku Math. J., 1958, **10**, № 1, 19—31 (англ.)

Пусть $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ — числовой ряд, $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ и при некотором γ S_n^γ — его средние Чезаро порядка γ.

Устанавливается, что если $r > 0$, $0 < s < 1$ или $s = 1, 2, 3, \ldots$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| S_\nu^r \right| = o(n^{r\alpha}), \tag{1}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n+1}^{2n} \left(\left| S_\nu^{-s} \right| - S_\nu^{-s} \right) = O(n^{-s\alpha}), \tag{2}$$

то при $0 < t \leqslant \delta < 2\pi$ сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} S_n \dfrac{\sin nt}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\sin nt}{n}$ и

$$\lim_{t\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{\sin nt}{n} = \lim_{t\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nt}{n} = 0.$$

Второй из этих рядов сходится равномерно на $0 \leqslant t \leqslant \pi$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Эти утверждения остаются в силе, если вместо (1) и (2) предполагать, что при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n+1}^{2n} \mid S_\nu \mid = o\left(\frac{1}{\lg n}\right),$$

а для некоторых положительных значений s и $\delta < 1$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n+1}^{2n} \left(\left| S_\nu^{-s} \right| - S_\nu^{-s} \right) = O\left(n^{-\delta}\right).$$

Полученные результаты обобщают некоторые теоремы, установленные ранее в работах Хирокава и Суноути (РЖМат, 1954, 5640; 1956, 8112). А. Ф. Тиман

10128. О сходимости двойных числовых рядов с положительными членами. Цхадая Т. Сохумис сахелмцифо педагогиури институтис шромеби, Тр. Сухумск. гос. пед. ин-та, 1958, **10**—**11**, 473—474 (груз.)

Доказана следующая теорема: Для того чтобы двойной числовой ряд, с общим членом $u_{m,n} \geqslant 0$, был сходящимся, необходимо и достаточно существование такой двойной последовательности $\{b_{m,n}\}$, что

$$b_{m,n} = O(mn)$$

и

$$b_{m+1,n} \frac{u_{m+1,n}}{u_{m+1,n+1}} + b_{m,n+1} \frac{u_{m,n+1}}{u_{m+1,n+1}} - b_{m,n} \cdot \frac{u_{m,n}}{u_{m+1,n+1}} - b_{m+1,n+1} \geqslant q > 0.$$

Ф. И. Харшиладзе

10129. Множители суммируемости. Сривастава (On summability factors. Srivastava Pramila), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1958, **A24**, № 3, 182—195 (англ.)

Пусть непрерывная функция $K(t)$ на $[a, \infty]$, $a > 0$, обладает свойствами:

1) $\int^{\infty} K(t)\, t^{-1}\, dt < \infty$, 2) $\int^{\infty} t^{\lambda} \mid dK^{(\lambda)}(t) \mid < \infty$, когда λ — целое число, или $\int^{\infty} t^{[\lambda]+1} \mid dK^{([\lambda]+1)}(t) \mid < \infty$, когда λ не является целым, 3) $\mid K'(t) \mid$ есть монотонная неубывающая функция.

Устанавливается, что если при некотором $h > 0$ и $\lambda \geqslant 0$,

$$\int_h^{\omega} \left| \int_a^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\lambda - 1} d\alpha(t) \right| dx = O(\omega),$$

то

$$\int_h^{\infty} \left| d \int_a^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\lambda} K(t)\, d\alpha(t) \right| < \infty.$$

Аналогичное предложение доказано также в более общей формулировке. Среди других отметим одну вытекающую отсюда теорему: Если $K(t)$ удовлетворяет приведенным выше условиям и для неограниченно возрастающей последовательности положительных чисел λ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, при некотором $s \geqslant 0$,

$$\sum_{\lambda_n < x} \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right)^s a_n = O(1),$$

то

$$\int_h^{\infty} \left| d \sum_{\lambda_n < x} \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right)^s K(\lambda_n)\, a_n \right| < \infty.$$

А. Ф. Тиман

10130. Метод разложения периодических функций. **Перели** (A method of developing periodic functions. Pereli J.), Electron. Engng, 1959, **31**, № 373, 166—167, 185, 190 (англ.; рез. франц., нем.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

10131. Замечания к работе «Об асимптотических представлениях цилиндрических функций». **Петрашень Г. И., Молотков И. А.**, Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 246, 347—352

Исправляются ошибки и неточности, допущенные в совместной работе трех авторов: Г. И. Петрашеня, Н. С. Смирновой, Г. И. Макарова (РЖМат, 1955, 3281).

А. К. Харадзе

10132. О видоизмененных косинус-функциях. **Ватанабэ, Накамура** (On the modified cosine functions. Watanabe Yoshikatsu, Nakamura Mikio), Токусима дайгаку гакугэй киё (Сидзэн кагаку), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci., 1954, **5**, Dec., 39—48 (англ.)

Фундаментальная система уравнения

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} - 2nz \frac{dy}{dz} + (z^2 + 2n)\, y = 0, \qquad (1)$$

где n — произвольный параметр, имеет вид:

$$y_1 = V_n(z) = (-2z^2)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^m m!\,(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2m-1)},$$

$$y_2 = U_n(z) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{2^m m!\,(2m+1-2n)(2m-1-2n)\ldots(3-2n)}.$$

Функции V_n и U_n автор называет видоизмененными косинус- и синус-функциями.

Выводятся рекуррентные уравнения

$$V_{n+1}(z) + (2n-1)\, V_n(z) + z^2 V_{n-1}(z) = 0,$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{V_n(z)}{z}\right) = -V_{n-1}(z); \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{V_n(z)}{z^{2n}}\right) = \frac{V_{n+1}(z)}{z^{2n+1}}.$$

Доказывается, что $V_n(z)$ при $n \geqslant 0$ имеет бесконечное число корней и что между двумя последовательными корнями $V_n(z)$ лежит один и только один корень $V_{n+1}(z)$.

Далее доказывается, что при $n > 1/2$ и $n = 0$

$$\int_0^1 \frac{V_n(\alpha x)\, V_n(\beta x)}{x^{2n}}\, dx = \frac{V_n(\alpha)\, V_n'(\beta) - V_n(\beta)\, V_n'(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$(\alpha \neq \beta)$$

$$\int_0^1 \frac{V_n^2(\alpha x)\, dx}{x^{2n}} = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) V_n^2(\alpha) + \alpha^2 V_{n-1}^2(\alpha) + 2(n-1)\, V_n(\alpha)\, V_{n-1}(\alpha)\right].$$

Отсюда выводится, что уравнение $V_n(z) = 0$ не имеет комплексных корней. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r < \ldots$ $\ldots$ — положительные корни $V_n(z) = 0$ и пусть произвольная функция $f(x)$ разложена в промежутке $0 < x < 1$ в ряд $f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r V_n(\lambda_r x)$.

Доказывается, что

$$A_r = \frac{2}{\lambda_r V_{n-1}^2(\lambda_r)} \int_0^1 \frac{V_n(\lambda_r x)\, f(x)}{x^{2n}}\, dx,$$

и выводится соотношение

$$U_n(z)\, V_{n-1}(z) - U_{n-1}(z)\, V_n(z) = z^{2n-1}.$$

Примечание референта. Функции $V_n(z)$ и $U_n(z)$ выражаются очень просто через функции Бесселя:

$$V_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\pi i n}\, z^{n+1/2}\, J_{n-1/2}(z);$$

$$U_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{e^{-\pi i n}}{\cos \pi n}\, z^{n+1/2}\, J_{-(n-1/2)}(z).$$

Все результаты работы сводятся поэтому к общеизвестным простейшим свойствам функций Бесселя. Уравнение (1) приводится к уравнению Бесселя порядка $n - 1/2$ путем преобразования $y = z^{n+1/2} w(z)$.

Ю. Л. Рабинович

10133. Об одном семействе многочленов от двух переменных, ортогональных на некотором треугольнике. **Прориоль** (Sur une famille de polynomes à deux variables orthogonaux dans un triangle. Proriol Joseph), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 26, 2459—2461 (франц.)

Пусть $t(x, y) = x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}$, $\operatorname{Re}\gamma > 0$, $\operatorname{Re}\gamma' > 0$, $\operatorname{Re}\alpha > \operatorname{Re}(\gamma + \gamma') - 1$ и пусть G — область

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$. Аппелем была построена двойная последовательность полиномов $J_{m,n}(x, y)$, для которой

$$\iint_G t(x, y) J_{m,n}(x, y) J_{k,l}(x, y)\, dxdy \equiv (J_{m,n}, J_{k,l}) \neq 0$$

только при $m + n = k + l$ (см., например, РЖМат, 1955, 3285К; т. 2, стр. 269). В реферируемой статье строится система полиномов $P_{m,n}$, для которой $(P_{m,n}, P_{k,l}) \neq 0$ только при $m = n$, $k = l$, а именно

$$P_{m,n}(x, y) = \rho^n J_{m-n}^{(\alpha-\gamma-\gamma',\, 2n+\gamma+\gamma'-1)}(2\rho - 1)\, J_n^{(\gamma-1,\, \gamma'-1)}\left(\frac{\tau}{\rho}\right),$$

где $\rho = x + y$, $\tau = y - x$, $J_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ — полином Якоби. Частный случай $\gamma = \gamma' = 1$, $\alpha = 2$ был рассмотрен раньше Мунши и Плювинажем (РЖФиз, 1956, 25131; 1957, 3355, 30082; 1958, 7951). Г. К. Энгелис

10134. Ортогональные полиномы, связанные с биномиальной функцией распределения с целым отрицательным индексом. Кулик (Orthogonal polynomials associated with the binomial probability function with a negative integral index. Kulik S.), Proc. Shevchenko Scient. Soc. Sec. Math., Natur. Sci. and Med., 1953, **1**, 7—10 (англ.)

Пусть $0 < q < 1$, $p + q = 1$ и $B(x, n, q) = \binom{n + x - 1}{x} p^n q^x$; в статье изучаются полиномы $\varphi_m(x)$, определяемые равенством

$$B(x, n, q)\, \varphi_m(x) = C_{m,n} \nabla^m B(x, n + m, q),$$

где $C_{m,n}$ — постоянная, ∇ — оператор левых разностей относительно x. Найдены производящие функции и рекуррентные формулы, установлена связь между $\varphi_m(x)$ и полиномами Шарлье и Эрмита.

Примечание референта. Полиномы $\varphi_m(x)$ с точностью до численного множителя совпадают с полиномами Мейкснера (РЖМат, 1955, 3285К, т. 2, стр. 225). Г. К. Энгелис

10135. Нелинейные рекуррентные соотношения для классических ортогональных полиномов. Тихара (Nonlinear recurrence relations for classical orthogonal polynomials. Chihara T. S.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 3, 195—197 (англ.)

Доказывается (одновременно для всех классических ортогональных полиномов $p_n(x)$) рекуррентное соотношение

$$X^2(x)(p_n'^2 - p_n p_n'') = U_n(x)\, p_n^2 - D_n p_{n+1} p_{n-1} + W_n(x) p_n p_{n-1},$$

Здесь $X(x)$ и $U_n(x)$ — полиномы не выше второй степени, $W_n(x)$ — полином не выше первой степени, D_n — постоянная. Для полиномов Якоби этот факт является новым. Г. К. Энгелис

10136. О некоторых свойствах нулей классических ортогональных многочленов. Обрешков (Sur quelques propriétés des zéros des polynomes classiques orthogonaux. Obrechkoff N.), Докл. Болг. АН, 1957, **10**, № 6, 435—438 (франц.; рез. русск.)

Пусть x_l — нули полинома Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\alpha, \beta > -1)$, расположенные в порядке возрастания. Доказывается что интервал (x_s, x_{s+1}), $1 \leqslant s < n$, содержит нуль полинома $P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)$ тогда и только тогда, если сегмент $[x_s, x_{s+1}]$ не содержит число $\eta = (\beta^2 - \alpha^2)/[(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)]$. Аналогичные утверждения имеют место также для полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ (здесь $\eta = 2n + \alpha - 1$) и полиномов Эрмита ($\eta = 0$). Г. К. Энгелис

10137. О нулях вторых производных классических ортогональных многочленов. Обрешков (Sur les zéros des dérivées secondes des polynomes classiques orthogonaux. Obrechkoff Nikola), Докл. Болг. АН, 1957, **10**, № 6, 439—442 (франц.; рез. русск.)

Пусть x_l — нули полинома Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\alpha, \beta > -1)$, расположенные в порядке возрастания. Доказывается, что интервал (x_s, x_{s+1}), $1 \leqslant s < n$, содержит нуль полинома $d^2 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)/dx^2$ тогда и только тогда, если сегмент $[x_s, x_{s+1}]$ не содержит число $\zeta = (\beta - \alpha)(\alpha + \beta + 2)$. Аналогичное утверждение имеет место для полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ (здесь $\zeta = \alpha + 1$) и полиномов Эрмита.

Без доказательства приводится подобный результат относительно нулей третьей производной ультрасферических полиномов. Г. К. Энгелис

10138. Теорема умножения обобщенных гипергеометрических функций. Тоскано (Teorema di moltiplicazione sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. Toscano Letterio), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **41**, 269—288 (итал.)

Доказывается следующая формула:

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_q;\end{matrix} \lambda x\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, m) \ldots (\alpha_p, m)\, {}_2F_1(-m, \nu + m - 1; \gamma_q; \lambda)}{(\gamma_1, m) \ldots (\gamma_{q-1}, m)(\nu + m - 1, m) m!} \times$$

$$\times (-x)^m {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1 + m, \ldots, \alpha_p + m; \\ \gamma_1 + m, \ldots, \gamma_{q-1} + m, \nu + 2m;\end{matrix} x\right],$$

где $(\alpha, m) = \alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + m - 1)$.

Для гипербесселевых функций

$$J_{\gamma_1, \ldots, \gamma_q}(x) = \frac{\left(\frac{x}{q+1}\right)^{\gamma_1 + \ldots + \gamma_q}}{\Gamma(\gamma_1 + 1) \ldots \Gamma(\gamma_q + 1)} \times$$

$$\times {}_0F_q\left[\gamma_1 + 1, \ldots, \gamma_q + 1; -\left(\frac{x}{q+1}\right)^{q+1}\right]$$

находим

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}, \nu}(x) =$$

$$= \left[\log\left(\frac{x}{q+1}\right) - \psi(\nu + 1)\right] J_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}, \nu}(x) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\nu + m}\right) J_{\gamma_1 + m, \ldots, \gamma_{q-1} + m, \nu + 2m}(x),$$

где

$$\psi(\nu) = \frac{d}{d\nu} \log \Gamma(\nu).$$

В частности, для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и полиномов Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha + 1, n)}{n!} {}_1F_1(-n; \alpha + 1; x)$$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(\alpha+1,n)}\right]=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(-n-\beta,m)}{(\alpha+1,m+n)}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{\alpha+m}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)^m\times$$

$$\times P_{n-m}^{(\alpha+2m,\beta)}(x);$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{(\alpha+1,n)}\right]=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(\alpha+1,m+n)}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{\alpha+m}\right)\times$$

$$\times x^m L_{n-m}^{(\alpha+2m)}(x).$$

Как частный случай получается теорема умножения для функций Куммера

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;\lambda x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m)\,P_m^{(\gamma-1,\nu-\lambda-1)}(1-2\lambda)}{(\gamma,m)\,(\nu+m-1,m)}(-x)^m\times$$

$$\times{}_1F_1(\alpha+m;\nu+2m;x).$$

Из этой формулы, в частности, вытекает разложение функции Куммера в ряд по функциям Бесселя:

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x)=2^{2\alpha-2}\,\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-\alpha}e^{\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\times\frac{(2\alpha+2m-1)\,(2\alpha-1,m)\,(2\alpha-\gamma,m)}{(\gamma,m)\,m!}I_{\alpha+m-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right),$$

где α и γ не являются целыми отрицательными числами и отличны от нуля.

Для полиномов Лагерра находим

$$L_n^{(\gamma)}(-x)=\frac{\sqrt{\pi}}{n!}x^{-\gamma-n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2\gamma+2n+2m+1)\Gamma(2\gamma+2n+m+1)(\gamma+2n+1,m)}{m!\,\Gamma(\gamma+m+1)}\times$$

$$\times I_{\gamma+n+m+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Для функции ошибок имеет место разложение

$$\operatorname{erf}(x)=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}I_{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Ю. Л. Рабинович

10139. Асимптотическое выражение для вырожденной гипергеометрической функции. Арутюнян В. М., Мурадян Р. М., Соколов А. А., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 5, 751—754

Для отыскания асимптотических формул решений уравнения Уиттекера

$$\frac{d^2W}{dx^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{x}+\frac{1/4-\mu^2}{x^2}\right\}W=0$$

применяется метод построения „близкого уравнения". Решение уравнения ищется в виде $W=\psi(x)\,F[z(x)]$, где ψ, F, z — произвольные функции, причем F подбирается так, что она удовлетворяет уравнению Бесселя. Получены и изучены формулы

$$W_{\lambda,\mu}(x)=\sqrt{\pi}\,e^{-\lambda+\lambda\ln\lambda}\left(\frac{z_1}{z_1'}\right)^{1/2}\{\sin(\lambda-\mu)\,\pi J_{2\mu}(z_1)-$$

$$-\cos(\lambda-\mu)\,\pi N_{2\mu}(z_1)\},$$

$$z_1=2\lambda\arcsin\left(\frac{x}{4\lambda}\right)^{1/2}+2\lambda\left(\frac{x}{4\lambda}\right)^{1/2}\left(1-\frac{x}{4\lambda}\right)^{1/2},$$

$$0\leqslant x\leqslant x^*<4\lambda;$$

$$W_{\lambda,\mu}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,e^{-\lambda+\lambda\ln\lambda}\left(\frac{z_2}{-z_2'}\right)^{1/2}\left\{J_{1/3}(z_2)+J_{-1/3}(z_2)\right\},$$

$$z_2=2\lambda\arccos\left(\frac{x}{4\lambda}\right)^{1/2}-2\lambda\left(\frac{x}{4\lambda}\right)^{1/2}\left(1-\frac{x}{4\lambda}\right)^{1/2},$$

$$x^*\leqslant x\leqslant 4\lambda;$$

$$W_{\lambda,\mu}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\lambda+\lambda\ln\lambda}\left(\frac{z_3}{z_3'}\right)^{1/2}K_{1/3}(z_3),$$

$$z_3=2\lambda\left(\frac{x}{4\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{x}{4\lambda}-1\right)^{1/2}-2\lambda\ln\left\{\left(\frac{x}{4\lambda}\right)^{1/2}-\left(\frac{x}{4\lambda}-1\right)^{1/2}\right\}$$

$$4\lambda\leqslant x<\infty.$$

Л. Я. Цлаф

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

10140. Обобщенное преобразование Лапласа. Нараин (On a generalized Laplace transform. Narain Roop), Math. Z., 1958, **69**, № 3, 228—233 (англ.)

Рассматривается обобщенное преобразование Лапласа в форме Варма (РЖМат, 1959, 3921)

$$\varphi(s)=s\int_0^{\infty}(st)^{m-1/2}e^{-1/2st}W_{k,m}(st)\,f(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $W_{k,m}(st)$ — функция Уиттекера.

Краткое обозначение (1):

$$\varphi(s:k,m)=W[f(t);k,m].$$

В работе установлены свойства обобщенного преобразования Лапласа, которые используются для получения интегральных представлений некоторых функций. Доказываются теоремы:

Теорема 1. Если $W[t^{\sigma}f(t);k,m]=\varphi(s:k,m;\sigma)$, то

$$\varphi(s:k,m;\sigma)=\frac{s^{k+m-\lambda-\mu+1}}{\Gamma(2\lambda-2k)}\times$$

$$\times\int_0^y y^{2\lambda-2k-1}(y+s)^{-1}{}_2F_1\left\{\begin{matrix}\lambda+\mu-k\pm m\\2\lambda-2k\end{matrix};\frac{y}{s}\right\}\times$$

$$\times\varphi(y+s:\lambda,\mu;\sigma+\lambda-\mu-k+m)\,dy \qquad (2),$$

при условии $\operatorname{Re}(s)\geqslant s_0>0$, $\operatorname{Re}(\lambda-k)>0$, обобщенное преобразование Лапласа от $|t^{\sigma+\lambda-\mu-k+m}f(t)|$ существует, и интеграл в (2) абсолютно сходится.

Теорема 2. Если

$$W[t^{\sigma} f(t); k, m] = \varphi(s:k, m; \sigma)$$

и

$$W[t^{\sigma} e^{yt} f(t); k, m] = \varphi(s:y: k, m; \sigma),$$

то

$$\varphi(s:k, m; \sigma) = \frac{\Gamma_*(1/2 - k + \lambda \pm \mu)\, s^{1+m-\lambda-\mu}}{\Gamma_*(1/2 - k \pm m)\Gamma(2\lambda)} \int_0^{\infty} \frac{y^{2\lambda-1}}{y+s} \times$$

$$\times {}_2F_1\left\{\begin{matrix}\lambda + \mu \pm m \\ 2\lambda\end{matrix}; -\frac{y}{s}\right\} \varphi(y + s:y:k - \lambda, \mu;$$

$$\sigma + \lambda - \mu + m)\, dy \qquad (3)$$

при условии $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\mathrm{Re}(1/2 - k \pm m) > 0$, $\mathrm{Re}(\sigma + \lambda + 1 + \alpha + m \pm \mu) > 0$, где $f(t) = O(t^{\alpha})$ для малых t, $t^{\sigma+k+m-1/2} e^{-st} f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, для $\mathrm{Re}(s) \geqslant s_0 > 0$, и при условии, что интеграл в (3) абсолютно сходится.

Теорема 3. Если $W[f(t); k, m] = \varphi(s:k, m)$, то

$$\varphi(s:k, m) = \frac{2^{k+1/2}\, s^{1+m}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha + \beta)} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} (u^2 - 1)^{\alpha+\beta-1}\, u^{1-2\beta}\, {}_2F_1\left\{\begin{matrix}\alpha \pm 1/2 m \\ \alpha + \beta\end{matrix}; 1 - u^2\right\} \times$$

$$\times g(1/4 s^2 u^2)\, du, \qquad (4)$$

где

$$g(x) = \int_0^{\infty} t^m f(t)\, G_{2,4}^{4,0}\left(xt^2 \left| \begin{matrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{2}k, & \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \end{matrix}\right.\right) dt \qquad (5)$$

при условии $\mathrm{Re}(s) \geqslant s_0 > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha + \beta) > 0$ и при условии что интегралы в (4) и (5) абсолютно сходятся. Здесь $G_{p,q}^{m,n}\left(x \left| \begin{matrix} a_r \\ b_s \end{matrix}\right.\right)$ — функция Мейера (РЖМат, 1955, 3285К, стр. 207).

П. И. Кузнецов

10141. Теоремы обращения и представления для некоторого обобщенного интеграла Лапласа. Саксена (Inversion and representation theorems for a generalized Laplace integral. Saksena K. M.), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 3, 597—607 (англ.)

Рассматривается обобщение преобразования Лапласа в виде

$$F(x) = \int_0^{\infty} (xt)^{m-1/2} e^{-xt/2} W_{k,m}(xt) \varphi(t)\, dt, \qquad (1)$$

где $\varphi(t) \in L(0, \infty)$, $m > -1/2$ и $x > 0$.

Доказываются две теоремы, среди которых первая выражает обращение преобразования (1), а вторая содержит необходимые и достаточные условия представимости функции $F(x)$ посредством интеграла вида (1). При этом применяются некоторые интегральные операторы, имеющие смысл интегрирования дробного порядка. В частности, ядро преобразования (1) представляется в виде интеграла дробного порядка от e^{-xt}.

Н. А. Бразма

10142. Обращения обобщенных преобразований Ламберта. Голдберг (Inversions of generalized Lambert transforms. Goldberg Richard R.), Duke Math. J., 1958, 25, № 3, 459—476 (англ.)

Преобразование Ламберта имеет вид

$$F(x) = \int_{0+}^{\infty} \frac{1}{e^{xt} - 1} \varphi(t)\, dt.$$

Это преобразование допускает обращение в случае, если

$$\int_0^{\infty} |\varphi(t)|/t\, dt < \infty \text{ и } \varphi(t) = O(t^{\delta}) \text{ при } t \to 0+ \text{ для } \delta > 0.$$

Далее рассматриваются преобразования вида

$$F(x) = \int_{0+}^{\infty} K(xt)\, d\alpha(t) = \int_{0+}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kxt}\, d\alpha(t);$$

в частном случае преобразование

$$F(x) = \int_{0+}^{\infty} K(xt) \varphi(t)\, dt = \int_{0+}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kxt} \varphi(t)\, dt,$$

где

$$K(xt) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kxt}.$$

Эти преобразования называются обобщенными преобразованиями Ламберта.

В статье даются следующие определения:

1. Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности действительных чисел. Если они удовлетворяют условию

$$\sum_{d|m} a_d b_{m/d} = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ 0, & m = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где суммирование распространяется на все делители d целого положительного числа m, то пишем $A \approx B$.

2. Пусть $r > 0$. Последовательность $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит к классу C_r, если удовлетворяет условиям: 1) $a_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$, 2) $a_k = O(k^{r-1})$ $(k \to \infty)$, 3) $a_1 > 0$; будем это обозначать так: $A \in C_r$. Если, к тому же, 4) $b_n = O(n^{r-1})$ $(n \to \infty)$, где $A \approx B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, то A принадлежит классу C_r^*, что обозначается так: $A \in C_r^*$.

3. Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — любая последовательность действительных чисел. Тогда для любой функции $g(t)$ мы определим

$$A[g(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g(kt).$$

4. Пусть $g(x) \in C^{\infty}$ $(0 < x < \infty)$. По определению для любого $t > 0$ и любых $p = 1, 2, \ldots$

$$L_{p,t}[g(x)] = \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} g^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right).$$

5. Пусть B — любая последовательность действительных чисел и $g(x) \in C^{\infty}$ $(0 < x < \infty)$. По определению для любого $t > 0$ и любых $p = 1, 2, \ldots$

$$B_{p,t}[g(x)] = L_{p,t}[B[g(w)]],$$

где оператор B определен в 3):

$$B[g(w)] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g(kw).$$

Имеют место теоремы обращения:

Теорема 7. 6. Если: 1) $A \varepsilon C_r^*$ для некоторого $r>0$; $A \asymp B$, 2) $K(t) = A[e^{-t}]$ $(0<t<\infty)$, 3) $F(x) = \int_{0^+}^{\infty} K(xt)\, d\alpha(t)$ сходится для $x = x_0 > 0$,

$$4) \int_0^1 \frac{|\alpha(t) \ln t|}{t^{r+1}}\, dt < \infty,$$

то

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^t B_{p,u}[F(x)]\, du =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^t \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{p}{u}\right)^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^p F^{(p)}\left(\frac{np}{u}\right) du = \alpha(t)$$

$$(0<t<\infty).$$

Теорема 7. 7. Если: 1) $A \varepsilon C_r^*$ для некоторого $r>0$; $A \asymp B$, 2) $K(t) = A[e^{-t}]$ $(0<t<\infty)$, 3) $F(x) = \int_{0^+}^{\infty} K(xt)\varphi(t)\, dt$ сходится для $x = x_0 > 0$.

$$4) \int_0^1 \frac{|\varphi(t) \ln t|}{t^r}\, dt < \infty,$$

то

$$\lim_{p\to\infty} B_{p,t}[F(x)] =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^p F^{(p)}\left(\frac{np}{t}\right) = \varphi(t)$$

почти всюду $(0<t<\infty)$. В остальных теоремах устанавливаются другие свойства обобщенных преобразований Ламберта и, в частности, связь с преобразованием Лапласа. П. И. Кузнецов

10143. Конечное интегральное преобразование с симметрическим ядром. Кузнецова Д. С., Уч. зап. Шуйск. гос. пед. ин-та, 1958, 6, 171—184

Рассматривается конечное интегральное преобразование вида

$$\overline{u}(t,x) = \int_0^1 G(x,\xi)\ u(t,\xi)\, d\xi,$$

где G—замкнутое, симметричное, положительно определенное ядро. Доказывается формула обращения

$$u(t,x) = \lim_{\tau\to 0} \int_0^1 \widetilde{G}(\tau,x,\xi)\, \overline{u}(t,\xi)\, d\xi,$$

где

$$\widetilde{G}(\tau,\eta,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k^2 \tau}\, \varphi_k(\eta)\, \varphi_k(\xi); \qquad \tau>0;$$

λ_k, φ_k — соответственно собственные числа и собственные функции ядра. Доказывается непрерывность $\overline{u}(t,x)$ по x изображения всякой функции $u(t,\xi)$, интегрируемой с квадратом. Рассмотренное преобразование применяется к решению краевой задачи для уравнения теплопроводности для отрезка $[0,1]$ с однородными краевыми условиями и непрерывным начальным условием П. И. Кузнецов

10144. Двойственные себе функции в виде ряда. Рао (Self-reciprocal functions in the form of series. Rao V. V. L. N.), Proc. Indian Acad. Sci., 1958, A48, № 5, 263—268 (англ.)

Даются асимптотические разложения для некоторых классов двойственных себе функций относительно преобразования Ганкеля. При построении разложения используется другая функция, о которой известно, что она тоже двойственная себе относительно преобразования Ганкеля, и при помощи которой разлагаемая функция задается в виде интеграла. Э. Я. Риекстыньш

10145. К теории операционного исчисления. Диткин В. А., Докл. АН СССР, 1958, 123, № 3, 395—396

Микусинский (РЖМат, 1955, 1343 К) построил операционное исчисление без использования теории преобразования Лапласа. Для операционного исчисления Микусинского автор строит аналог преобразования Лапласа, который дает возможность значительно упростить вычисления при нахождении некоторых операционных формул. Реферируемая заметка является обобщением одной прежней работы автора (Успехи матем. наук, 1946, 2, вып. 6, 72—158). Г. Ф. Кангро

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10146. Переходные радиочастотные волны по плоской поверхности земли с конечной проводимостью. Джолер (Transient radio-frequency ground waves over the surface of a finitely conducting plane earth. Johler J. R.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1958, 60, № 4, 281—285 (англ.)

Рассматриваются конкретные примеры распространения переходных радиочастотных волн по плоской поверхности земли с конечной проводимостью при пренебрежимых токах смещения. Автор опирается на формулу, полученную им ранее посредством обратного преобразования Лапласа (РЖФиз, 1958, 11333)

Н. А. Бразма

10147. Изучение движения кулачка с помощью ряда Фурье. Мунтяну (Studiul mişcării unei came prin serii Fourier. Munteanu Octavian), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1957, 3, № 3-4, 211—212 (рум.; рез. русск., нем.)

10148. Огибающие и предогибающие волн действительного вида. Дугунджи (Envelopes and pre-envelopes of real waveforms. Dugundji J.), IRE Trans. Inform. Theory, 1958, 4, № 1, 53—57 (англ.)

Рассматривается многочастотная волна, имеющая действительное выражение

$$u(t) = \sum\nolimits_n c_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Обычно огибающая волны определяется выражением

$$R(t) = \left[I_c^2 + I_s^2\right]^{1/2},$$

которое получается после разложения волны в виде

$$u(t) = I_c \cos qt - I_s \sin qt$$

с произвольным q (Rice S. O., Bell System. Techn. J., 1944, 23, 1).

Вместо огибающей волны автором вводится новое понятие: Если $\hat{u}(t)$ обозначает преобразование Гиль-

берта функции $u(t)$, то предогибающая волны определяется выражением

$$z(t) = u(t) + i\hat{u}(t),$$

причем оказывается, что $|z(t)| = R(t)$. Из независимости $z(t)$ от q следует независимость $R(t)$ от q.

Изучаются свойства преобразования Гильберта. В частности, доказывается, что функции u и $\hat{u}$ имеют одинаковые спектры энергии и автокорреляционные функции, а их взаимная корреляция к моменту $t=0$ равна нулю. Далее, автокорреляция предогибающей от u равна удвоенной предогибающей автокорреляционной функции от u.

Доказываются свойства линейного фильтра:

1. Предогибающая выходной функции от данной входной функции равна выходной функции от предогибающей входной функции.

2. Пусть входной функцией является сигнал $u(t)$ плюс гауссов шум с нулевым средним значением и спектром энергии $W(f)$, а частотная характеристика фильтра пусть будет $Y(f)$. Тогда огибающая R выходной функции имеет плотность вероятностей

$$p(R) = \frac{R}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{R^2 + |z(t)|^2}{2\sigma^2}\right] J_0\left[\frac{R \cdot |z(t)|}{\sigma^2}\right],$$

где J_0 — бесселева функция нулевого порядка и чисто мнимого аргумента,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 W(f)\, df$$

и

$$z(t) = 2\left|\int_0^{\infty} Y(f)\, U(f) \exp[2\pi i f t]\, df\right|,$$

причем последнее выражение равно огибающей выходной функции, если на входе имеется только сигнал ($U(f)$ — преобразование Фурье функции $u(t)$).

Рассматривается применение понятия предогибающей к теории частотной модуляции. Н. А. Бразма

См. также: 9742, 9777, 9889. 9910, 9917.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

10149. О теории операторных систем. II. Словиковский (On the theory of operator-systems. II. Słowikowski W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 6, 383—386, XXXI—XXXII (англ.; рез. русск.)

Результаты одной из предыдущих работ автора об операторных системах (РЖМат, 1956, 3161) обобщаются на так называемые map-системы (упорядоченные пары $\mathfrak{A} = (S, X)$ из полугруппы S и коммутативной группы X), ко орые отличаются от операторных тем, что полугруппа S не обязана быть коммутативной и тем, что гомоморфизм, определяемый элементом $A \in S$, может отображать ассоциированную с A подгруппу $G(A)$ группы X не на всю группу X. Вводится понятие идеала $\mathfrak{I}$ map-системы $\mathfrak{A}$, обобщающее понятие идеала операторной системы. Устанавливается связь данной map-системы $\mathfrak{A}$ с фактор-map-системой $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$, а также связь гомоморфизма одной map-системы $\mathfrak{A}'$ в другую map-систему $\mathfrak{A}''$ с гомоморфизмом $\mathfrak{A}'/\mathfrak{I}'$ в $\mathfrak{A}''/\mathfrak{I}''$. Кроме того, формулируется одна алгебраическая теорема о map-системах. С. Н. Крачковский

10150. Преобразования пространств последовательностей. Аллен (Transformations of séquence spaces. Allen H. S.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 3, 374—376 (англ.)

Обозначим через $\alpha \to \beta$ множество бесконечных матриц $A = (a_{nk})$, преобразующих пространство последовательностей α в пространство последовательностей β. При этом требуется абсолютная сходимость рядов $\sum_k a_{nk} x_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для всех $\{x_k\} \in \alpha$. Матричное пространство $\alpha \to \beta$ характеризуется автором в тех случаях, когда β является произвольным пространством последовательностей, а α — пространство C стационарных последовательностей $\{x_k\}$ с $x_{k+1} = x_k$ при $k \geqslant k_0$ или пространство D знакопеременных последовательностей $\{x_k\}$ с $x_{k+1} = -x_k$ при $k \geqslant k_0$. Пусть α — нормальное пространство (т. е. такое пространство, в котором из $\{x_k\} \in \alpha$ и $|y_k| \leqslant |x_k|$ $(k = 1, 2, \ldots)$ следует $\{y_k\} \in \alpha$, а β — совершенное пространство (т. е. $\beta^{**} = \beta$, где β^{**} — второе дуальное пространство пространства β). Показывается, что если α содержит пространство Ф-последовательностей, обладающих лишь конечным числом отличных от нуля элементов, и $\alpha \subset \lambda \subset \alpha^{**}$, то: 1) $\alpha \to \beta = \lambda \to \beta = \alpha^{**} \to \beta$; 2) $(\alpha \to \beta)' = \beta^* \to \alpha^*$. Из теорем автора вытекают некоторые результаты Эль Макарема (РЖМат, 1957, 4931). Г. Ф. Кангро

10151. Сходимость в пространствах последовательностей. Грин (Convergence in sequence spaces. Green H. F.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1958, **11**, № 83—85 (англ.)

В совершенных пространствах последовательностей (РЖМат, 1953, 1255) изучается связь между различными видами сходимости: проективной, строго проективной и сходимостью по метрике. Доказывается, что если норма в рассматриваемом пространстве α определена так, что проективная сходимость совпадает со сходимостью по метрике (причем эти две сходимости могут приводить в одном и том же случае к различным пределам), то α есть пространство Кёте — Банаха, т. е. в α сходимость по метрике и соответствующий предел совпадают со строгой проективной сходимостью и соответствующим пределом. С. Н. Крачковский

10152. Об асимптотическом поведении решений систем линейных уравнений. Евграфов М. А., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 3, 407—410

Рассматриваются системы вида

$$A\bar{Y} = \bar{F}, \qquad (1)$$

$$A = (a_{ij})^{\infty}, \quad \bar{Y} = \{y_1, y_2, \ldots,\}, \quad \bar{F} = \{f_1, f_2, \ldots\}.$$

Пусть имеется последовательность функций $P_n(z)$

$$P_n(z) = \sum_{m=-n+1}^{\infty} a_m^{(n)} z^n, \quad 0 < |z| < d_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1. Существуют две последовательности ρ_n и R_n, $\rho_n < R_n$, такие, что:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{|z|=1} \left|\frac{P_{n+1}\left(\frac{z}{R_{n+1}}\right)}{P_n\left(\frac{z}{R_n}\right)}\right| = \lim_{n\to\infty} \max_{|z|=1} \left|\frac{P_{n+1}\left(\frac{z}{\rho_{n+1}}\right)}{P_n\left(\frac{z}{\rho_n}\right)}\right| = 1.$$

2. Существует такое r_n, $\rho_n < r_n < R_n$, что $P_n(z) \neq 0$ при $|z| = r_n$ и

$$\underset{|z|=r_n}{\text{ИЗМ}} \arg P_n(z) = 0.$$

3. При достаточно больших n функция $P_n(z)$ имеет в кольце $r_n \leqslant |z| \leqslant R_n$ ровно k_1 нулей $\lambda_{-1}^{(n)}, \ldots, \lambda_{-k_1}^{(n)}$ и в кольце $\rho_n \leqslant |z| \leqslant r_n$ ровно k_2 нулей $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{k_2}^{(n)}$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

4. Положим $P_{n,m}(z) = \dfrac{P_n(z)}{z - \lambda_m^{(n)}}$. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1,i}\left(\lambda_i^{(n)}\right)}{P_{n+1,i}\left(\lambda_i^{(n+1)}\right)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{ij}(n+1) - \beta_{ij}(n)| < \infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_{ij}(n)| < \infty, \quad i \neq j;$$

$$\beta_{ij}(n) = \frac{P_{n+1,j}\left(\lambda_j^{(n)}\right)}{\lambda_j^{(n)} P_{n+1,j}\left(\lambda_j^{(n)}\right)}, \quad \gamma_{ij}(n) = \lambda_j(n)\,\beta_{ij}(n)\,\beta_{ji}(n).$$

Обозначим через A матрицу $A = (\alpha_{ij})_1^{\infty}$, $\alpha_{ij} = a_{i-j}^{(i)}$, а через $\overline{Y}$ — решение системы (1), причем $f_n = 0$, $n > n_1$. Относительно системы (1) предполагается, кроме того, что она имеет решение при любой правой части указанного вида. Тогда имеет место

Теорема. Пусть $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Любое решение системы (1), удовлетворяющее условию

$$y_n = O\left((1-\varepsilon)^n R_1 \ldots R_n\right),$$

имеет вид

$$y_n = C_{-1} y_{-1,n} + \ldots + C_{-k_1} y_{-k_1,n} + b_1 y_{1,n} + \ldots + b_{k_2} y_{k_2,n} + O\left((1+\varepsilon)^n \rho_1 \ldots \rho_n\right),$$

где $C_{-1}, \ldots, C_{-k}$ — произвольные постоянные; $b_1, \ldots, b_{k_2}$ — постоянные, определяемые через F;

$$y_{m,n} \sim \mu_m^{(1)} \ldots \mu_m^{(n)}; \quad \mu_m^{(n)} = \lambda_m^{(n)} \frac{P_{n+1,m}\left(\lambda_m^{(n)}\right)}{P_{n+1,m}\left(\lambda_m^{n+1}\right)}.$$

Приведен также континуальный аналог этой теоремы для интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^{\infty} K(x, x-t)\, y(t)\, dt = f(x), \quad x \geqslant 0.$$

М. В. Федорюк

10153. О вполне ограниченных подмножествах в пространствах последовательностей. Мак-Артур (On totally bounded subsets of sequence spaces. McArthur Charles W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 6, 881—885 (англ.)

Известный критерий компактности подмножеств в банаховых пространствах с базисом (Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М., 1951, стр. 225) обобщается на случай некоторых банаховых пространств, состоящих из последовательностей элементов вещественного банахова пространства.

А. С. Маркус

10154. Проблема гомеоморфизма сепарабельных бесконечномерных банаховых пространств. Зингер (Problema omeomorfismului spațiilor Banach separabile infinit-dimensionale. Singer I.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1958, **12**, № 4, 5—24 (рум.)

Обзор основных результатов, полученных по пути решения проблемы о существовании гомеоморфизма между любыми сепарабельными бесконечномерными банаховыми пространствами, поставленной Банахом в его монографии „Théorie des opérations linéaires„ Warszawa, 1932. Излагаются результаты С. Н. Бернштейна (Bernstein S., C. r. Acad. sci., 1938, **206**, 1520—1523), перенесенные М. И. Кадецом на банаховы пространства и приведшие последнего (РЖМат, 1954, 2239; 1956, 3906; 1959, 7110) к положительному решению проблемы в следующих случаях: 1) если пространства удовлетворяют условию Бернштейна; 2) если пространства равномерно выпуклые; 3) если пространства рефлексивные. Установлен также гомеоморфизм между c и l^1. В заключение даются различные эквивалентные формулировки проблемы гомеоморфизма.

К. М. Фишман

10155. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 2, 188—191

Пусть $Q_0(f)$ — класс кусочно-непрерывных функций, заданных в (a, b), $A[f]$ — линейный функционал на $Q_0(f)$ (т. е. $A(f_1 + f_2) = A(f_1) + A(f_2)$ и $|A(f)| \leqslant M \sup |f|$) и

$$\eta_\xi(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } a < x < \xi, \\ 0 \text{ при } \xi \leqslant x < b; \end{cases}$$

$$\pi_\xi(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = \xi, \\ 0 \text{ при } x \neq \xi; \end{cases}$$

$$\alpha(\xi) = A[\eta_\xi(x)], \quad \sigma(\xi) = A[\pi_\xi(x)].$$

Через ζ_i обозначены точки, в которых $\sigma(\xi) \neq 0$; их не более, чем счетное множество (лемма 1). Через ξ_i обозначены точки, в которых $\overline{\alpha}(\xi_i - 0) \neq \overline{\alpha}(\xi_i)$ или $\overline{\alpha}(\xi_i) \neq \overline{\alpha}(\xi_i + 0)$, их также не более, чем счетное множество (лемма 3).

Теорема 1. Всякий линейный функционал $A[f]$, определенный в классе $Q_0(f)$, может быть представлен в виде

$$A[f] = \int_a^b f(x)\, d\overline{\overline{\alpha}}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \{f(\xi_i + 0)\,[\overline{\alpha}(\xi_i + 0) - \overline{\alpha}(\xi_i)] +$$

$$+ f(\xi_i - 0)\,[\overline{\alpha}(\xi_i) - \overline{\alpha}(\xi_i - 0)]\} + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\zeta_j) f(\zeta_j),$$

где $\overline{\alpha}(\xi) = \alpha(\xi) - \sum\limits_{\zeta_j < \xi} \sigma(\zeta_j)$

и $\overline{\overline{\alpha}}(\xi) = \overline{\alpha}(\xi - 0) - \sum\limits_{\xi_i < \xi} [\overline{\alpha}(\xi_i + 0) - \overline{\alpha}(\xi_i - 0)]$.

Это представление линейных функционалов сохраняется и в классе функций кусочно-непрерывных в (a, b) вместе со своими производными до m-го порядка ($m > 0$) включительно.

Нуль-функционалом называется линейный функционал

$$\Gamma(f) = \sum_{j=1}^{\infty} [\omega_j^{(0)} f(\xi_j) + \omega_j^{(1)} f(\xi_j - 0) + \omega_j^{(2)} f(\xi_j + 0)],$$

где $\omega_j^{(0)} + \omega_j^{(1)} + \omega_j^{(2)} = 0.$

В классе $C_0(f)$ непрерывных на (a, b) функций нуль-функционал всегда равен нулю.

Теорема 2. Разность двух линейных функционалов, совпадающих в $C_0(f)$, является на $Q_0(f)$ нуль-функционалом.

Дан признак неотрицательности $A[f]$. И. А. Егорова

10156. Замечание к одной теореме о коммутативных банаховых алгебрах. Кундт (Bemerkung zu einem Satz über kommutative Banach-Algebren. Kundt Wolfgang), Arch. Math., 1958, **9**, № 6, 436—438 (нем.)

Доказано следующее предложение, являющееся обращением теоремы §25 F книги Лумиса (РЖМат, 1955, 353). Пусть A — комплексная коммутативная банахова алгебра, F — замкнутое множество ее пространства Δ максимальных идеалов; множество J всех $x \in A$ таких, что $h(x) \supset F$ и пересечение F с границей $h(x)$ не содержит непус ого совершенного множества в Δ, есть идеал ($h(x)$ — совокупность всех максимальных идеалов, содержащих элемент x, граница понимается в смысле Г. Е. Шилова.). Б. С. Митягин

10157. О полном пространстве X и $T(X)$. Исивата (On a completely space X and $T(X)$. Isiwata Takeshi), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, **1956**, **A5**, 25 Nov., 227—236 (англ.)

Пусть X — вполне регулярное T_1-пространство, $B(X)$ — банахова алгебра всех ограниченных непрерывных вещественных функций, определенных на X. Подалгебра B_1 алгебры $B(X)$ называется sp — подалгеброй, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$) существует функция $f_1 \in B_1$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Пусть G — разбиение пространства X на непересекающиеся замкнутые множества; говорят, что G полунепрерывно сверху, если для любого $g \in G$ и любой его окрестности U существует такая его окрестность V, что всякое $h \in G$, пересекающее V, содержится в U. Пусть X есть плотное подмножество компактного пространства Y; тогда полунепрерывное сверху разбиение G пространства Y называют X-разбиением, если всякое $g \in G$ содержит по крайней мере одну точку из X. Устанавливаются соотношения между семейством sp — подалгебр алгебры $B(X)$, множеством X-разложений чеховской компактификации $\beta(X)$ пространства X и семейством $T(X)$ топологий, мажорируемых первоначальной топологией в X. Доказывается, что если X — локально компактно, то мощность множества $T_0(X)$ минимальных топологий в X (топология $s \in T(X)$ называется минимальной, если $t < s$ ($t \in T(X)$) влечет $t = s$) больше мощности множества X; первоначальная топология в X является тогда объединением двух минимальных топологий. Далее некоторые свойства локально компактных пространств обобщаются на произвольные вполне регулярные T_1-пространства; пространства с единственной структурой (или конечным числом структур) характеризуются с помощью семейства $T(X)$; рассматриваются условия, при которых $T(X)$ определяет X.

С. Н. Крачковский

10158. Структуры равномерного пространства X и $C(X)$. Исивата (Structures of a uniform space X and $C(X)$. Isiwata Takesi), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1956, **A5**, 25 May, 174—184 (англ.)

Пусть X — вполне регулярное T_1-пространство, $B(X)$ — банахова алгебра вещественных ограниченных непрерывных функций на X (с обычным определением сложения и умножения и с супремальной нормой).

Доказывается, что семейство классов эквивалентности тотально ограниченных структур пространства X находится во взаимно однозначном соответствии с семейством замкнутых аналитических вполне регулярных подалгебр алгебры $B(X)$ и что всякая такая подалгебра эквивалентна банаховой алгебре $C(Y)$ всех непрерывных функций, определенных на некотором компактном пространстве Y (которое является непрерывным образом чеховской компактификации $\beta(X)$ пространства X и содержит плотное подмножество, гомеоморфное X). Как следствия отсюда устанавливаются (в терминах алгебры $B(X)$) необходимые и достаточные условия того, чтобы X имело единственную структуру (т. е., чтобы $\beta(X) = X \cup a$, и в более общем случае, чтобы $\beta(X) = X \cup a_1 \cup \ldots \cup a_n$) и того, чтобы нормальное пространство X было счетно-компактным.

Доказывается, что если B_1 — замкнутая подалгебра алгебры $B(X)$, то существует компактное пространство Y (непрерывный образ $\beta(X)$) такое, что B_1 эквивалентна либо $C(Y)$, либо $C_\infty(Y)$ ($C_\infty(Y)$ означает банахову алгебру всех вещественных непрерывных функций на Y, обращающихся в нуль в одной и той же точке $p_\infty \in Y$); в случае, когда X — топологическая группа, примененный метод позволяет доказать (без привлечения C^*-алгебры) эквивалентность множества вещественных левых почти периодических функций на X алгебре $C(Y)$, где Y — компактная группа (непрерывный образ $\beta(X)$).

Пусть μ_f — структура, порожденная в X линейным пространством $C(X)$, наделенным слабой топологией; доказывается, что семейство классов эквивалентности структуры μ, мажорируемой μ_f, находится во взаимно однозначном соответствии с семейством особого типа замкнутых линейных подпространств пространства $C(X)$. Наконец, доказывается, что если связное метрическое пространство X_ρ не ограничено тотально, то $C(X_\rho)$ не является кольцом. С. Н. Крачковский

10159. О положительно определенных интегральных ядрах и соответствующей квадратичной форме. Човер, Фелдман (On positive-definite integral kernels and a related quadratic form. Chover J., Feldman J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **89**, № 1, 92—99 (англ.)

Рассматривается комплексное банахово пространство $C = C(a, b)$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций и сопряженное пространство $B = C^*$, как пространство радоновых мер $\mu(t)$ на $[a, b]$ с нормой $\|\mu\| = \operatorname{var}_{a \leqslant t \leqslant b} \mu(t)$. Пусть $\rho(s, t)$ — непрерывная комплексная функция ($a \leqslant s, t \leqslant b$), положительно определенная в том смысле, что $\iint \rho(s, t)\, d\mu(s)\, \overline{d\mu}(t) > 0$ для всех ненулевых μ из B (все интегралы берутся от a до b). $R\mu(t) = \int \rho(t, s)\, d\mu(s)$ есть непрерывный оператор, действующий из B в C. Пусть $H = L_2(a, b)$, а S — сужение оператора R на те меры $\mu = m$, для которых $dm = h(s)\, ds$, $h \in H$. S является, очевидно, вполне непрерывным положительно определенным оператором в H. Через λ_n ($n = 1, 2, \ldots$) обозначим собственные значения S (с учетом их кратности), а через $\varphi_n(t)$ — соответствующие собственные функции:

$$\lambda_n \varphi_n(t) = \int \rho(t, s)\, \varphi_n(s)\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $f(t) \in C$. Через σ обозначим конечную совокупность $n(\sigma)$ точек $t_1^\sigma < t_2^\sigma < \ldots < t_{n(\sigma)}^\sigma$ из $[a, b]$, определим числа $a_j^\sigma = a_j^\sigma(f)$ ($j = 1, 2, \ldots, n(\sigma)$) из равенств

$$f(t_k^\sigma) = \sum_{j=1}^{n(\sigma)} \rho(t_k^\sigma, t_j^\sigma)\, a_j^\sigma \quad (k = 1, 2, \ldots, n(\sigma))$$

и образуем выражение

$$\mu^\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n(\sigma)} f(t_j^\sigma)\, \overline{a_j^\sigma} = \sum_{j,k=1}^{n(\sigma)} \rho(t_j^\sigma, t_k^\sigma)\, a_k^\sigma \overline{a_j^\sigma} \geqslant 0.$$

Обозначим $\mu(f) = \sup_{\sigma} \mu^{\sigma}(f)$ ($\leqslant \infty$). В работе характеризуется множество функций f, для которых $\mu(f) < \infty$, а также исследуется область значений оператора R.

Основные результаты. $\mu(f) < \infty$ в том и только том случае, когда $f = S^{1/2} g$ для некоторого $g \in H$; при этом $\mu(f) = \| g \|^2$ (теорема 1).

Пусть $\mu \in B$. Обозначим $\gamma_n = (\lambda_n)^{1/2} \int \overline{\varphi_n}(s)\, d\mu(s)$ ($n = 1, 2, \ldots$) и определим оператор $R^{1/2}$ равенством $R^{1/2}\mu = \sum_n \gamma_n \varphi_n$. Через B_0 обозначим единичную сферу в B. Тогда $R^{1/2}$ переводит каждую последовательность, слабо сходящуюся в B_0, в сильно сходящуюся в H. Для всех $h \in H$ и $\mu \in B$ имеет место равенство $(h, R^{1/2}\mu) = \int S^{1/2} h(s)\, d\overline{\mu}(s)$. Если $d\mu = g ds$, $g \in H$, то $S^{1/2} g = R^{1/2}\mu$. Наконец, $S^{1/2} R^{1/2} = R^{1/2} R^{1/2} = R$ (теорема 3).

Область значений R есть правильная часть области значений $S^{1/2}$ (теорема 4).

Указывается на связь с теорией стохастических процессов.

Примечание референта. Основные результаты реферируемой статьи содержатся в статье М. Г. Крейна (Матем. сб., 1937, 2(44), № 6, 1023—1072). И. С. Иохвидов

10160. О спектральных функциях оператора дифференцирования. Штраус А. В., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 6, 185—191

Работа посвящена описанию всех (ортогональных и неортогональных) спектральных функций оператора дифференцирования $Af = i\dfrac{df}{dx}$, где $f(\lambda)$ — абсолютно непрерывна на отрезке [0, 1], а ее производная принадлежит L^2 [0, 1], $f(0) = f(1) = 0$. Показывается, что любое расширение B_θ оператора A может быть записано в виде:

$$B_\theta g = i\frac{dg}{dx}, \text{ где } g'(x) \in L^2[0, 1] \text{ и } g(1) = \theta g(0),$$

а совокупность всех обобщенных резольвент оператора A задается в верхней полуплоскости формулой

$$R_\lambda = (B_{\theta(\lambda)} - \lambda E)^{-1},$$

где $\theta(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция, не превосходящая единицы по модулю. Если $y(x, \lambda) = R_\lambda f$ ($f \in L^2$ [0, 1], $\operatorname{Im}\lambda > 0$), то

$$iy' - \lambda y = f,$$
$$y(1) = \theta(\lambda)\, y(0).$$

Доказывается теорема:

Совокупность всех спектральных функций E_t ($-\infty < t < \infty$) оператора дифференцирования A определяется формулой

$$F_{\alpha,\beta} f = \int_\alpha^\beta d\rho(t) \int_0^1 e^{it(s-x)} f(s)\, ds, \text{ где}$$

$$E_{\alpha,\beta} = \frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2},$$

$$\rho(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int_0^t \operatorname{Im} M(\sigma + i\tau)\, d\sigma,$$

$$M(\lambda) = \frac{i}{2} \frac{i + e^{i\lambda}\theta(\lambda)}{1 - e^{i\lambda}\theta(\lambda)}.$$

Спектральная функция E_t является ортогональной тогда и только тогда, когда $\theta(\lambda) \equiv (c|c| = 1)$.

Отдельно рассматривается случай, когда $\theta(\lambda)$ является мероморфной функцией, не превосходящей по модулю единицы в верхней полуплоскости и равной по модулю единице на вещественной оси. Л. А. Сахнович

10161. Характеристические матрицы-функции линейных операторов. Бродский М. С., Матем. сб., 1956, 39, № 2, 179—200

Рассматривается линейный ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, с вполне непрерывной мнимой частью $\dfrac{A - A^*}{2i}$. Пусть $H \supseteq \mathfrak{E} \supseteq \dfrac{A - A^*}{i} H$; $\{e_\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, r \leqslant \infty$) — ортонормированный базис собственных элементов оператора $\dfrac{A - A^*}{i}$ в $\mathfrak{E}$, $\{\omega_\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, r \leqslant \infty$) — соответствующие им собственные значения; Ω — диагональная матрица из элементов $\{\omega_\alpha\}$; J — диагональная матрица из элементов ± 1; Π — вполне непрерывная матрица, для которой из $\Pi\xi = 0$ следует $\xi = 0$, причем $\Pi^* J \Pi = \Omega$. Матрица-функция $W(\lambda) = I - i\Pi \| ((A - \lambda E)^{-1} e_\alpha, e_\beta) \| \Pi^* J$, зависящая от комплексного параметра λ, называется характеристической для оператора A. Устанавливаются 4 свойства, необходимые и достаточные для того, чтобы заданная матрица-функция $W(\lambda)$ была характеристической матрицей-функцией для некоторого оператора A. Пусть H_E — замкнутая линейная оболочка элементов $A^n e_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, r \leqslant \infty$; $n = 0, 1, 2, \ldots$); $H'_E = H \ominus H_E$; A_E — оператор, порожденный оператором A_B в H_E (H_E приводит A).

Теорема 2: Если операторы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ действуют соответственно в пространствах $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ и их характеристические матрицы-функции $W^{(1)}(\lambda)$ и $W^{(2)}(\lambda)$ совпадают, то $A^{(1)}_{E^{(1)}}$ и $A^{(2)}_{E^{(2)}}$ унитарно эквивалентны.

Теорема 3: Если $H_E = H$, то спектр оператора A совпадает с множеством особых точек матрицы-функции $W(\lambda)$. Пусть H_0 — подпространство H; P_0 — оператор проектирования на H_0; $A_0 f = P_0 A f$ ($f \in H_0$); E_0 — замыкание линейного многообразия $P_0\mathfrak{E}$; $\{e^{(0)}_\alpha\}$ и $\{\omega^{(0)}_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \ldots, r \leqslant \infty$) обозначают для оператора A_0 и подпространства E_0 то же, что $\{e_\alpha\}$ и $\{\omega_\alpha\}$ для A и $\mathfrak{E}$; $U_0 = \| (e_\alpha, e^{(0)}_\beta) \|$, $\Pi_0 = \Pi U_0$. Матрица-функция $\operatorname{Пр}_{H_0} W(\lambda) = I - i\Pi_0 \| ((A_0 - \lambda E)^{-1} e^{(0)}_\alpha, e^{(0)}_\beta) \| \Pi_0^* J$ является характеристической для оператора A_0 и называется проекцией матрицы-функции $W(\lambda)$ на подпространство H_0.

Теорема 4: Если H_1 — инвариантное подпространство оператора A, $H_2 = H \ominus H_1$, то $W(\lambda) = \operatorname{Пр}_{H_2} W(\lambda) \operatorname{Пр}_{H_1} W(\lambda)$. Доказывается еще ряд свойств проекций характеристической матрицы-функции на подпространства пространства H. Полученные результаты применяются к частному случаю, когда оператор A действует в конечномерном пространстве. Д. Ф. Харазов

10162. Приведение одного несамосопряженного оператора с непрерывным спектром к диагональному виду. Сахнович Л. А., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 4, 193—196

Пусть A, B — операторы в $L_2(0, l)$, определенные формулами:

$$Af = f(x) + i\int_0^x f(t)\,dt,\ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$Bf = \frac{1}{\Gamma(i+1)}\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,(t-x)^i\,dx,\ 0 \leqslant t \leqslant l.$$

Доказывается следующая

Теорема. 1. Оператор B ограничен. 2. Оператор B имеет ограниченный обратный, определяемый формулой:

$$B^{-1}f = \frac{1}{\Gamma(-i+1)}\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,(t-x)^{-i}\,dx.$$

3. Оператор B приводит оператор A к диагональному виду, т. е. имеет место равенство

$$BAB^{-1} = Q, \text{ где } Qf = xf(x)\ 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Для доказательства ограниченности оператора используется преобразование Меллина

$$MF(x) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s)\,x^{-s}ds,\ 0 \leqslant x \leqslant \infty.$$

Эта теорема применяется к доказательству среднеквадратичной устойчивости решения уравнения

$$i\frac{\partial l(x,t)}{\partial t} = xf(x,t) + i\int_0^x f(s,t)\,ds$$

$$0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant x \text{ при } t \to \infty.$$

Изучение оператора A связано с тем, что согласно результатам М. С. Лившица (РЖМат, 1954, 5660) всякий оператор T, для которого $\frac{T-T^*}{2i}$ — ограниченный одномерный оператор, с помощью унитарного преобразования приводится к виду:

$$UTU^{-1}f = \alpha(x)\,f(x) + i\varepsilon\int_0^x f(t)\,dt.$$

Д. Е. Аллахвердиев

10163. Теория несамосопряженных операторов и ее применения. Лившиц М. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **3.** М., АН СССР, 1958, 269—276

Обзорный доклад, посвященный работам, выполненным группой одесских математиков (автором и его сотрудниками) в 1950—1955 гг. и связанным с понятием характеристической матрицы-функции, а также их применениям к теории ядерных реакций.

Автором и М. С. Бродским опубликована новая обзорная статья (РЖМат, 1959, 580), содержащая развернутое изложение упомянутых и более поздних работ на ту же тему (см. также РЖМат, 1959, 2888). И. С. Иохвидов

10164. Замечание о кросснорме в прямом произведении алгебр операторов. Такэсаки (A note on the cross—norm of the direct product of operator algebra. Takesaki Masamichi), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 3, 137—140 (англ.)

Пусть M_1 и M_2 — C^*-алгебры, M — их алгебраическое прямое произведение; Ω_1, Ω_2 и Ω — пространства неразложимых положительных функционалов на M_1, M_2 и M соответственно. На M определяются две кросснормы α и λ, вообще говоря, несовпадающие. Показана эквивалентность следующих условий: 1) M_1 или M_2 коммутативна; 2) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$; 3) нормы α и λ совпадают.

Б. С. Митягин

10165. Кольца линейных неограниченных операторов с разложением единицы и их представления. Лянце В. Э., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 5, 801—804

Разложением единицы гильбертова пространства H называется семейство $P = \{P(\Delta)\}$ линейных ограниченных операторов $P(\Delta)$, $\Delta \in B$ (B — борелево тело подмножеств комплексной плоскости Z), удовлетворяющее условиям: I) $P(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P(\Delta_1)\,P(\Delta_2)$; II) $P(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2)$, если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \Lambda$ (Λ — пустое множество); III) $P(\Lambda) = 0$, $P(Z) = I$ (I — единичный оператор); IV) $\| P(\Delta) \| \leqslant K < \infty$; V) $P(\Delta)$ — счетно-аддитивная функция от Δ в смысле сильной сходимости операторов.

Класс $C = \{\Delta\}$ ограниченных множеств $\Delta \in B$ называется P-допустимым, если VI) C содержит объединение любых своих элементов; VII) C содержит любое борелевское подмножество любого своего элемента; VIII) C содержит некоторую возрастающую последовательность

$\{\Delta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n) = I$.

Замкнутый оператор A из H в H с плотной областью определения $D(A)$ называется C-перестановочным с $P = \{P(\Delta)\}$, если существует такой P-допустимый класс C, что IX) $P(\Delta)H \subset D(A)$ для любого $\Delta \in C$; X) $P(\Delta)\,D(A) \subset D(A)$ для любого $\Delta \in B$; XI) $P(\Delta)Ax = AP(\Delta)\,x$ для любого $x \in D(A)$ и $\Delta \in B$.

Разложение единицы $P = \{P(\Delta)\}$ называется конечнократным, если существует подпространство $G \subset H$ конечной размерности такое, что линейная оболочка векторов вида $P(\Delta)\,x$, $x \in G$, $\Delta \in B$, плотна в H.

Формулируются (без доказательств) следующие результаты:

Совокупность $\mathfrak{A}(P)$ всех линейных операторов гильбертова пространства H, перестановочных в определенном выше смысле с разложением единицы P, образует кольцо относительно естественным образом определяемых сложения и умножения операторов. Кольцо $\mathfrak{A}(P)$ замкнуто относительно „равномерного“, а также сильного предельного перехода. Если разложение единицы P имеет конечную кратность, то каждый оператор $A \in \mathfrak{A}(P)$ изоморфен оператору умножения на функциональную матрицу в некотором пространстве $\mathfrak{L}^2_\sigma$ векторных функций, интегрируемых в квадрате относительно матричной функции распределения σ. Обобщается понятие „спектральности“ неограниченного оператора, а также формулируется теорема, дающая каноническую форму спектрального оператора $A \in \mathfrak{A}(P)$.

М. Гриндлингер, Е. И. Пятницкая

10166. О прямом произведении W^*-факторов. Такэсаки (On the direct product of W^*-factors. Takesaki Masamichi), Tohoku Math. J., 1958, **10**, № 1, 116—119 (англ.)

W^*-фактор M изоморфен прямому произведению двух своих подфакторов M_1 и M_2 тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия: 1) M_1 и M_2 взаимно коммутируют; 2) M_1 и M_2 порождают M; 3) существует σ-слабонепрерывная проекция M на M_1 (или на M_2) с единичной нормой. Получается, что фактор типа II_1 не может быть нормальным; этот факт впервые и по другому был доказан Фугледом и Р. Кейдисоном (B. Fuglede, R. Kadison, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1951, **37**, 420—425). Б. С. Митягин

10167. О фактор-представлениях разрешимой группы Ли типа (E). Такэноути (Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E). Takenouchi Osamu), Math. J. Okayama Univ., 1957, **7**, № 2, 151—161 (франц.)

Разрешимая группа Ли G называется группой типа (E), если любой элемент $g \in G$ может быть представлен в виде $g = \exp X$, где X принадлежит алгебре Ли груп-

пы G. Унитарное представление $g \to U_g$ группы G называется фактор-представлением, если кольцо операторов, порожденное операторами U_g, является фактором. В работе доказано, что каждая разрешимая группа Ли типа (E) (в частности, каждая связная нильпотентная группа) имеет фактор-представления только класса I. Каждое неприводимое представление такой группы может быть получено из характера аддитивной группы вещественных чисел последовательным применением следующих конструкций:

1) построение по данному неприводимому представлению подгруппы индуцированного представления группы;

2) естественный переход от представления фактор-группы к представлению группы.

Доказательства существенно опираются на работы Макки по индуцированным представлениям (Mackey G.W., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1949, 35, № 9, 537—544; Ann. Math., 1952, 55, № 1, 101—139).

Автор отмечает, что, как ему сообщил Диксмье, все алгебраические группы Ли также обладают только фактор-представлениями класса I. (См. также РЖМат, 1959, 4481). Г. И. Кац

10168. Полугруппы линейных операторов в n-мерном векторном пространстве. Курепа (Semigroups of linear transformations in n-dimensional vector space. Kurepa Svetozar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, **13**, № 1, 3—32 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Пусть C_+ — совокупность всех вещественных чисел $t \geqslant 0$, G_+ — совокупность всех двоично-рациональных чисел $r \geqslant 0$. Изучаются свойства полугрупп $\Phi(t)$ $(t \in C_+)$ и $\Phi(r)$ $(r \in G_+)$.

Основные результаты:

Теорема 4. Пусть $\Phi(t)$ — полугруппа линейных операторов в n-мерном пространстве R, причем $\Phi(t)f = 0$ лишь для $f = 0$. Если $\Phi(t)$ — непрерывная функция от t на совершенном множестве T, обладающем свойством $m(T + T) > 0$, то $\Phi(t) = \exp(t\Phi)$, где Φ — линейный оператор, однозначно определяемый полугруппой.

Теорема 5. Пусть $\Phi(t)$ — полугруппа линейных операторов в R, причем $\Phi(t)f = 0$ лишь для $f = 0$. Если существует множество $T \subset [0, \infty)$ такое, что:

а) $m_i(T + T) > 0$ (m_i — внутренняя мера Лебега; в) элементы матрицы $\Phi(t)$ ограничены равномерно по t, то существуют:

1) матрица $\overline{A}$; 2) полугруппа диагональных унитарных матриц $\overline{U}(t)$; 3) базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$ такие, что для всех $t \in C_+$

$$\overline{\Phi}(t) = \overline{U}(t) \exp(\overline{tA}) = \exp(\overline{tA})\,\overline{U}(t),$$

где $\overline{\Phi}(t)$ — матрица, соответствующая оператору $\Phi(t)$ в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Аналогичные результаты получены в статье для полугруппы $\Phi(r)$, а также для m-параметрических полугрупп. М. З. Соломяк

10169. О непрерывности полугрупп нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Курепа (On the continuity of semigroups of normal transformations in Hilbert space. Kurepa Svetozar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, **13**, № 2, 81—87 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Найдены условия, обеспечивающие сильную непрерывность полугруппы при возможно более слабых ограничениях на эту полугруппу.

Теорема 1. Пусть $N(t)$ $(t \in C_+ = [0, \infty))$ — полугруппа нормальных операторов в гильбертовом пространстве R; пусть для любого t $N(t)f = 0$ влечет $f = 0$, и пусть $T \subset C_+$ — ограниченное замкнутое множество такое, что $m(T + T) > 0$. Тогда, если полугруппа $N(t)$ слабо непрерывна на T, то она сильно непрерывна на C_+.

В случае сепарабельности R получен следующий результат: если $N(t)$ слабо измерима на C_+, то она сильно непрерывна на C_+.

В теореме 2 эти результаты распространяются на h-параметрические полугруппы.

Аналогичному вопросу для групп посвящена

Теорема 3. Пусть $\Phi(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ — группа линейных операторов в R, причем $\Phi(0) = E$. Если $\Phi(t)$ сильно непрерывна на всюду плотном множестве T таком, что $m(T + T) > 0$, то $\Phi(t)$ сильно непрерывна при всех t. М. З. Соломяк

10170. Функциональное уравнение косинуса в n-мерном векторном пространстве. Курепа (A cosine functional equation in n-dimensional vector space. Kurepa Svetozar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, **13**, № 3, 169—189 (англ., рез. сербо-хорв.)

Исследуется функциональное уравнение

$$\Phi(s + t) + \Phi(t - s) = 2\Phi(s)\,\Phi(t), \qquad (1)$$

где $\Phi(s)$ — линейный оператор в n-мерном векторном пространстве R, область изменения параметра s — либо множество G всех двоично-рациональных вещественных чисел, либо вся вещественная ось.

В числовом случае любое непрерывное решение уравнения (1) имеет один из видов $\Phi(s) \equiv 0$; $\Phi(s) = \cos as$; $\Phi(s) = \operatorname{ch} as$.

Теорема 1. Пусть каждому $r \in G$ сопоставлен линейный оператор $\Phi(r)$, удовлетворяющий, как функция параметра r, уравнению (1).

Если $\Phi(2^{-k}) \to E$, когда $k \to \infty$, и если 1 является собственным числом оператора $\Phi(2^{-k})$ не более, чем для конечного числа значений k, то существует такой линейный оператор Φ, что

$$\Phi(r) = \cos r\Phi = \frac{1}{2}\left[\exp(ir\Phi) + \exp(-ir\Phi)\right]$$

для всех $r \in G$. Оператор Φ однозначно определяется функцией $\Phi(r)$.

Аналогия с числовым случаем теряется, если 1 является собственным числом оператора $\Phi(2^{-k})$ для бесконечного множества значений k. Если к тому же оператор $\Phi(1)$ не является вполне приводимым, то, как доказано в статье, функция $\Phi(r)$ определяется условием (1) однозначно. В этом случае не существует операторной функции $F(r)$, удовлетворяющей уравнению $F(r + r') = F(r)\,F(r')$ и такой, что

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\left[F(r) + F(-r)\right].$$

Для случая, когда область изменения параметра — вся вещественная ось, получен следующий результат.

Теорема 5. Если операторная функция $\Phi(s)$, удовлетворяющая уравнению (1), равномерно ограничена на всей оси, то в R существует такой базис, в котором

$$\Phi(s) = \cos A(s),$$

где $A(s)$ — вещественная диагональная матрица. Если $\Phi(s)$ непрерывна, то $A(s) = A \cdot s$, где A — постоянная матрица. М. З. Соломяк

10171. О топологических методах нелинейного анализа. Красносельский М. А., Люстерник Л. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 3, М., АН СССР, 1958, 373—383

Обзорный доклад о топологических и некоторых других методах исследования нелинейных уравнений в функциональных пространствах. Рассмотрены вопросы о существовании и продолжаемости решений, о точках ветв-

ления и устойчивости решений. Авторы ставят вопрос о возможности создания методов исследования нелинейных уравнений с не вполне непрерывными операторами и высказывают свои соображения по этому поводу. При этом они не касаются тех работ, в которых применялись некоторые методы для исследования таких уравнений (см., например, РЖМат, 1956, 8888К, РЖМат, 1956, 3917). Ставятся и другие вопросы. М. М. Вайнберг

10172. Непрерывные преобразования открытых множеств в локально выпуклых пространствах. **Альтман** (Continuous transformations of open sets in locally convex spaces. Altman M.), Bull. Acad., polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 5, 297—301, XXIII (англ.; рез. русск.)

Пусть X — локально выпуклое пространство и $V(x)=x\oplus V$ — окрестность точки x, где V — открытая выпуклая и симметричная окрестность нуля в X, а $x\oplus V$ — множество вида $x+y$ для фиксированного x и любого $y\in V$. Пусть $\overline{V}$ — замыкание V и $\partial V=\overline{V}-V$. Преобразование f из $\overline{V}(x)$ в X названо ∂-преобразованием, если для всякого $z\in\overline{V}(x)$ преобразование $f(\overline{V}(x)\cap(z\oplus\oplus\partial V))$ не содержит $f(z)$. Пусть G — открытое множество в X и F — вполне непрерывное преобразование G в X. Преобразование $f(x)=x-F(x)$ названо локальным ∂-преобразованием в G если для всякого x из G существует открытая выпуклая и симметричная окрестность U_x нуля такая, что: 1. Замыкание $x\oplus U_x$ содержится в G. 2. f является ∂-преобразованием на замыкании $x\oplus U_x$. 3. U_x не содержит всей прямой $\{t\times\times f(x)\}$, если $f(x)\neq 0$.

Теорема 1. Если $f(x)=x-F(x)$ — локальное ∂-преобразование на G, то $f(G)$ открыто в X. Установлены и другие теоремы об открытости $f(G)$.

М. М. Вайнберг

10173. Распространение на локально выпуклые пространства теоремы Борсука об антиподах. **Альтман** (An extension to locally convex spaces of Borsuk's theorem on antipodes. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 5, 293—295, XXII (англ.; рез. русск.)

Пусть U — открытая выпуклая и симметричная окрестность локально выпуклого пространства X и $f(x)=x-F(x)$ — функция, заданная на замыкании $\overline{U}$. Предполагается, что F — вполне непрерывное преобразование на $\overline{U}$, т. е. F непрерывно на $\overline{U}$ и преобразует $\overline{U}$ в компактное множество из X.

Теорема 1. Если $0\notin f(\overline{U}-U)$ и $f(x)=-f(-x)$ для всякого $x\in(\overline{U}-U)$, то степень отображения $d[f, U, 0]$ нечетна. (О степени отображения в локально выпуклых пространствах см. Nagumo M., Amer. J. Math., 1951, **73**, 497—511).

Теорема 2. Если $0\notin f(\overline{U}-U)$ и $f(x)\neq tf(-x)$ для всяких $t\in[0,1]$ и $x\in(\overline{U}-U)$, то $d[f, U, 0]$ нечетна. Каждая из этих теорем приводит к существованию неподвижной точки преобразования $F(x)$.

М. М. Вайнберг

10174. О структуре локальных гомеоморфизмов n-мерного евклидова пространства. II. **Штернберг** (On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space. II. Sternberg Shlomo), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 3, 623—631 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 8799.

Основные результаты:

Теорема 1. Пусть T — гомеоморфизм класса C^1 окрестности $U(0)$ начала координат 0 в E^n, $T(U)=U$, $T(0)=0$ и $s_1, \ldots, s_n$ — собственные числа якобиевой матрицы $I(T)$ в 0. Если $s_i\neq s_1^{m_1}\ldots s_n^{m_n}$ для всех натуральных m_j, $\sum m_j>1$, то существует преобразование координат класса C^λ, линеаризующее T в некоторой окрестности точки 0, причем $\lambda=\lambda(l)\to\infty$ вместе с l и $\lambda(\infty)=\infty$.

Теорема 2. Пусть

$$\frac{dx}{dt}=X(x), \qquad (1)$$

где $X\in C^\infty$, $X(0)=0$ и λ_j — собственные числа матрицы $\{\partial X_j/\partial x_k\}_0$. Если $\lambda_j\neq\sum m_j\lambda_j$, $\sum m_j>1$, то существует преобразование координат класса C^∞, линеаризующее (1).

Р. Э. Виноград

10175. Применение полуупорядоченных норм при приближенном решении нелинейных уравнений. **Балуев А. Н.**, Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 271, 18—27

Основной и модифицированный процессы Канторовича — Ньютона применяются для решения нелинейного уравнения

$$x(s)=\int_0^1 K(s,t,x(t))\,dt-f(s)$$

в пространстве ограниченных измеримых функций. Предполагается, что функция $K(s,t,x)$ дважды дифференцируема по x и что ядро $\frac{\partial}{\partial x}K(s,t,x_0(t))$, где $x_0(t)$ — начальное приближение, имеет резольвенту. Устанавливаются достаточные условия сходимости процессов Канторовича — Ньютона. Доказательство использует методы, разработанные Канторовичем (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, 1950). Рассмотрены примеры

М. М. Вайнберг

10176. О наилучшем приближении в нормированных векторных пространствах. II. **Хиршфельд** (On best approximations in normed vector spaces. II. Hirschfeld R. A.), Nieuw arch. wiskunde, 1958, **6**, № 3, 99—107 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 6023.

Через E обозначается комплексное линейное нормированное пространство размерности $\geqslant 3$, через A_G — оператор наилучшей аппроксимации, определяемый для всякого замкнутого подпространства $G\subset E$ при помощи равенства

$$\|x-A_Gx\|=\inf_{g\in G}\|x-g\|,\quad x\in E,\ A_Gx\in G.$$

Доказаны две теоремы.

Теорема 1. Если для любого двумерного G выполняется $\|A_Gx\|\leqslant\|x\|$, то E изоморфно и изометрично некоторому гильбертову пространству.

Теорема 2. Если E строго нормировано и для каждого одномерного подпространства $G\subset E$ выполняется условие

$$A_G(x+y)=A_Gx+A_Gy;\ x,y\in E,$$

то E эквивалентно гильбертову пространству.

Без доказательства эти теоремы были опубликованы автором ранее (РЖМат, 1959, 595).

В заключение формулируется еще одна проблема характеризации гильбертова пространства в терминах наилучшего приближения.

В. Н. Никольский

10177. Способ приближения высшего порядка для уравнений в банаховых пространствах. **Коллац** (Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen. Collatz L.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **2**, № 1, 66—75 (нем.)

Для решения уравнения $Tu=0$ в банаховом пространстве E рассматривается итерационный процесс

$$f_{n+1}=f_n-\Phi(T_n'^{-1}, T_n, T_n', T_n'', \ldots),$$

где $f_n\in E$, $T_n(k)$ — производная Фреше порядка k в точке f_n и Φ — некоторая заданная функция.

Предполагается существование обратного оператора $(T_n')^{-1}$ и выполнение неравенств

$$t_{n+1} \leqslant G(b_n, t_n)\, t_n^k,$$

$$\| \delta_n \| = \| f_{n+1} - f_n \| \leqslant H(b_n, t_n)\, t_n, \text{ где } b_n = \| T_n'^{-1} \|, \quad (1)$$

$t_n = \| T_n \|$, $k \geqslant 1$, G и H — монотонно неубывающие функции неотрицательных аргументов.

Теорема. Пусть, помимо условия (1), выполняются следующие условия.

1. Оператор T определен в некоторой выпуклой области F, причем в F $\frac{1}{2} \| T'' \| \leqslant M_2$.

2. Существует $\gamma > b_0$ такое, что $0 < \varphi_0 < 1 - \beta < 1$ и

$$\beta + \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0} \frac{\gamma^2}{(\gamma - b_0)\, b_0} \leqslant 1,$$

где $\sigma = H(\gamma, t_0)$, $\nu = G(\gamma, t_0)$, $\beta = \nu t_0^{k-1}$, $\varphi_0 = 2 b_0 M_2 \sigma t_0$.

3. Элементы f_0, f_1 и все элементы s из шара $\| s - f_1 \| \leqslant \frac{\sigma t_0^3}{1 - \beta^k}$ принадлежат F.

Тогда итерационный процесс сходится к решению u уравнения $Tu = 0$, причем

$$\| u - f_n \| \leqslant \frac{\sigma t_0 B_n}{1 - \beta^{k^n}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$B_n = \beta^{1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}} \text{ (для } n > 0;\ B_0 = 1).$$

Показано, что теорема охватывает обычный метод Ньютона и некоторые его видоизменения. Е. И. Линьков

10178. О свойствах операторов наилучшего приближения. Никольский В. Н., Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та, 1958, **26**, 143—146

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 6493) был установлен ряд условий, которые вместе взятые необходимы и достаточны для того, чтобы полиномиальные операторы в банаховом пространстве могли стать полиномами наилучшего приближения в некоторой эквивалентной метрике. В данной работе показано, что хотя упрощение последнего из этих условий и представляется естественным, оно все же недопустимо.

С. Н. Крачковский

10179. Итеративное решение квадратного уравнения в пространстве Банаха. Мак-Фарланд (An iterative solution of the quadratic equation in Banach space. McFarland J. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 824—830 (англ.)

Предлагается итеративный метод решения уравнения

$$Bxx + Ax = y \quad (1)$$

(где A — линейный, а B — билинейный операторы в пространстве Банаха X, $y \in X$), который является обобщением метода цепных дробей

$$F_{n+1} = (A + BF_n)^{-1} y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

F_0 — начальное приближение. Доказано, что если $(A + BF_n)^{-1}$ существует при всех n и $F_n \to x$, то x — решение уравнения (1). Достаточное условие существования $(A + BF_n)^{-1}$ при всех n и сходимости метода: существует A^{-1} и выполнены неравенства

$$0 < \| A^{-1} \| \cdot \| B \| \cdot \| A^{-1} y \| \leqslant \delta < \frac{1}{4}$$

$$1 - (1 - 4\delta)^{1/2} \leqslant 2 \| A^{-1} B F_0 \| < 1. \quad (2)$$

При выполнении этих условий имеет место оценка погрешности

$$\| x - F_n \| \leqslant \frac{\beta^n}{1 - \beta} \| (A + BF_0)^{-1} y - F_0 \|$$

$$\beta = \frac{\| A^{-1} B F_0 \|}{1 - \| A^{-1} B F_0 \|}.$$

Если условие (2) не выполнено, рекомендуется произвести замену переменной $x = u + v$, выбрав v так, чтобы для нового квадратного уравнения относительно u условие (2) уже выполнялось. И. К. Даугавет

10180. Об одном классе структурно-упорядоченных колец. Брейнерд (On a class of lattice-ordered rings. Brainerd Barron), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 673—683 (англ.)

F-кольцом называется такая векторная структура R, что: а) если последовательность $a_1, a_2, \ldots$ ограничена, то существует $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$; б) R есть коммутативное кольцо, с единицей $1 \geqslant 0$; в) $xy \geqslant 0$, если $x, y \in R$, $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$; г) $x = 0$, если $x \in R$ и $x \wedge 1 = 0$.

Кольцо R называется регулярным, если для любого $x \in R$ существует $x^0 \in R$ такой, что $xx^0x = x$.

F-кольцо называется действительным, если для любого его элемента $a \geqslant \varepsilon \cdot 1$ (действительное число $\varepsilon > 0$) существует обратный a^{-1}. Если F-кольцо регулярно, то оно действительно.

Идеал S F-кольца R называется замкнутым, если из $a_n \in S$, $n \geqslant 1$ $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in R$ следует $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in S$.

Подкольцо регулярного F-кольца R, образованное такими элементами $x \in R$, что $x \vee 0 + (-x) \vee 0 \leqslant \lambda \cdot 1$ для какого-то действительного числа λ, называется максимальным ограниченным подкольцом кольца R и обозначается $\bar{R}$. Для максимального идеала M кольца R через $\varnothing(M)$ обозначим максимальный идеал кольца R, содержащий $M \cap \bar{R}$. Соответствие между M и $\varnothing(M)$ есть взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами, а также между замкнутыми максимальными идеалами колец R и $\bar{R}$.

Максимальный идеал регулярного F-кольца R является действительным (т. е. фактор-кольцо $R - M$ изоморфно (как кольцо) полю действительных чисел) тогда и только тогда, когда $\varnothing(M) = M \cap \bar{R}$; если M замкнут, то M действителен.

Пусть $\mathfrak{L}$ есть вполне аддитивный класс подмножеств некоторого множества Φ. Действительная функция $f(\xi)$, определенная на Φ, называется $(\Phi, \mathfrak{L})$-измеримой, если для любого действительного λ

$$E(\xi;\ f(\xi) \leqslant \lambda) \in \mathfrak{L}.$$

Кольцо $A(\Phi, \mathfrak{L})$-измеримых функций называется σ-выпуклым, если функция $y(\xi)$, определенная на Φ, принадлежит A в случае, когда $y(\xi)$ $(\Phi, \mathfrak{L})$-измерима и существует такая функция $x(\xi) \in A$, что $0 \leqslant y(\xi) \leqslant x(\xi)$, для любого ξ. F-кольцо называется M-кольцом, если пересечение всех его действительных замкнутых максимальных идеалов есть нуль-элемент. Всякое σ-выпуклое кольцо $(\Phi, \mathfrak{L})$-измеримых функций есть действительное M-кольцо.

Для любого действительного M-кольца B через Ω обозначим множество всех действительных замкнутых максимальных идеалов кольца B, через I-булеву алгебру идемпотентов кольца B, а через $\mathfrak{A}$ — совокупность всех подмножеств из Ω, представимых в виде $E(M;\ e(M) = 1)$, где $e \in I$.

$\mathfrak{A}$ есть алгебра, изоморфная I.

F-кольца называются σ-изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие между ними, сохраняющее структурные и кольцевые операции. B σ-изоморфно некоторому σ-выпуклому кольцу $A(\Omega, \mathfrak{A})$-изме-

римых функций; если B регулярно, то A есть кольцо всех $(\Omega, \mathfrak{A})$-измеримых функций.

Регулярное F-кольцо R есть полуупорядоченное конечномерное векторное пространство, если выполняется одно из следующих условий: а) $R=\bar{R}$, б) все максимальные идеалы кольца R являются замкнутыми.

З. Л. Лейбензон

10181. Об одном классе структурно упорядоченных колец. II. Брейнерд (On a class of lattice-ordered rings. II. Brainerd Barron), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1957, **A60**, № 5, 541—547; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 541—547 (англ.)

Пусть I есть такая булева алгебра, что для любых $e_1, e_2, \ldots, \in I$ существует $\bigvee_{n=1}^{\infty} e_n \in I$. $\Omega(I)$ обозначает кольцо функций действительного аргумента λ со значениями $f(\lambda)\in I$ таких, что 1) $f(\mu)\geqslant f(\lambda)$, если $\mu\leqslant\lambda$; 2) $V_\lambda f(\lambda)=1$; 3) $\wedge_\lambda f(\lambda)=0$; 4) $V_{\mu>1} f(\mu)=f(\lambda)$.

Следующим образом определяются полуупорядоченность, сложение, умножение и умножение на число произвольных функций $f(\lambda)$, $g(\lambda)\in\Omega(I)$:

1) $f\leqslant g$ равносильно $f(\lambda)\leqslant g(\lambda)$ при $-\infty<\lambda<\infty$;

2) $(f+g)(\lambda)=\bigvee_{\mu}\wedge[f(\mu), g(\lambda-\mu)]$, где μ пробегает все рациональные числа;

3) $(\alpha f)(\lambda)=f\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ при $\alpha>0$; 4) $(-f)(\lambda)=1-\bigwedge_{n=1}^{\infty} f\left(-\lambda-\frac{1}{n}\right)$; 5) $0=0f=0(\lambda)=1$ при $\lambda<0$ и равно нулю при $\lambda\geqslant 0$; 6) при $f, g\geqslant 0$ $(fg)(\lambda)=1$ при $\lambda<0$ и равен $\bigvee_{\mu>0}\wedge\left[f(\mu), g\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right]$ при $\lambda\geqslant 0$, где μ пробегает рациональные числа; 7) при $f^+, f^-, g^+, g^-\geqslant 0 (f^+-f^-)\times(g^+-g^-)=f^+g^+-f^+g^--f^-g^++f^-g^-$ $\Omega(I)$ есть регулярное F-кольцо (реф. 10180).

Каждое F-кольцо R с алгеброй идемпотентов I может быть σ-изоморфно (см. предыдущий реферат) вложено в $\Omega(I)$. Если R регулярно, то оно σ-изоморфно $\Omega(I)$.

Пусть векторная структура B такова, что а) $\bigwedge_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a=0$, если $a\in B$ и $a\geqslant 0$; б) B есть регулярное коммутативное кольцо с единицей $1\geqslant 0$; в) $xy\geqslant 0$, если $x, y\in B$, $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$; г) $\bigwedge_{a\ni\Gamma} a\cdot b=0$, если $\Gamma\subseteq B$, $\bigwedge_{a\in\Gamma} a=0$ и $b\geqslant 0$.

Тогда каждый элемент $f\in B$ представим в виде спектрального интеграла в B.

З. Л. Лейбензон

10182. Об одной теореме Фёльнера. Райми (On a theorem of E. Følner. Raimi Ralph A.), Math. scand., 1958, **6**, № 1, 47—49 (англ.)

Содержание заметки примыкает к работам Фёльнера (РЖМат, 1959, 605 и 1957, 7167). Пусть G группа, L — некоторое линейное нормированное пространство ограниченных вещественных функций на G с нормой:

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|;\ x\in G\}$$

T_a — оператор правого сдвига, сопоставляющий функции $f(x)$ функцию $f(xa)$ $\mathfrak{T}=\{T_a, a\in G\}$.

Предположим, что L инвариантно относительно $\mathfrak{T}$ (из $f\in L$ и $T\in\mathfrak{T}$ следует $Tf\in L$) и структурно замкнуто (из $f\in L$, $g\in L$ следует $\sup\{f, g\}\in L$, где $[\sup\{f, g\}](x)=\sup(f(x), g(x)$.

Пусть N — линейная замкнутая оболочка функций, представимых в виде $Tf-f$.

Правым банаховым средним называется функционал $\varphi\in L^*$, не равный нулю и удовлетворяющий условиям:

а) $(\varphi, f)\geqslant 0$ при $f\geqslant 0$ (т. е. при $f(x)\geqslant 0$ для любого $x\in G$);

б) $(\varphi, f)=0$ при $f\in N$.

В случае, когда $u(x)\equiv 1$ принадлежит L (это, вообще говоря, не предполагается) $(\varphi, u)=1$ при естественной нормировке φ: $\|\varphi\|=1$ (это немедленно следует из а)). Тем самым φ обладает обычными свойствами среднего: $\inf_x f(x)\leqslant(\varphi, f)\leqslant\sup_x f(x)$.

Теорема Фёльнера. Если $L\neq N$, то в L существует банахово среднее. Доказательство отличается от данного Фёльнером и основывается на теореме о продолжении линейного функционала.

А. М. Вершик

10183. Замечания о мере Хара. Маруяма (Remarks on Haar measure. Maruyama Shigeya), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 2, 54—67 (англ.)

Пусть G — локально компактная топологическая группа и K, Z — замкнутые подгруппы, на которые распадается G, т. е. $G=KZ$, $K\cap Z=e$. Обозначим через dg, dk, dz левоинвариантную меру Хара соответственно G, K и Z. Известно, что $dg=\Delta(g)dg^{-1}$, $dz=\delta(z)dz^{-1}$, $dk=\delta'(k)dk^{-1}$, где $\Delta(g)$, $\delta(z)$, $\delta'(k)$ — непрерывные одномерные представления G, Z, K.

В работе доказаны два предложения о мере Хара, из которых, в частности, следует единственность этой меры.

I. Для каждой функции $f\in L^1(G)$

$$\int f(g)dg=\iint f(kz)\frac{\Delta(z)}{\delta(z)}dzdk=\iint f(zk)\frac{\Delta(k)}{\delta'(k)}dkdz,$$

если только меры dg, dk и dz надлежаще нормированы.

II. Пусть $d'g$ — мера на G с тем же полем измеримых множеств, что и для dg. Если $d'kg=d'g$ и $d'gz=\Delta(z)d'g$, то $d'g=Cdg$, где C — постоянная.

Б. М. Левитан

10184. Эквивалентность двух обобщений лебеговой меры. Силверман (The equivalence of two extensions of Lebesgue area. Silverman Edward), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 671—672 (англ.)

Если использовать определение площади треугольника в банаховом пространстве B, то можно распространить определение Лебега площади поверхности на случай поверхности X, расположенной в B, где X — непрерывное отображение плоской замкнутой односвязной жордановой области I в пространство B (Silverman E., Riv. Mat. Univ. Parma, 1951, **2**, 47—76); всем изометричным между собой отображениям I в m (пространство ограниченных числовых последовательностей) будет при этом соответствовать одно и то же значение площади. Так как для каждого непрерывного отображения X области I в метрическое пространство M существует изометричное с ним отображение x области I в m, то можно определить площадь X как площадь x. Таким образом (считая $M=B$), получается еще одно определение площади поверхности в банаховом пространстве. Устанавливается эквивалентность обоих определений и еще некоторые другие предложения.

С. Н. Крачковский

10185. Об итерации преобразований в некомпактных минимальных динамических системах. Браудер (On the iteration of transformations in noncompact minimal dynamical systems. Browder Felix E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 773—780 (англ.)

Пусть A — хаусдорфово пространство, φ — непрерывное отображение A в себя. В 1-й части работы трактуется вопрос о разрешимости функционального уравнения

$$g(a)=f(\varphi a)-f(a), \qquad (1)$$

где g — данная, f — искомая функции, определенные на A.

Теорема 1. Пусть отображение φ такое, что для любого $a \in A$ множество элементов $\{\varphi^n a\}$ $(n \geqslant 0)$ плотно в A; g — ограниченная непрерывная функция из A в n-мерное евклидово пространство R^n. Для того чтобы существовала ограниченная непрерывная функция f из A в R^n, удовлетворяющая уравнению (1) при всех $a \in A$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup_{a \in A;\ l > 0} \left| \sum_{k=0}^{l} g(\varphi^k a) \right| < \infty.$$

Теорема 2. Пусть A — пространство с вполне конечной мерой m, инвариантной относительно преобразования φ; g — числовая функция на A принадлежащая пространству $L^\infty(m)$. Для того чтобы существовала функция $f \in L^\infty(m)$, удовлетворяющая уравнению (1) при почти всех $a \in A$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\operatorname{ess\,sup}_{a \in A;\ l > 0} \left| \sum_{k=0}^{l} g(\varphi^k a) \right| < \infty.$$

Пусть A_1 — бэрово пространство (т. е. A_1 является множеством второй категории в себе), A_2 — хаусдорфово пространство; φ — гомеоморфизм A_1 на себя, удовлетворяющий тому же условию, что в теореме 1; ψ — непрерывное отображение $A_1 \times A_2$ в A_2. Рассматривается функция h из A_1 в A_2 такая, что

$$h(a_1) = \psi(a_1, h(a_1)) \quad (a_1 \in A_1). \qquad (2)$$

Во 2-й части работы изучается вопрос о том, насколько может отличаться от непрерывной функция, удовлетворяющая соотношению (2).

Функция h называется бэровой, если существует множество S_1 первой категории в A_1 такое, что на $A_1 \setminus S_1$ h непрерывна.

Семейство H гомеоморфизмов A_2 на себя называется универсально-транзитивным, если для каждой пары различных точек a_2, $a_2' \in A_2$ существует гомеоморфизм $\zeta \in H$ такой, что $\zeta a_2 = a_2'$.

Теорема 3. Пусть h — функция Бэра из $A_1 b_1 A_2$, удовлетворяющая уравнению (2) вне множества $S_1 \in A_1$ первой категории. Предполагается, что A_2 компактно и что существует универсально-транзитивное семейство коммутирующих с ψ гомеоморфизмов A_2, ни один из которых не имеет неподвижной точки. Тогда, меняя значения функции h на множестве первой категории, можно превратить ее в непрерывную на A_1, функцию, удовлетворяющую уравнению (2) для всех $a_1 \in A_1$.

Остальные результаты статьи представляют собой модификацию теоремы 3 для специального выбора пространства A_2. М. З. Соломяк

10186. О существовании меры, инвариантной относительно группы преобразований. Бокле (Sur l'existence d'une mesure invariante par un groupe de transformations. Boclé Jean), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 11, 798—800 (франц.)

Пусть S — пространство с вполне конечной мерой m $(0 < m(S) < \infty)$ и E — локально компактная топологическая группа с мерой Хара λ. Пусть каждому $t \in E$ отнесено взаимно однозначное преобразование T_t пространства S так, что: 1) $T_e x = x$ ($x \in S$, e — единица группы E), $T_r(T_s x) = T_{rs} x$; 2) T_t при любом $t \in E$ переводит измеримые множества в измеримые множества; 3) каково бы ни было измеримое множество $X \subset S$, множество тех точек (x, t) произведения $S \times E$, для которых $T_t x \in X$, измеримо в $S \times E$. Пусть I — фильтрующееся множество со счетной базой и $\{U_\iota\}$, $\in I$ — семейство измеримых множеств положительной конечной меры в E такое, что отношения

$$\frac{\lambda(U_\iota \Delta U_\iota t)}{\lambda(U_\iota)}, \qquad \frac{\lambda(U_\iota \Delta t U_\iota)}{\lambda(U_\iota)},$$

где Δ — знак симметрической разности, сходится (следуя I) к нулю. Пусть, наконец, $\varphi(x, X)$ обозначает характеристическую функцию множеств $X \subset S$. Доказывается, что если для всякого измеримого множества $X \subset S$ среднее $\frac{1}{\lambda(U_\iota)} \int_{U_\iota} \varphi(T_t x, X)\, d\lambda(t)$ сходится (следуя I) почти всюду на S, то среднее $\frac{1}{\lambda(U_\iota)} \int_{U_\iota} m(T_t^{-1} X)\, d\lambda(t)$ сходится к некоторой функции измеримого множества $X \subset S$, инвариантной относительно преобразований T_t. Если, сверх того, мера m удовлетворяет условию $m(T_t X) \leqslant K m(X)$, где K не зависит от X и t, то указанная инвариантная функция счетно аддитивна.

В. А. Рохлин

10187. Существует ли псевдоспинор? Ломсадзе Ю. М., Bull Inst. politehn. Iaşi, 1957, **3**, № 3-4, 61—64 (русск., рез. англ., рум.)

Показано, что в отличие от понятий псевдоскаляра, псевдовектора и псевдотензора, понятие псевдоспинора не является правомерным. Рассуждения проводятся на примере группы Лоренца.

Специфичность спинорных представлений группы Лоренца, отличающая их от тензорных, состоит в их двузначности (тензорные представления являются однозначными). Именно, в силу двузначности представления спинор при пространственном отражении может преобразовываться не только по закону $\psi'_\alpha = \pm (\gamma_4)_{\alpha\beta} \psi_\beta$, но и по закону $\psi'_\alpha = \pm i (\gamma_4)_{\alpha\beta} \psi_\beta$.

Из сказанного вытекает, что попытка по аналогии с псевдотензорами ввести понятие псевдоспинора, который должен преобразовываться при повороте осей, как обычный спинор, а при пространственном отражении по закону $\psi'_\alpha = -(\gamma_4)_{\alpha\beta} \psi_\beta$, не может быть состоятельной.

Н. А. Тихонов

10188. Построение собственных функций оператора S^2 по методу спиновых операторов. I. Общая теория. Беренц, Паунц (Construction of S^2 eigenfunctions by the method of spin operators. I. General theory. Berencz F., Pauncz R.), Proc. Phys. Soc., 1958, **71**, № 2, 145—151 (англ.)

Если волновой функцией системы n электронов является линейная комбинация определителей Ф Слейтера, то значения энергии системы являются корнями векового уравнения степени 2^n. Эта степень может быть понижена, если из функций Ф составить линейные комбинации, являющиеся собственными функциями спиновых операторов S_z и S^2. Системе с полным спином s соответствуют функции $\psi(s, m_s)$, $m_s = s, \ldots, -s$. Они являются собственными функциями оператора S_z и для них получены рекуррентные соотношения, выражающие $\psi(s, k)$ и $\psi(s, -k)$ через $(S^+)^k \psi(s, 0)$ и $(S^-)^k \psi(s, 0)$, $\psi(s, s-i)$ и $\psi(s, -s+i)$ через $(S^-)^i \psi(s, s)$ и $(S^+)^i \times \psi(s, s)$; $S_\pm = S_x \pm i S_y$. При соединении двух систем A и B со спинами s и s' в систему со спином $S = s + s' - \lambda$ ее волновая функция $\psi(s, M_S)$ является собственной функцией оператора S^2: $S^2 \psi(S, M_S) = (s + s' - \lambda)(s + s' - \lambda + 1) \psi(S, M_S)$. Функция $\psi(S, M_S)$ имеет вид линейной комбинации произведений функции $\psi_A(s, m_s)$, $\psi_B(s', m_{s'})$. Приводятся формулы для $\psi(S, M_S)$ для частных случаев $\lambda = 0$, $S = s + s'$ и $\lambda = 2s'$, $S = s - s'$. Подстановка вышеупомянутых рекуррентных соотношений в формулу для $\psi(S, M_S)$ позволяет построить операторы, с помощью которых $\psi(s +$

$+s'-\lambda$, $s+s'-\lambda$), $\psi(s-s', s-s')$, $\psi(s+s', s+s'-i)$, $\psi(s-s', s-s'-i)$, $\psi(s+s', 0)$, $\psi(s-s', 0)$ представляются в виде линейных комбинаций произведений $\psi_A(s, s)\cdot\psi_B(s', s')$, $\psi_A(s, s)\cdot\psi_B(s', -s')$, $\psi_A(s, M_s-m_{s'})\cdot\psi_B(s', m_{s'})$, $\psi_A(s, M_S-m_{s'})\times\psi_B(s', m_{s'})$, $\psi_A(s, 0)\cdot\psi_B(s', 0)$. М. А. Ковнер

10189. Построение собственных функций оператора S^2 по методу спиновых операторов. II. Система шести электронов. Беренц (Construction of S^2 eigenfunctions by the method of spin operators. II. Six-electron systems. Berencz F.), Proc. Phys. Soc., 1958, **71**, № 2, 152-160 (англ.)

На примере системы шести электронов показаны детали расчета по общей теории, развитой в 1-й части (реф. 10188). Число состояний с различными спинами системы шести электронов определяется с помощью векторного сложения спинов электронов, отображаемого построением диаграммы разветвления. Приводятся в явной форме спиновые операторы, при помощи которых построены линейные комбинации определителей Слейтера, соответствующих каждому значению полного спина. Общее число определителей Слейтера системы шести электронов равно 2^6. Они образуют базис 64-мерного подпространств Гильберта, распадающегося на 5, 27, 25, 7 подпространств, и являются собственными функциями оператора S^2. Однако лишь 20 из них являются собственными функциями оператора S_z, соответствующими $S_z=0$. Использование вышеупомянутых линейных комбинаций приводит к распаду векового определителя 20-го порядка на определители порядка 5, 9, 5, 1. Их дальнейший распад осуществляется при использовании симметрии молекулы. М. А. Ковнер

10190. Построение собственных функций оператора S^2 по методу спиновых операторов. Беренц (S^2 sajátfüggvényeinek szerkesztése spinoperátor módszerrel. Berencz Ferenc), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1958, **8**, № 4, 437—456 (венг.)

Перевод с английского (реф. 10188 и 10189).

10191 К. Основные сведения из топологии и функционального анализа. 1-я гл. из книги «Нормированные кольца». Наймарк (Elemente de topologie şi analiza functională. Capitolul I din lucrarea Inele normate Naimark M. A. Bucureşti, Acad. RPR, 1957, 209 111 p., il., 15 lei.—Litogr.), Bibliogr. RPR, 1958, **7**, № 7-8, 219 (рум.)

Перевод с русского (РЖМат, 1957, 7189).

10192 К. Нормированные кольца. Т. 1, 2, 3. Наймарк (Inele normate. Naimark M. A., Bucureşti, Acad. RPR, 1957, Vol. 1. 1—209 IIIp., Vol. 3. 1—800, 20 lei. 15 lei; Vol. 2. 210—496, +IV p., 20 lei; —Litogr.), Bibliogr. RPR, 1958, **7**, № 7-8, 219; № 12, 367 (рум.)

Перевод с русского (РЖМат, 1957, 7189).

10193 К. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Ахиезер, Глазман (Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. 2. unveränd. Aufl. Achieser N. I., Glasmann I. M., Übers. aus dem Russ. Berlin, Akad-Verl., 1958, XIII, 369 S.) (нем.)

Перевод с русского издания (Гос. техн.-теор. издат., М.-Л., 1950).

См. также: 9919, 9993, 10012, 10092, 10104, 10106

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

10194. Средняя разность и среднее отклонение некоторых дискретных распределений. Рамасуббан (The mean difference and the mean deviation of some discontinuous distributions. Ramasubban T. A.), Biometrika, 1958, **45**, № 3-4, 549—556 (англ.)

Статья посвящена вычислению средней разности

$$\Delta_1=\sum_{ij}|i-j|\,h(i)\,h(j)$$

и среднего отклонения

$$\delta_1=\sum_i|i-\mu|\,h(i)\qquad(\mu=\sum ih(i))$$

для биномиального распределения $\left(h(i)=\binom{n}{i}p^i q^{n-i}\right)$, отрицательного биномиального распределения $\left(h(i)=\binom{-n}{i}p^i q^{-n+i}\right)$, пуассоновского распределения $\left(h(i)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\right)$, логарифмического распределения $\left(h(i)=-\frac{1}{\ln(1-\alpha)}\frac{\alpha^i}{i}\right)$, геометрического распределения $(h(i)=qp^i)$ и гипергеометрического распределения

$$\left(h(i)=\frac{\binom{Np}{i}\binom{Nq}{n-i}}{\binom{N}{n}}\right).$$

Приведены таблицы значений некоторых вычисленных величин (Δ_1 и δ_1). П. А. Строганов

10195. Некоторые предельные теоремы относительно восстанавливаемых чисел. Моримура (Some limit theorems concerning with the renewal numbers. Morimura Hidenori), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 2, 47—53 (англ.)

Пусть $\{X_i\}$ — последовательность независимых случайных переменных и $\{a_i\}$ — последовательность действительных чисел. Положим $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

Восстанавливаемые числа $A(x, h)$ в интервале $(a, x+h)$ определяются как

$$A(x, h)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n P(x<S_n\leqslant x+h).$$

Определяем далее $\overline{A}_h(x)$ как

$$\overline{A}_h(x)=\frac{1}{x}\int_0^x A(u, h)\,du.$$

Предполагая, что $\{a_i\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных величин с экспоненциальным законом распределения, автор доказывает ряд теорем относительно предельного распределения величин $A(x, h)$ и $\overline{A}_h(x)$. Р. Х. Дивеев

10196. Центральная предельная теорема для некоторых случайных процессов. Фиш (A central limit theorem for some stochastic processes. Fisz M.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 7, 437—443, XXXVI (англ.; рез. русск.)

Пусть $Y_k(t)$, $t\in[0,1]$, $k=1,2,\ldots$ — последовательность действительных сепарабельных независимых слу-

чайных процессов с одинаковыми конечномерными распределениями.

Если α) при $0 < t \leqslant t_2 < 1$

$$MY_k(t_1)\,Y_k(t_2) - MY_k(t_1)\,MY_k(t_2) = u(t_1)\,v(t_2),$$

где $u(t)/v(t)$ — непрерывная и монотонно возрастающая функция, и

$$M[Y_k(t_2) - Y_k(t_1)]^2 \leqslant C_1(t_2 - t_1),$$

C_1 не зависит от t;

β) при $t_1, t_2, t_3 \in [0,1]$, $t_1 < t_2 < t_3$,

$$M\,|Y_k(t_2) - Y_k(t_1)|^j\,|Y_k(t_3) - Y_k(t_2)|^m \leqslant \leqslant C_2(t_2 - t_1)^{j/2}(t_3 - t_2)^{m/2}$$

для $j, m = 1,2$ и C_2 не зависит от t;

γ) вероятность того, что $Y_k(t)$ непрерывна слева в тех точках t, где предел слева существует (при $t = 0$— справа, если $Y_k(+0)$ существует), равна 1, — то (теорема 1) с вероятностью 1 реализации процесса $\xi_n(t) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k(t) - MY_1(t)\right)$ принадлежат к $D[0,1]$ (пространство непрерывных слева, в нуле — справа, действительных функций на $[0, 1]$ без разрывов второго рода) и $P^{\xi_n} \Rightarrow P^{\xi_0}$, где $\xi_0(t), t \in [0,1]$— действительный сепарабельный гауссовский процесс с $M\xi_0(t) = 0$, $t \in [0, 1]$ и $M\xi_0(t_1)\,\xi_0(t_2) = u(t_1)\,v(t_2)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, а P^{ξ_n} и P^{ξ_0} — распределения в $D[0,1]$, порожденные конечномерными распределениями $\xi_n(t)$ и $\xi_0(t)$ соответственно.

Если предположить выполненными α) с $u(t) = t$ и $v(t) = 1 - t$ и β), то (теорема 2) для каждого $\lambda > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P^{\xi_n}(\sup_t |\xi_n(t)| < \lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^r \exp(-2\lambda^2 r^2)$$

обобщение хорошо известной теоремы Колмогорова).

Указанные результаты распространяются также на векторно-значные процессы, компоненты которых есть линейные комбинации конечного числа j независимых процессов $\xi_n(t)$. В. В. Сазонов

10197. Некоторые приложения процессов нуль-один. Ломницкий, Заремба (Some applications of zero-one processes. Lomnicki Z. A., Zaremba S. K.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, **B17**, № 2, 243—255 (англ.)

Пусть E, Δ и U — операторы, действующие на последовательностях $\{a_t\}$ $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ по правилам: $Ea_t = a_{t+1}$, $\Delta a_t = a_{t+1} - a_t$,

$$Ua_t = \begin{cases} 1, & \text{если } a_t > 0, \\ 0, & \text{если } a_t \leqslant 0. \end{cases}$$

Пусть x_t $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — произвольный стохастический процесс с дискретным параметром. Автор исследует некоторые процессы нуль-один (т. е. дискретные процессы y_t со значениями 0 и 1), ассоциированные с x_t, в частности, процессы $\Theta_t = U_{xt}$ и $y_t^{(k)} = U\Delta U\Delta^k x_t$ $(k = 0,1\ldots)$.

$y_t^{(0)}$ называется процессом пересечения нулевого уровня снизу, так как $y_t^{(0)} = 1$ тогда и только тогда, когда $x_t \leqslant 0$ и $x_{t+1} > 0$. $y_t^{(1)}$ называется процессом пиковости снизу, так как $y_t^{(1)} = 1$, тогда и только тогда, когда $x_{t+1} \leqslant x_t$ и $x_{t+1} < x_{t+2}$.

Процесс пиковости снизу, ассоциированный с процессом $(-x_t)$ называется процессом пиковости x_t сверху. $y_t^{(2)}$ называется процессом выпуклости x_t сверху. Предполагается, что исходный процесс x_t является гауссовым стационарным с $M(x_t) = 0$ и $D(x_t) = 1$. Пусть $\rho_r = M(x_{t+r}x_t)$ и $c_r = \operatorname{cov}(\Theta_{t+r}\Theta_t)$ $(r = 0,1,2,\ldots)$ по формуле Г. Крамера (Mathematical Methods of Statistics Princeton, 1946, p. 290) $c_r = 1/2\pi \arcsin \rho_r$ $(r = 0,1,\ldots)$; поэтому корреляции ρ_r процесса x_t можно оценить, производя выборку из процесса Θ_t.

Когда $\sum |\rho_r|$ сходится, $c_r^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \Theta_t\Theta_{t+N} - 1/4$ является состоятельной и несмещенной оценкой c_r, так что $\sin 2\pi c_r^{(N)}$ есть состоятельная оценка для ρ_r, средне квадратическая ошибка которой, имеет порядок $1/N$.

Рассматривается также метод оценки ρ_r на основе выборки из процессов $y_t^{(k)}$, однако так полученные оценки менее эффективны.

Для получения верхних границ ошибок упомянутых оценок доказывается следующая лемма:

Если совместное распределение случайных величин x_1, x_2, x_3, x_4 невырожденное 4-мерное нормальное, $M(x_i) = 0$, $D(x_i) = 1$, $\rho_{ik} = M(x_ix_k)$ $(i, k = 1,2,3,4)$, то $|P(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0) - P(x_1 > 0, x_2 > 0)\,P(x_3 > 0, x_4 > 0)| < C\rho$, где $\rho = \max(|\rho_{13}|, |\rho_{14}|, |\rho_{23}|, |\rho_{24}|)$ и C зависит только от ρ_{12} и ρ_{34}.

Наконец, рассматривается случай, когда x_t есть решение стохастического дифференциального уравнения $P_m(E)x_t = \varepsilon_{t+m}$, где $P_m(x)$ — вещественный полином порядка x, а ε_t — независимые случайные величины с одинаковыми нормальными распределениями. Вычисляются средние значения процессов $y_t^{(k)}$ для случая $m=3$. Результаты применяются к числовым данным, получаемым из временных рядов, построенным Кендаллом (Kendall M. G., Biometrika, 1949, **36**, 267—289). Числовые результаты показывают, что оценки, полученные из процесса Θ_t, очень хороши, они имеют тот же порядок точности, что и оценки, полученные общепринятыми методами. Оценки из процессов $y_t^{(k)}$ намного хуже.

A. Rényi

10198. Равномерная сходимость случайных функций с применениями к статистике. Рубин (Uniform convergence of random functions with applications to statistics Rubin Herman), Ann. Math. Statistics, 1956 **27**, № 1, 200—203 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные величины. Тогда при условиях, подобных условиям Ле-Кама (РЖМат, 1956, 641), с вероятностью 1

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t, X_k) \to Ef(t, X_1)$$

равномерно по t. Автор дает несколько статистических приложений этой теоремы, например, он доказывает, что любой непрерывный параметр для распределений в евклидовом n-мерном пространстве допускает состоятельную оценку. K. Sarkadi

10199. Некоторые асимптотические свойства процесса Пуассона. Санкараранаян (Some asymptotic properties of Poisson process. Sankaranarayanan G.), Tôhoku Math. J., 1958, **10**, № 1, 60—68 (англ.)

Рассматривается процесс Пуассона $x(t, \omega)$ $[\omega \in \Omega$; $0 \leqslant t < \infty$; $x(0, \omega) = 0$ для всех ω, $x(t, \omega)$ принимает лишь целочисленные неотрицательные значения;

$P\{x(t, \omega) - x(t', \omega) = i\} = (\lambda^i(t - t')^i/i!)\,e^{-\lambda(t-t')}$ для $t > t'$ и целых неотрицательных i, причем $\lambda > 0$].

Вводятся обозначения: $L_m(\omega) = t_{m+1}(\omega) - t_m(\omega)$, где $t_m(\omega) = \min_T [x(T, \omega) = m]$; $M_n = \max(L_0, L_1 \ldots, L_{n-1})$;

$$Z_n = \frac{L_0 + L_1 + \ldots + L_{n-1}}{M_n};$$

$$y_i = \frac{L_{ni} + L_{ni+1} + \ldots + L_{n(i+1)-1}}{n} \quad (i = 0, 1, \ldots);$$

$$u_m = \max(y_1, y_2, \ldots, y_m); \quad l_m = \min(y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

В этих обозначениях доказывается ряд теорем.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, тогда

$$P\left[\liminf_{m\to\infty} \frac{n\lambda u_m}{\alpha \log m} \geqslant 1\right] = 1.$$

Теорема 2. Если $\beta > 0$,

$$P\left[\limsup_{m\to\infty} \frac{l_m}{\beta\left[\frac{n!}{(n\lambda)^n}\frac{\log m}{m}\right]^{1/n}} \leqslant 1\right] = 1.$$

Теорема 3. Для любого $p > 0$

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n(\log n)^{2+p}} = 0\right] = 1.$$

Теорема 4. Для любого $p > 0$

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n^2(\log n)^p} = 0\right] = 1.$$

Теорема 5.

$\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_m}{m^2}$ сходится по вероятности к $1/2\,\lambda$.

Л. Н. Куцев

10200. Случайные функции, удовлетворяющие некоторым линейным соотношениям. Гурье (Random functions satisfying certain linear relations. Ghurye S. G.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 3, 543—554 (англ.)

Пусть $x(t)$ — случайный процесс, принимающий значения в p-мерном евклидовом пространстве, непрерывный по вероятности для $t \geqslant t_0$. Пусть $A(h)$ — матричная функция $p\times p$, непрерывная по $h \geqslant 0$, вырожденная для некоторого $h > 0$ и такая, что

$$x(t_0),\ x(t_0 + mh) - A(h)x(t_0 + (m-1)h),\quad m = 1, \ldots, n, \quad (1)$$

— взаимно независимы для всех $h > 0$ и $n \geqslant 1$. Предполагается, что значения $x(t_0)$ не лежат с вероятностью 1 в какой-либо гиперплоскости размерности $< p$. Тогда $A(h) = \exp(h\Lambda)$, где Λ — постоянная матрица, и существует процесс $z(t)$, непрерывный по вероятности, с независимыми приращениями такой, что

$$x(t) = \exp((t - t_0)\Lambda)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)\Lambda)\,dz(s), \quad (2)$$

причем интеграл есть предел распределений сумм Римана — Стилтьеса.

Обратно, пусть задан процесс $z(t)$ и матрица Λ, тогда (2) удовлетворяет (1). Рассматривается также процесс $x_0(t) = \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)\Lambda_0)\,dx(t)$, Λ_0 — другая постоянная матрица.

H. P. McKean

Перевод из Math. Revs, 1955, **16** № 2, 150

10201. Линейные стохастические функциональные уравнения, допускающие сдвиг, и стохастический ряд Коши. Китагава (Linear stochastic translatable functional equations and stochastic Cauchy series. Kitagawa Tosio. Japan. J. Math., 1952(1953), **22**, 1—18) (англ.)

Автор распространяет на регулярные случайные функции (р. с. ф.) некоторые результаты, полученные ранее для детерминистических функций (Kitagawa T., Japan. J. Math., 1937, **13**, 233—332; 1938, **14**, 125—168; Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Imp. Univ., 1940, **A1**, 1—28). Комплекснозначная функция $x = x(t, \omega)$ на $T\times\Omega$, где $T = (-\infty, \infty)$, а Ω — вероятностное пространство, принадлежит к классу R р. с. ф., когда почти для всех t

$$E_\omega\{|x(t, \omega)|^2\} < \infty.$$

Пусть

$$\tilde{x}(t) = E_\omega\{x(t, \omega)\},\ \{\sigma(t)\}^2 = E_\omega\{|x(t, \omega) - \tilde{x}(t)|^2\},$$

$$\|x\|_M = \left(\int_M |\tilde{x}(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_M \{\sigma(t)\}^p dt\right)^{1/p}$$

(интегралы берутся по Лебегу.)

Автор говорит, что $x \in L^pR$, $1 \leqslant p < \infty$, если для каждого M $\|x\|_M < \infty$. Рассматриваются линейные допускающие сдвиги операторы Λ_t в L^pR, такие, что 1) Λ_t линейно преобразует каждый элемент L^pR в другой элемент L^pR; 2) Λ_t коммутативен со всеми сдвигами t и E_ω; 3) Λ_t ограничен, т. е. $\|\Lambda_t x\| \leqslant G\|x\|_{M'}$, где C и M' зависят только от Λ_t и M. Тогда $\Lambda_t e^{\lambda t} = G_\Lambda(\lambda)\,e^{\lambda t}$, где $G_\Lambda(\lambda)$ есть целая функция с нулями λ_n кратности p_n $(n = 1, \alpha, \ldots)$.

Формальный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{p_n - 1} a_{nk}(\omega)\, t^k e^{\lambda_n t},$$

где $a_{nk}(\omega)$ — случайные величины с конечными дисперсиями, автор называет случайным рядом Коши. Изучается связь между таким рядом и функциями x в L^pR; в частности, когда x есть решение уравнения $\Lambda_t x = 0$. В этом случае он показывает, что надлежаще подобранные контурные интегралы $T_r(x) = T_r(t, x)$ $(r = 1, 2, \ldots)$, зависящие от x, сводятся к частичным суммам случайного ряда Коши и что $\|x - T_r(x)\|_M \to 0$ $(r\to\infty)$ для каждого M.

Примечание референта. Много опечаток; в частности, в Лемме 2. 2 следует опустить (2°); в Лемме 5. 3 следует читать всюду x вместо $\tilde{x}$ или $\tilde{x}(u)$ и $\tilde{x}(\eta)$ вместо $\tilde{x}(u, \omega)$ и $\tilde{x}(\eta, \omega)$.

H. P. Mulholland

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 2, 151

10202. О стохастических функциях множества. I. Прекопа (Sztochasztikus halmazfüggvényekkől. I. Prékopa András), Magyar tud. akad. mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, **6**, № 3-4, 289—337 (венг.)

См. РЖМат, 1958, 2217.

10203. Сопряженный марковский процесс. Нелсон (The adjoint Markoff process. Nelson Edward), Duke Math. J., 1958, **25**, № 4, 671—690 (англ.)

Пусть X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство; B — пространство непрерывных ограниченных на X функций, причем $\|f\| = \sup_{x\in X} f(x)$ для $f \in B$; $B^+ = \{f : f\in B,\ f \geqslant 0\}$; C_0 — совокупность функций из B с компактными носителями. Если на B задано линейное преобразование P, переводящее B в пространство всех функций на X, то всякая регулярная мера m такая, что $\int f dm = \int Pf dm$ для всех $f \in C_0 \cap B^+$, называется инвариантной (относительно P).

Теорема. Пусть P переводит B^+ в себя, $\|P\| \leqslant 1$, и пусть $P1 = 1$, если X компактно. Если при этом для любых $x \in X$ и $f \in B^+$ найдется такое n, что $P^n f(x) > 0$, то существует линейный функционал Λ, определенный на B^+ такой, что $0 \leqslant \Lambda f \leqslant \infty$, если $f \in B^+$, и $0 \leqslant \Lambda f < \infty$, если $f \in C_0 \cap B^+$, для которого $\Lambda(Pf) = \Lambda f$ при всех $f \in C_0 \cap B^+$.

Если P удовлетворяет условиям теоремы и отображает C_0 в себя, то существует инвариантная мера m

В дальнейшем дополнительно предполагается, что в X выполнена вторая аксиома счетности и что рассматриваемые меры σ-конечны. Обозначим через $\mathfrak{W}$ σ-алгебру борелевских подмножеств X. Стохастическая переходная функция $p(x, E)$, заданная на $X\times\mathfrak{W}$, называется неприводимой, если все меры $\nu_x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\times$ $\times p^n(x, E)$ $(x\in X, E\in\mathfrak{W})$ абсолютно непрерывны друг по другу. Если неприводимая переходная функция $p(x, E)$ является переходной функцией некоторого однородного марковского процесса $\xi_n(\omega)$ с дискретным параметром, и если, каково бы ни было $E\in\mathfrak{W}$ такое, что $\nu_x(E) > 0$, $P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega : \xi_n(\omega)\in E\} \mid \xi_0 = x\} = 1$, то $p(x, E)$ называется возвратной.

Доказывается, что стохастическая переходная функция $p(x, E)$ возвратна в том и только в том случае, когда для всех E таких, что $\nu_y(E) > 0$ при всех $y\in X$, $\sum_{n=1}^{\infty} p^n(x, E) = \infty$ при всех $x\in E$. Всякой возвратной стохастической переходной функции соответствует единственная с точностью до численного множителя инвариантная (относительно P_1) мера m, где $P_1 f = \int f(y)\, p(x, dy)$. Мера m при этом абсолютно непрерывна по всем мерам ν_x.

Пусть χ_E — характеристическая функция множества $E\in\mathfrak{W}$. Если для любой функции $g(x)$ с интегрируемым по инвариантной мере m модулем и любого χ_E $\int P(\chi_E) g\, dm = \int \chi_E\, P^* g\, dm$, то это равенство определяет оператор P^*, переводящий пространство функций с интегрируемым по m модулем в себя. Доказывается, что оператору P^* соответствует переходная функция $p^*(x, E)$ такая, что $P^* f(x) = \int f(y)\, p^*(x, dy)$ почти всюду относительно m, если $f(x)$ интегрируема в некоторой степени $\alpha \geqslant 1$ относительно m. М. Г. Шур

10204. Заметки о теории предсказания Винера. Такано (Note on Wiener's prediction theory. Takano Kinsaku. Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1954, **5**, 67—72) (англ.)

Пусть $\{x(t, \omega);\ -\infty < t < +\infty,\ \omega\in\Omega\}$ — измеримый строго стационарный эргодический процесс, определенный на вероятностном пространстве Ω с $E\{|x(0)|^2\} < \infty$ и $x(t)$ непрерывной в среднем.

Тогда

$$R(u) = E\{x(t+u)\,\overline{x(t)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dF(x) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+u, \omega)\,\overline{x(t, \omega)}\, dt$$

для всех u и почти всех ω.

Если $f(x)$ — выборочная функция процесса, спектральная функция которого известна, то по Винеру оператор $\int_0^{\infty} f(t-\tau)\, dK(\tau)$ будет оптимальным в смысле предсказания $f(t+\alpha)$, если

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-T}^{T} f(t+\alpha) - \int_0^{\infty} f(t-\tau)\, dK(\tau) \right|^2 dt$$

минимален.

Автор отмечает, что неясно, существует ли предел, и если он существует, то достигает ли он своего минимума.

Пусть

$$\Lambda(n, \tau_j, \alpha_j) = \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| f(t+\alpha) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(t-\tau_j) \right|^2 dt \right\}^{1/2},$$ и

$$\rho = \inf_{n, \tau_j, \alpha_j} \Lambda(n, \tau_j, \alpha_j),$$

где n принимает все положительные целые, τ — неотрицательные вещественные и α — комплексные значения.

Изучается задача нахождения n, τ_j, α_j, для которых $\Lambda(n, \tau_j, \alpha_j) \leqslant \rho + \varepsilon$.

В начале статьи автор утверждает, что он не предполагает независимость $E\{x(t)\}$ от t, но это есть следствие строгой стационарности. R. A. Leibler

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 2, 151.

10205. Среднеквадратический критерий ошибки. Шерман (Non-mean-square error criteria. Sherman Seymour), IRE Trans. Inform. Theory, 1958, **4**, № 3, 125—126 (англ.)

Пусть $\{x_t;\ -\infty < t < \infty\}$ — гауссов случайный стационарный процесс. Пусть W — класс неотрицательных четных функций, которые монотонно не убывают на положительной полуоси. Рассматривается предсказание величины x_f при $f > 0$ на основании знания выборочной функции $\widetilde{x}_t$ для $t \leqslant 0$, т. е. рассматриваются всевозможные операторы A, устанавливающие соотношение

$$\widetilde{x}_f = A\widetilde{x}_t,$$

где $\widetilde{x}_f$ — предсказание величины x_f.

Доказывается, что если $\psi(y)\in W$, то наименьшее значение функционала $E[\psi(x_f - \widetilde{x}_f)]$ от $\widetilde{x}_f$ и вид экстремального оператора A не зависят от $\psi(y)$.

Примерами $\psi(y)$ являются $\psi(y) = y^2$, $\psi(y) = |y|$. Б. С. Цыбаков

10206. Об интервалах между последовательными нулями случайной функции. Лонге-Хиггинс (On the intervals between successive zeros of a random function. Longuet-Higgins M. S.), Proc. Roy. Soc., 1958, **A 246**, № 1244, 99—118 (англ.)

Рассматривается задача о нахождении плотности $p(\tau)$ условного распределения момента первого после $t = 0$ пересечения нулевого уровня гауссовским стационарным процессом x_t с $M x_t = 0$ при условии, что в момент $t = 0$ произошло такое пересечение.

Используется известная формула

$$p(\tau) = \frac{2}{N} \frac{d^2 U(\tau)}{d\tau^2},$$

где N — среднее число пересечений за единицу времени, а $U(\tau) = P\{x_t > 0$ для $0 \leqslant t \leqslant \tau\}$. (Ее строгий вывод см. РЖМат, 1957, 5032).

Находятся явные выражения нескольких первых приближений для функций $p(\tau)$ через корреляционную функцию r_t процесса x_t по формулам

$$p_n(\tau) = \frac{2}{N} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_n} U_n(t_1, \ldots, t_n),$$

$$p_n^*(\tau) = \frac{2}{N} \frac{d^2}{dt^2} U_n(t_1, \ldots, t_n),$$

где $U_n(t_1, \ldots, t_n) = P\{x_{t_1} > 0, \ldots, x_{t_n} > 0\}$, $t_k = \frac{k\tau}{n-1}$.

(Приближение $p_2(\tau)$ было изучено ранее: см. Rice S., Bell. System Techn. J., 1944, **23**, № 3, 282—332; 1945, **24**, № 1, 46—156; на русском языке см. сб. „Теория передачи электрических сигналов при наличии помех").

Производится исследование полученных приближений и сравнение их с результатами опытных данных. Ока-

зывается, что приближения $p_n(\tau)$ хорошо действуют в области малых τ, особенно до первого минимума корреляционной функции r_t, а приближения $p_n^*(\tau)$, наоборот, в области больших τ. В. А. Волконский

10207. О неограниченности выборочных функций гауссовских процессов. Беляев Ю. К., Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 3, 351—354 (рез. англ.)

В работе показывается прямым методом, что если спектральная функция гауссовского стационарного процесса содержит непрерывную компоненту, то почти все его выборочные функции неограничены. В. П. Леонов заметил недавно, что так как совокупность выборочных функций, меньших константы, образует инвариантное множество, то для случая непрерывной спектральной функции указанный факт следует из того, что, как хорошо известно, гауссовский процесс с непрерывной спектральной функцией является эргодическим. Общий случай легко следует из этого более частого. К таким же результатам пришел А. И. Ибрагимов.

Р. Л. Добрушин

10208. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем. Розанов Ю. А., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 93—142

Обзорная статья, посвященная систематическому изложению элементов спектральной теории многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем и задач экстраполяции и интерполяции для таких процессов. Автор использует „бескоординатную" концепцию стационарного случайного процесса, предложенную А. Н. Колмогоровым и позволяющую многие результаты перенести автоматически на бесконечномерные процессы; именно, стационарным процессом $\{A, x_t(a)\}$ называется совокупность унитарного пространства A и изометрических операторов $x_t(a)$ из A в гильбертово пространство H случайных величин таких, что при любом $a \in A$ $Mx_{t+\tau}(a)\overline{x_t(a)}$ не зависит от t.

В гл. I устанавливается спектральное разложение стационарного процесса, вводятся понятия спектрального, корреляционного функционалов, спектральной плотности. Гл. II содержит большое число фактов вспомогательного характера, весьма важных для дальнейшего изложения. В частности, приводится представление процесса с абсолютно непрерывным спектральным функционалом в виде скользящего суммирования по последовательности некоррелированных величин. Гл. III посвящена задачам линейной экстраполяции. Вводятся понятия регулярного и сингулярного процесса, естественным образом обобщающие соответствующие понятия в теории одномерных стационарных процессов (Дуб Дж., Вероятностные процессы, Изд-во ин. лит., М., 1956, гл. XII). Устанавливаются различные критерии регулярности процесса, которые частью были опубликованы В. Н. Засухиным (Докл. АН СССР, 1941, 33, 435—437), частью были известны М. Г. Крейну и излагались им на лекциях. М. Г. Крейн устранил также некоторые дефекты, содержавшиеся в доказательствах В. Н. Засухина. В качестве следствия формулируются результаты, полученные для одномерного случая А. Н. Колмогоровым (Бюл. МГУ, 1941, 2, № 6, 1—40).

В гл. IV излагаются опубликованные ранее (РЖМат, 1958, 7957) результаты автора относительно интерполяции векторных процессов, обобщающие соответствующие результаты А. Н. Колмогорова (Изв. АН СССР. Сер. матем. 1941, 5, 3—14) и А. М. Яглома (Успехи матем. наук, 1949, 4, 6—4, 171—178).

Примечание референта. Задачам экстраполяции для многомерных стационарных процессов посвящена также статья Винера и Массани (РЖМат, 1958, 10049). М. И. Ядренко

10209. Интервалы между пересечениями оси случайной функцией. II. Мак-Фадден (The axis-crossing intervals of random functions. II. McFadden J. A.), IRE Trans. Inform. Theory, 1958, 4, № 1, 14—24 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 1444.

Рассматривается плотность $P_n(\tau)$ условного распределения вероятностей для n-го момента после момента $t=0$ пересечения нулевого уровня стационарным процессом x_t с $Mx_t=0$ при условии, что в момент $t=0$ было такое пересечение. Пусть $p(n, \tau)$ вероятность, что за отрезок времени τ произошло ровно n пересечений, $U(t)\,dt$ — условная вероятность, что есть пересечение на отрезке $[t, t+dt]$ при условии, что есть пересечение при $t=0$, $r(t)$ — корреляционная функция процесса $\xi_t = \operatorname{sign} x_t$.

Устанавливаются связи между функциями $P_n(\tau)$, $p(n, \tau)$, $U(t)$ и $r(t)$. На основании этого устанавливается асимптотическое выражение функций $p(n, \tau)$ и $P_n(\tau)$ при $\tau \to 0$ через значения $U(0)$ и $r''(0)$, которые в гауссовском случае могут быть вычислены в явном виде (Rice S., Bell System Techn. J., 1944, 23, 282—332, 1945, 24, 46—156). Если предположить, что длины интервалов между последовательными пересечениями независимы, то можно выразить функцию $p(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_0(t)\,dt$ через функцию $u(s) = \int_0^\infty e^{-st} U(t)\,dt$ или $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} r(t)\,dt$. Вместо предположения независимости всех длин интервалов можно предположить только, что длина каждого интервала не зависит от суммы длин любого четного числа непосредственно предшествующих интервалов („квазинезависимость"). При этом предположении также можно выразить $p(s)$ через $u(s)$ и $g(s)$. Для нескольких примеров гауссовских процессов функции $P_0(\tau)$, подсчитанные при таком предположении сравниваются с экспериментально полученными кривыми. Соответствие оказывается очень хорошим для процессов с рациональными спектральными плотностями. Предположение полной незивисимости длин интервалов дает гораздо худшие результаты. Обсуждается способ вычисления дисперсии длины интервала и корреляции между соседними интервалами в предположении, что корреляционная функция последовательности длин интервалов есть экспонента.

В. А. Волконский

10210. К теории корректирующих кодов с простым основанием. Бородин Л. Ф., Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника, 1958, № 1, 22—26

Рассматривается дискретный канал связи без памяти с конечным алфавитом $E_1, \ldots, E_a$ символов на входе и выходе. Матрица вероятностей p_{ij} того, что символ E_i на входе превращается в символ E_j на выходе, предполагается симметричной и такой, что $p_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, $i \neq 1$, $j \neq 1$. Предлагается по аналогии с тем, как это делается обычно при $a=2$, рассматривать символы как целые числа и ввести операцию сложения по модулю a. Линейный код задается наборами символов $(x_1, \ldots, x_k, F_1(x), \ldots, F_e(x))$, где $a(x_1, \ldots, x_k) = x$ — линейные функции, $a(x_1, \ldots, x_k) = x$ принимает всевозможные значения. При использовании подобного кода задача декодирования сводится к решению линейных уравнений по модулю a. Обсуждаются возможности, даваемые такими кодами. Р. Л. Добрушин

10211. Представление, группировка и переработка информации с помощью автоматических преобразователей данных. Чекель (Darstellung, Gruppierung und Verarbeitung von Informationen bei der automati-

schen Datenverarbeitung. Zschekel Hans), Elektrotechn. Z., 1958, **A 79**, № 18, 617—624 (нем.)

Работа в основном посвящена вопросам технической реализации простейших видов кодирования и некоторых логических операций. Упоминаются: понятие избыточности кода, некоторые представления из теории корректирующих кодов. Оригинальных математических результатов работа не содержит. Б. С. Флейшман

10212. Передача информации по каналу с обратной связью. Добрушин Р. Л., Теория вероятностей и ее применение, 1958, **3**, № 4, 395—412 (рез. англ.)

Пусть $(E_1,\ldots,E_m)$ — алфавит символов на входе канала и $(\overline{E}_1,\ldots,\overline{E}_{\overline{m}})$ — алфавит на выходе. Пусть $\varepsilon^{(n)}$ $\left(\overline{\varepsilon}^{(n)}\right)$ — пространство всевозможных сигналов на входе (выходе), состоящее из m^n ($\overline{m}^n$)-последовательностей вида $(E_{i_1},\ldots,E_{i_n})$ $(\overline{E}_{j_1},\ldots,\overline{E}_{j_n}$ соответственно). Канал определяется заданием системы условных вероятностей $p_{ij}=p(j_1,\ldots,j_n \mid i_1,\ldots,i_n)$, $i_k=1,\ldots,m$; $j_k=1,\ldots,\overline{m}$ того, что сигнал $(E_{i_1},\ldots,E_{i_m})$ превратится в сигнал $\left(\overline{E}_{j_1},\ldots,\overline{E}_{j_m}\right)$ Случайные величины η и $\overline{\eta}$ являются сообщениями на входе и выходе, которые принимают значения в пространствах $\mathfrak{F}=(F_1,\ldots,F_e)$ и $\overline{\mathfrak{F}}=(\overline{F}_1,\ldots,\overline{F}_{\overline{e}})$. Считается, что η переходит в $\overline{\eta}$ в результате передачи по каналу длины h, если можно подобрать сигнал на входе $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ и сигнал на выходе $\overline{\xi}=(\overline{\xi}_1,\ldots,\overline{\xi}_n)$ так, чтобы

$$P\left\{\overline{\xi}_k=\overline{E}_{j_k}\,\middle|\,\xi_1=E_{i_1},\ldots,\xi_k=E_{i_k},\ \overline{\xi}_1=\overline{E}_{j_1},\ldots,\overline{\xi}_{k-1}=\overline{E}_{i_{k-1}},\ \eta=F_j\right\}=r(j_k\mid i_1,\ldots,i_k,\ j_1,\ldots,j_{k-1}),$$

где $r(\ldots)$ — вероятность того, что k-й символ на выходе примет значение $\overline{E}_{j_k}$ при заданных символах $E_{i_1},\ldots,E_{i_k}$ на входе и $\overline{E}_{j_1},\ldots,\overline{E}_{j_{k-1}}$ на выходе, и

$$P\left\{\overline{\eta}=\overline{F}_\alpha\,\middle|\,\overline{\xi}=\left(\overline{E}_{j_1},\ldots,\overline{E}_{j_n}\right),\ \xi=(E_{i_1},\ldots,E_{i_n}),\ \eta=F_j\right\}=P\left\{\overline{\eta}=\overline{F}_\alpha\,\middle|\,\overline{\xi}=\left(\overline{E}_{j_1},\ldots,\overline{E}_{j_n}\right)\right\}$$ при любых $\alpha=1,\ldots,\overline{e}$; $j=1,\ldots,e$; $i_r=1,\ldots,m$; $j_r=1,\ldots,\overline{m}$.

Определяется, что сообщение η переходит в $\overline{\eta}$ в результате передачи по каналу длины n без обратной связи, если при любом $k=1,\ldots,n$; $i_r=1,\ldots,m$; $j_r=1,\ldots,\overline{m}$; $j=1,\ldots,e$

$$P\left\{\xi_k=E_{i_k}\,\middle|\,\xi_1=E_{i_1},\ldots,\xi_{k-1}=E_{i_{k-1}};\ \overline{\xi}_1=\overline{E}_{j_1},\ldots,\overline{\xi}_{k-1}=\overline{E}_{j_{k-1}},\ \eta=F_j\right\}=$$

$$=P\left\{\xi_k=E_{i_k}\,\middle|\,\xi_1=E_{i_1},\ldots,\xi_{k-1}=E_{i_{k-1}},\ \eta=F_j\right\}.$$

Если это условие не выполняется, то считается, что передача ведется по каналу с обратной связью. Доказывается теорема: если сообщение η переходит в $\overline{\eta}$ в результате передачи по каналу без памяти и без обратной связи длины n, то

$$I(\eta,\overline{\eta})<C^{(n)},$$

где $I(\eta,\overline{\eta})$ — информация в η относительно $\overline{\eta}$, а $C^{(n)}$ — пропускная способность того же канала, но без обратной связи.

Рассматривается некоторый рандомизированный канал, у которого $p_{ij}=p_{ij}^{(\alpha)}$, где α — случайная величина, принимающая конечное число значений $a_1,\ldots,a_s$ с вероятностями $q(a_1),\ldots,q(a_s)$. Доказывается теорема: Если сообщение η переходит в $\overline{\eta}$ в результате передачи по рандомизированному каналу с обратной связью без памяти длины n, то

$$\frac{1}{n}I(\eta,\overline{\eta})\leqslant K,$$

где

$$K=\sum_k q(a_k)\,D(a_k);\ D(a_k)=$$

$$=\sup_{\{p_i\}}\sum_{i,j}p_i\ p_{ij}(a_k)\log\frac{p_{ij}(a_k)}{\overline{P}_j};$$

$$\overline{P}_j=\sum_i p_i\,p_{ij}(a_k).$$

Величина $D(a_k)$ имеет смысл пропускной способности канала без памяти, заданного переходными вероятностями $p_{ij}(a_k)$. Из доказанных теорем делается вывод, что применение обратной связи не дает возможность увеличить пропускную способность обычных каналов связи без памяти и, наоборот, увеличивает, вообще говоря, пропускную способность рандомизированных каналов.

В качестве примера, иллюстрирующего последнюю теорему, рассматривается некоторый бинарный ($m=\overline{m}=r$) симметричный канал. Б. С. Цыбаков

10213. Упрощенный метод экспериментальной оценки энтропии стационарной последовательности. Добрушин Р. Л., Теория вероятностей и ее применения, 1958, **3**, № 4, 462—464 (рез. англ.)

Пусть ξ_{-1}, ξ_0, $\xi_1,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих каждая значения $E_1,\ldots,E_m$ с вероятностями $p_1,\ldots,p_m$. Рассматривается случайная величина η, равная наименьшему положительному k, для которого $\xi_k=\xi_0$. Показывается, что для энтропии H последовательности ξ имеет место формула

$$H=M\{\log\eta\mid\xi_0=E_e\}-C+\varepsilon,$$

где $C=0{,}577\ldots$—постоянная Эйлера, а ε — малое число, если вероятности p_e малы.

Это соотношение позволяет использовать в качестве оценки для H суммы вида

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\eta_i,$$

где η_i — независимые наблюдения величины η. Указывается, как развитый метод может быть распространен на случай, когда не все p_e малы и когда ξ — произвольная стационарная последовательность.

Б. С. Цыбаков

10214. Оценки энтропии источника сообщений. Кампопьяно (Estimates of entropy of a message source. Campopiano Carmen N.), Proc. I. R. E., 1958, **46**, № 9, 1652 (англ.)

Пусть имеется дискретная цепь Маркова длины N. Среднее значение условной энтропии F_N^R (на символ) последовательности длины R в случае, когда предшествующие $N-R$ символов известны, выражается формулой

$$F_N^R = -\frac{1}{R}\sum_{ij} P\{B(N-R, i), B(R,j)\}\times$$
$$\times \ln P\{B(R, j) \mid B(N-R, i)\},$$

где $B(k, i)$ — i-я последовательность длины k; $P(X)$ — вероятность последовательности X; $P(X, Y)$ — вероятность последовательности X, за которой следует последовательность Y; $P(X \mid Y) \frac{P(XY)}{P(X)}$. Доказано, что $F_N^{R+1} \geqslant F_N^R$, где $R = 1, \ldots, n$. Б. С. Цыбаков

10215. О средней неопределенности непрерывного распределения вероятностей. Мош (On the average uncertainty of a continuous probability distribution. Mosch A. D. du), Appl. Scient. Res. 1955, **B4**, № 6. 469—473 (англ.)

Цель автора — модифицировать шенноновское определение энтропии H n-мерной плотности вероятности (Bell System Techn. J., 1948, **27**, 623—656) при помощи введения количества $\overline{H}$, получаемого усреднением процесса H по объему некоторой ячейки. В отличие от H $\overline{H}$ — необходимо неотрицательная величина и является показателем степени разброса вероятностной меры. Утверждение, что $\overline{H}$ независима от координатной системы однако, требует пояснения. E. Reich

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 168

10216. О распределениях и стохастичности в целом. Кинокуния (A synthetic light on the distributions and their stochasticity. Kinokuniya Yoshio. Mem. Muroran Univ. Engng, 1954, **1**, № 5, 821—829) (англ.)

10217 К. Теория суммирования случайных величин. Леви (Théorie de l'addition des variables aléatoires. 2. ed. Lévy P. Paris, Gauthier-Villars, 1954, XX, 387 p., 4500 fr.) (франц.)

Автор переработал и дополнил первое издание книги (Paris, Gauthier-Villars, 1937, XVII, 328 pp.) с учетом всех достижений в этой области.

Изменения внесены в изложении теории безгранично делимых законов, которая обогатилась работами Хинчина и Лоэва. В гл. 9, рассматривая теорию непрерывных дробей (стр. 316—325), автор дополняет некоторые результаты Хинчина. Дополнения внесены также в изложение теории характеристических функций. в частности, при доказательстве обратимости интеграла Фурье—Стилтьеса. Подробно изложена теория аналитических характеристических функций. В конце добавлены два самостоятельных приложения; первое представляет собой собственную работу автора, второе посвящено краткому обзору теории стохастических процессов; автор сравнивает свою точку зрения с точкой зрения Дуба (Doob J. L., Stochastic processes, New York, 1953).

Из Zbl. Math., 1955, **56**, № 6-10, 359.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

10218. Использование наглядных представлений для понимания и применения математической статистики. Пирсон (The use of visual presentation in understanding the theory and application of mathematical statistics. Pearson E. S.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **A119**, № 2, 125—146, Discuss., 146—149 (англ.)

Статья представляет вступительную речь автора в качестве президента Королевского статистического общества и содержит историко-описательный обзор развития геометрических представлений в статистике. Большая часть статьи посвящена геометрическим диаграммам для различных задач, как-то: испытание разности между средними, дисперсионный анализ, ковариационный анализ, предварительное изучение множества данных в целом. S. S. Wilks

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 7, 606

10219. Измерение отношений для U-образного распределения. Бос, Сен (Measurement of attitudes for U-shaped distribution. Bose P. K., Sen P. K.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1958, 8, № 29, 31—42 (англ.)

U-образное распределение определяется формулой

$$f(x)\,dx = \left[H - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right] dx \text{ для } -\lambda \leqslant x \leqslant \lambda,$$

$f(x)\,dx = 0$ для остальных x, где H, λ — константы, связанные между собой.

Определяется „стандартное" U-распределение, для которого $\lambda = 2{,}054$ и $H = 0{,}4771178$. Табулируются квантили этого распределения и условные средние для промежутков между квантилями. Дается пример использования этих таблиц. Ю. А. Веретенников

10220. Сравнение эффективности выборок с возвращением и без возвращения, когда дисперсия совокупности неизвестна. Козневская (Comparison of the efficiency of drawing samples with and without replacement when the variance of the general population is unknown. Koźniewska I.), Colloq. math., 1957, **4**, № 2, 232—238 (англ.)

Из основной совокупности, содержащей N элементов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$, случайно выбирается n элементов. Параметры совокупности оцениваются по выборке. Из двух оценок более эффективной считается та, у которой меньше дисперсия. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{x}^*$ — средние арифметические выборки с возвращением и без возвращения соответственно, m_2 и m_2^* — выборочные дисперсии смещенные, M_2 и M_2^* — несмещенные и a_2 и a_2^* — несмещенные вторые моменты относительно среднего совокупности μ.

Доказываются следующие неравенства для дисперсий этих оценок:

$$D(a_2^*) < D(M_2) < D(M_2), \quad D(a_2^*) < D(a_2) < D(M_2).$$

Для выполнения неравенства $D(M_2^*) < D(a_2)$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициент эксцесса совокупности, γ_2, удовлетворял неравенству

$$\gamma_2 \geqslant 1 + \frac{2(N-n)(N-n-1)(N-2)}{n^2(N-1)^2 - n(4N^2 - 5N - 1) + N(5N-7)}.$$

П. А. Строганов

10221. Ограничения и подбор в выборках из двумерных нормальных распределений. Коэн (Restriction and selection in samples from bivariate normal distributions. Cohen A. Clifford, Jr.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 271, 884—893 (англ.)

Сжатое изложение последних результатов автора и других об оценках параметров по методу максимального правдоподобия для ситуаций, указанных в заглавии. В некоторых случаях изложение является новым. Представлен иллюстративный числовой пример.

Z. W. Birnbaum

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 639

10222. О сингулярной функции $G_k = (1-at)^k$ F и ее статистическое истолкование. Хосокава Масакадзу, Мино Мицутами, Сэйбуцу токэйгаку дзасси, 1956, **4**, № 3, 235—241 (японск.)

10223. О статистических максимальных, минимальных и частных средних значениях. Манабэ (Manabe), Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ., 1958, **31**, № 2, 100—105 (японск.)

10224. Общие выражения для сингулярных функций, включающие биномиальные коэффициенты. Хосокава Масакадзу, Мино Мицутами, Сэйбуцу токэйгаку дзасси, 1956, **4**, № 4, 327—338 (японск.)

10225. Расхождение. Ланденна (La dissomiglianza. Landenna Giampiero), Statistica, 1956, **16**, № 1, 21—57 (итал.)

Пусть X и Y — две случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Фреше (Fréchet M., Ann.Univ. Lyon, 1951, SA, **3**, № 14, 53—77) ввел индекс расхождения $d_{XY}^{(\tau)}$ порядка τ, определяет по формуле

$$d_{XY}^{(\tau)} = \min \sqrt[\tau]{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |X-Y|^{\tau}\, d\Phi(x,y)},$$

где минимум берется по семейству двумерных распределений $\Phi(x, y)$, удовлетворяющих условиям $\Phi(x, \infty) = F(x)$, $\Phi(\infty, y) = G(y)$.

В первой части статьи изучаются свойства этого индекса.

Среди прочих свойств, интересен следующий: $d_{XY}^{(\tau)}$ выражается через плотности распределений $F(x)$ и $G(x)$, если только они существуют.

Во второй части выводится состоятельная асимптотически несмещенная оценка для $d_{XY}^{(1)}$. А. Prékopa

10226. Быстрая оценка коэффициента регрессии. Бартон, Касли (A quick estimate of the regression coefficient. Barton D. E., Casley D. J.), Biometrika, 1958, **45**, № 3—4, 431—435 (англ.)

Пусть имеется n независимых наблюдений двумерной случайной переменной (x, y), где $E(y \mid x) = \alpha + \beta x$, а α и β — неизвестные постоянные. Пусть компоненты x упорядочены так, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$, и пусть y_i $(i = 1, \ldots, n)$ — второй элемент пары, содержащей x_i. Обозначим

$$\overline{x_k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i, \quad \overline{x'_k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n-i+1},$$

$$\overline{y_k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i; \quad \overline{y'_k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_{n-i+1}.$$

Предлагается следующая быстрая несмещенная оценка параметра β: $b' = \dfrac{\overline{y'_k} - \overline{y_k}}{\overline{x'_k} - \overline{x_k}}$.

Эффективность оценки b' сравнивается с эффективностью оценки b, полученной методом наименьших квадратов. Для случая, когда (x, y) имеет двумерное нормальное распределение, найдены оценки для k, максимизирующих эффективность b'. Е. А. Баваров

10227. Оценки наибольшего правдоподобия для параметров многомерного нормального распределения, когда некоторые наблюдения отсутствуют. Андерсон (Maximum likelihood estimates for a multivariate normal distribution when some observations are missing. Anderson T. W.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 278, 200—203 (англ.)

Указан общий метод, позволяющий вычислить оценки наибольшего правдоподобия для параметров многомерного нормального распределения в тех случаях, когда у части элементов выборки некоторые компоненты неизвестны. Л. Н. Большев

10228. Точная форма некоторых инвариантов для распределений, допускающих достаточные статистики. Хузурбазар (Exact forms of some invariants for distributions admitting sufficient statistics. Huzurbazar V. S.), Biometrika, 1955, **42**, № 3-4, 533—537 (англ.)

Джеффрис (Jeffreys H., Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 1946, **186**, 453—461) предложил в качестве инвариантных мер „расстояния" между двумя функциями плотности p и q интегралы от $(p-q)\log p/q$ и $\left|p^{\frac{1}{m}} - q^{\frac{1}{m}}\right|^m$ (m — положительно и четно). Автор подсчитывает эти меры в случае, когда p и q принадлежат многопараметрическому семейству Купмана—Дармуа. J. Kiefer

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 380

10229. О критерии выявления грубых наблюдений. Кудо (On the testing of outlying observations. Kudo A.), Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 1, 67—76 (англ.)

Согласно нулевой гипотезе случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково нормально распределены с параметрами (a, σ). В качестве альтернативных гипотез рассматриваются случаи, когда одна из случайных величин имеет математическое ожидание, превышающее a. Предполагается, что имеются еще две группы независимых случайных величин: $\eta_1, \ldots, \eta_m$ (распределены нормально с параметрами (a, σ) и $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ (распределены нормально с параметрами (m, σ)). Значения параметров a, m и σ неизвестны. В терминах теории решающих функций устанавливается, что в этих условиях оптимальной статистикой для проверки нулевой гипотезы является $\lambda = (x - \overline{x})/S$, где $x = \max x_i$, $\overline{x} = (n\overline{\xi} + m\overline{\eta_i})/(n+m)$, S^2 — оценка для σ^2, построенная по всем трем выборкам в предположении, что нулевая гипотеза верна. При $s = m = 0$ статистика λ совпадает со статистикой Н. В. Смирнова, при $s = 0$, $m \neq 0$ — со статистикой Наира. Л. Н. Большев

10230. О статистическом сравнении двух биномиальных последовательностей. Кришна-Айер, Бхаттачария (On some statistics comparing two binomial sequences. Krishna Iyer P. V., Bhattacharyya M. N.), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1955, **7**, № 1-2, 187—217 (англ.)

Рассматриваются две выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$, причем каждая из величин x и y может принимать только два различных значения 0 или 1. Предлагаются критерии для проверки гипотезы о том, что случайные величины x и y одинаково распределены и вероятности их возможных значений равны соответственно p и q. Для проверки этой гипотезы предлагаются две статистики

$$X_s = \sum_{r=1}^{n}(x_r - y_r) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{r-1}^{n-i}\{(x_r - y_{r+i}) + (x_{r+i} - y_r)\},$$

$$Y_s = \sum_{r=1}^{n}|x_r - y_r| + \sum_{i=1}^{s}\sum_{r=1}^{n-i}\{|x_r - y_{r+i}| + |x_{r+i} - y_r|\}, \quad s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Показывается, что при $n \to \infty$ величины X_s и Y_s после соответствующей нормировки будут распределены по нормальному закону. Методом производящих функций вычислены точные распределения статистик X_0, $1 \leqslant n \leqslant 6$, и Y_1, $2 \leqslant n \leqslant 6$.

Приведены рекуррентные соотношения, с помощью которых точные распределения этих статистик могут быть вычислены при больших значениях n. Вычислена мощность указанных критериев при нулевой гипотезе $p = q = \frac{1}{2}$ и альтернативных $p_1 = q_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 0{,}1$ (0,1) (0,4) (p_1 — вероятность нуля для величин x, p_2 — вероятность нуля для величин y).

Настоящая работа является продолжением работы Кришна-Айера. (РЖМат, 1954, 4866). П. Ф. Беляев

10231. Некоторые быстрые решающие методы в многомерном и одномерном анализе. Рой (On some

quick decision methods in multivariate and univariate analysis. Roy J.), Канкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 1, 77—78 (англ.)

Дана p-мерная случайная величина x с непрерывной плотностью распределения $f(x)$. Для проверки простой гипотезы H_0 ($f=f_0$) против простой конкурирующей гипотезы H_1 ($f=f_1$) на основе n независимых испытаний $x_1, \ldots, x_n$ величины x предлагается следующий критерий:

Пусть ω — подмножество p-мерного евклидова пространства такое, что $\pi_1 > \pi_0 > 0$, где $\pi_i = P\{x \in \omega | H_i\}$, $i = 0, 1$. Пусть

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in \omega, \\ 0, & \text{если } x_i \notin \omega, \end{cases}$$

и пусть $d = \sum_{i=1}^{k} y_i$.

Тогда

$$P\{d = x | H_i\} = \binom{n}{x} \pi_i^x (1-\pi_i)^{n-x}, \; i = 0, 1.$$

Обозначим через c наименьшее целое число, удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{x=c+1}^{n} \binom{n}{c} \pi_0^x (1-\pi_0)^{n-x} \leqslant \alpha.$$

Тогда гипотеза H_0 отвергается, если $d > c$.

Мощность β этого критерия находится из выражения

$$\beta = P\{d > c \mid H_1\} = \sum_{x=c+1}^{n} \binom{n}{x} \pi_1^x (1-\pi_1)^{n-x}.$$

Рассматриваются задачи о наилучшем выборе множества ω. В частности, рассмотрен вопрос о нахождении ω, минимизирующего n при наперед заданных ошибках первого и второго рода. Е. А. Баваров

10232. Проблема Беренса—Фишера для коэффициентов регрессии. Фрейзер (The Behrens-Fischer problem for regression coefficients. Fraser D. A. S.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 390—402 (англ.)

Пусть U_α ($\alpha = s, \ldots, m$) — независимые нормально распределенные случайные величины с общей дисперсией σ^2 и средними $E(U_\alpha) = \sum_1^p x_{i\alpha}\beta_i + \sum_1^q y_{j\alpha}\tau_j$, где x, y — неизвестные переменные σ, β_i, τ_j — неизвестные параметры. Пусть U_α^* ($\alpha = 1, \ldots, n > m$) — другое множество величин, независимое от ранее указанного и с теми же свойствами; соответствующие параметры и переменные обозначены через σ^*, $\chi_{i\alpha}^*$ и т. д. Требуется испытать гипотезу $\tau_1^* = \tau_1, \ldots, \tau_q^* = \tau_q$. В случае $q = 1$ автор обобщает решения, данные Шеффе для $p = 0$ и Баранкиным для $p = 1$ и снова приходит к t-критерию. Новый результат — доказательство того, что t-критерий является наиболее мощным среди очень большого класса критериев. В случае $q > 1$ такой класс неизвестен.

Обсуждаются асимптотически наилучший и точный критерий правдоподобия. G. Elfving

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 142

10233. К критерию в одновременном анализе дисперсии. Рамачандран (On the simultaneous analysis of variance test. Ramachandran K. V.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 2, 521—528 (англ.)

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ и S — взаимно независимые случайные величины, следующие распределению χ^2 с $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и m степенями свободы соответственно и пусть

$$F_i = \frac{S_i}{S} \frac{m}{t_i}.$$

Автор занимается проблемой вычисления распределения $P\{F_i \leqslant a_i;\ i = 1, 2, \ldots, k\}$. Полученный многократный интеграл разлагается в ряд, который однако неудобно табулировать. Более простой результат получен в специальном случае $t_1 = t_2 = \ldots = t_k$ и $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$. Здесь табулирование решений уравнения

$$P\{F_i \leqslant a,\ i = 1, 2, \ldots, k\} = 0{,}95$$

проводится для различных значений t и m.

Далее, если S_i следует нецентральному χ^2-распределению с теми же степенями свободы и с параметрами нецентральности λ_i, то $P\{F_i \geqslant a_i,\ i = 1, \ldots, k\}$ — монотонная функция по каждому λ_i, т. е. функция мощности известного критерия в одновременном анализе дисперсии. D. G. Chapman

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 1

10234. Допустимость некоторых инвариантных статистических критериев, содержащих параметры сдвига. Леманн, Штейн (The admissibility of certain invariant statistical tests involving a translation parameter. Lehmann E. L., Stein C. M.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 473-479 (англ.)

Автор выводит условия допустимости наиболее мощного инвариантного критерия для испытания одного семейства параметров положения относительно другого. E. Lukacs

Перевод Math. Revs, 1954, **15**, № 1, 46

10235. О знаках полных и частных коэффициентов корреляции. Рейерсёль (A note on the signs of gross correlation coefficients and partial correlation coefficients. Reiersøl Olav), Biometrika, 1956, **43**, № 3-4, 480—482 (англ.)

Из теоремы Мозака (Metzler L. A., Econometrika, 1950, **18**, 340) следует ряд предложений относительно матрицы коэффициентов корреляции системы переменных.

1. Если полные коэффициенты корреляции все отрицательны, то и частные коэффициенты корреляции всех порядков также отрицательны.

2. Если частные коэффициенты корреляции высшего порядка все положительны, то частные коэффициенты низших порядков и полные коэффициенты корреляции также положительны.

3. Если все полные коэффициенты корреляции могут быть сделаны отрицательными или все частные коэффициенты корреляции высшего порядка могут быть сделаны положительными коградиентным изменением знаков, то при неизмененных знаках каждый частный коэффициент корреляции любого порядка имеет тот же знак, что и соответствующий полный коэффициент корреляции. Я. И. Лукомский

10236. Ранговый анализ опыта с неполными блоками. III. Несколько результатов оценки для больших выборок и мощность метода парных сравнений. Брэдли (Rank analysis of incomplete block designs. III. Some large-sample results on estimation and power for a method of paired camparisons. Bradley Ralph Allan), Biometrika, 1955, **42**, № 3-4, 450—470 (англ.)

Часть I см. Biometrika, 1952, **39**, 324—345; часть II см. РЖМат, 1956, 4692.

Для некоторых критериев значимости при условиях нулевых гипотез даны приближения к выборочным распределениям статистик для случая больших выборок. Сравниваются мощности метода дисперсионного анализа и критериев мультибиноминального и парных сравнений. Э. И. Вилкас

10237. Дисперсионный анализ данных в многосторонней классификации с неравным количеством наблюдений в каждой ячейке. Рао (Analysis of dispersion for multiply classiffied data with unequal numbers in cells.

Rao C. Radhakrishna), Санкия, Indian J. Statist., 1955, 15, № 3, 253—280 (англ.)

Обо новываются некоторые вычислительные приемы в ди пер ионном анализе много торонне клас ифицированных данных двумя и более признаками при разном числе наблюдений в ячейках. Из резюме автора

10238. Вспомогательные таблицы для двувыборо ного критерия Вилкоксона. Залберг (Auxiliary tables for Wil oxon's two sample test. Zaalberg J.), Statist. neerl., 1958, 12, № 4, 265—253 (англ.; рез. гол.)

Вилкок он предложил критерий для оценки гипотезы, что две выборки $x_i\,(i=1,\ldots,m)$, $y_j\,(j=1,\ldots,n)$ взяты из одной и той же овокупности. Критерий основан на стати тике W, которая для больших значений m и n (больших 10) распределена приближенно по нормальному закону со средним $\mu=m\cdot n$ и ди персией $\sigma^2=\frac{mn\,(N^3-D)}{3N\,(N-1)}$, где $N=m+n$ — общее число наблюдений, $D=\sum_{i=1}^{k}t_i^3$, k — число групп, в каждой из которых наблюдения равны, t_i — число наблюдений в такой i-й группе.

Вводятся величины

$$\sigma_u=\frac{mn\,(N+1)}{3},\quad A=\frac{100mn}{3N\,(N-1)}.$$

Тогда

$$\sigma^2=\sigma_u^2-\frac{A}{100}\,(D-N).$$

Для вычисления нормальной аппроксимации ра смат риваемого критерия в работе со тавлены таблицы для σ_u^2 и A (для $m=2,\ldots,25$ и $n=11,\ldots,25$ и $m\leqslant n$).

В. И. Бабкин

10239. О числе неотрицательных точек эмпири еской функции распределения относительно функции распределения. Чэн Пин (в подл. Чэнь Пинь), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, 8, № 3, 333—347 (кит.; рез. русск.)

Пу ть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из распределения $F(x)$, $F_n(x)$ — соответствующая этой выборке эмпирическая функция ра пределения. Неотрицательными качками функции $F_n(x)$ относительно $F(x)$ называются точки x_k, в которых

$$F_n(x_k+0)>F(x_k)\ \text{ и }\ F_n(x_k)<F_n(x_n+0).$$

Пусть τ_n — число таких скачков.

Даются точные выражения для функции ра пределения величины τ_n и ее математического ожидания, а именно:

$$P\{\tau_n\leqslant nt\}=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{n!}{n^n}\sum_{\alpha=1}^{[nt]}\{[nt]-\alpha+1\}\dfrac{\alpha^{\alpha-1}\,(n-\alpha)^{n-\alpha}}{\alpha!\,(n-\alpha+1)!}, & 0\leqslant t<1\\ 1 & t\geqslant 1.\end{cases}$$

и

$$E(\tau_n)=\frac{n}{2}+\frac{n!}{2n^n}\sum_{L=1}^{u}\frac{L^l\,(n-L)}{L!\,(n-L)!}.$$

По резюме автора

10240. Некоторые статистические методы, связанные с сериями событий. Кокс (Some statistical methods coune ted with series of events. Cox D. R.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, **B17**, № 2, 129—157 (англ.)

Лекция, прочитанная перед Иследователь кой секцией Королевского татистического общества, в которой обсуждается ряд проблем статистического анализа, связанного со случайными событиями, происходящими в пространстве или во времени. Среди обсуждаемых вопросов наиболее важные следующие: критерий случайности, компоненты диспер ии, корреляция между обытиями различных типов. Трактовка ча то использует теорию больших выборок. Статья опровождает я подробным обсуждением некоторых ме одов и стати тик, используемых автором, в котором приняли уча тие Пирсон, Бартлетт, Льюис, Джоуэтт, Бартоломью. I. Vincze

10241. Доверительные интервалы для параметров в марковских авторегрессионных схемах. Дейвид (Confidence intervals for parameters in Markov autoregressive s hen es. David S. T.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **B16**, № 2, 195—203 (нгл.)

Изучаются доверительные ин ервалы для параметра ρ марков кой авторегрессионной схемы $u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-1}$, где „возмущающие" члены ε_t имеют овме тное нормальное ра пределение. Предполагается, что $u_{n+1}=u_1$, т. е. циркулярно ть. Автор и ледует два разных метода, предложенных Кендаллом и Вальдом соответственно. Эти метод ы о нованы на факте, что в разбираемом случае ра пределения стати тик $(n-1)\,(\mu-\bar{\varepsilon})^2/s_\varepsilon^2$ и $\sum(\varepsilon_t-\bar{\varepsilon})(\varepsilon_{t-1}-\bar{\varepsilon})/\sum(\varepsilon_t-\bar{\varepsilon})^2$ известны и выражают я через ρ и тати тиче кие данные u_t. После подробного обсуждения полученных результатов, автор рекомендует второй метод. I. Vincze

10242. Условия достаточности в регулярных марковских цепях и некоторых случайных блужданиях. Гани (Sufficiency conditions in regular Markov chains and certain random walks. Gani J.), Biometrika, 1956, **43**, № 3-4, 276—284 (англ.)

Известно, что для положительно регулярных марковских цепей с конечным числом состояний, переходные вероятности вида

$$p_{ij}(\Theta)=a_{ij}\exp\{K_{ij}\Lambda_1(\Theta)+\lambda_2(\Theta)\}$$

допу кают достаточную оценку Θ по реализациям цепи, начинающих я из фик ированных состояний и представляющих фик ированное число переходов. Рассматривается вопрос, будут ли допускать достаточную тати тику переходные вероятности, имеющие тот же вид в других конечных регулярных, но не положительно регулярных марков ких цепях. Для цепей с неприводимым подмножеством двух или более состояний, в которых реализация начинается с фиксированного состояния и состоит из фиксированного чи ла переходов, находится, что эти вероятности допу кают оценку максимального правдоподобия для функции $g(\Theta)=-\lambda_2'(\Theta)/\Lambda_1'(\Theta)$, которая является достаточной и не смещенной. J. Wolfowitz

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 4, 342

10243. О распределении последовательных сумм для выборки из экспоненциальной совокупности. Бхате (A note on the distribution of the successive sums of samples from an exponential population. Bhate D. H.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1958, 8, № 29, 13—19 (англ.)

Пусть X — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону: $p(x)\,dx=e^{-x}dx$; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — последовательные значения этой величины. В заметке дается формула для плотности распределения сумм $X_m=\sum_{j=1}^{m}x_j$ при $a_i<x_i<b_i$ для $i=1,\ldots,m-1$ (a_i, b_i — функции от i), получаемая методом характеристических функций и выраженная в общем виде с помощью операторов. Границы a_i и b_i полагаются линейными функциями от i и параллельны-

ми, хотя указано, что тем же методом выражение плотности может быть получено и в общем виде. Распределение последовательных сумм указанного вида используется в критериях последовательного типа для определения вероятности принять решение на i-м шаге.

Приводится численный пример подобного использования этой формулы в случае, когда $p(x_i) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ и когда нужно выбрать одно из двух значений для параметра θ. Если распределение x_i нормально, указанные формулы могут быть использованы, если наблюденные значения объединяются попарно, так как в этом случае $(x_{i-1}^2 + x_i^2)$ распределена как χ^2 с двумя степенями свободны, т. е. по экспоненциальному закону.

Ю. А. Веретенников

10244. Заметка о рисках ошибки в последовательном критерии по отношению. Медхи (A note on the risks of error involved in the sequential ratio test. Medhi J.), Biometrika, 1956, **43**, № 1, 231—234 (англ.)

Автор вычисляет вероятность приостановки и принятия неверного решения после одного, двух или трех наблюдений при испытании, какое из двух чисел является средним значением нормального распределения. Результат служит иллюстрацией того, насколько консервативны могут быть нижние границы Вальда для вероятности принятия неверного решения. J. Kiefer

Перевод из Math Revs, 1956, **17**, № 11, 1220

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

10245. Об общих минимаксных теоремах. Сьон (On general minimax theorems. Sion Maurice), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 1, 171—176 (англ.)

Заметка посвящена обобщениям минимаксной теоремы Неймана. Наиболее интересный результат: Пусть M и N — выпуклые пространства, одно из которых компактно; пусть на $M \times N$ определена функция $f(\mu, \nu)$ квазивогнутая по μ и квазивыпуклая по ν, а также полунепрерывная сверху по μ и полунепрерывная снизу по ν. Тогда $\max\limits_{\mu \in M} \min\limits_{\nu \in N} f(\mu, \nu) = \min\limits_{\nu \in N} \max\limits_{\mu \in M} f(\mu, \nu)$, причем, как показывает пример, условия полунепрерывности сверху и снизу не могут быть отброшены даже, если M и N конечномерны.

Затрагивается случай, когда $f(\mu, \nu)$ — функция, подобная вогнутой по μ, и подобна выпуклой по ν.

О. В. Шалаевский

10246. Обобщение критерия Лапласа для решающих проблем. Удзава (A generalization of Laplace criterion for decision problems. Uzawa Hirofumi), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, **7**, № 2, 123—129 (англ.)

Рассматривается σ-компактное пространство Ω с группой Σ преобразований Ω такой, что ни одно открытое множество, отличное от пустого и Ω, не переводится в себя ни одним элементом Σ. Пусть мера μ, заданная на Ω, инвариантна относительно движений из Σ. Всякое выпуклое непустое множество X неотрицательных функций, заданных на Ω, ограниченных и непрерывных, замкнутое относительно поточечной сходимости, называется рандомизированной нормальной проблемой, если существует такое $K < \infty$, что для всех $x \in X$ $\int x d\mu < K$. Совокупность G рандомизированных нормальных проблем называется общей проблемой, если, каковы бы ни были $X \in G$, $\alpha > 0$ и непрерывные функции $x_1, \ldots, x_s \geqslant 0$, интегрируемые по μ: 1) множества $\alpha X + x_i = \{\alpha x + x_i;\ x \in X\}$ принадлежат G; 2) выпуклая линейная оболочка x_i, $1 \leqslant i \leqslant s$ лежит G; 3) любая совокупность неотрицательных функций таких, что $\int x d\mu \leqslant \alpha$ лежит в G.

Если в системе X функций на Ω найдется такое x_0, что $x \geqslant x_0$, $x_0 \neq x$ для всех $x \in X$, то x_0 называется эффективной функцией из X.

Отображение C, сопоставляющее каждому X из общей проблемы G множество $C(X)$, называется рациональным выбором, если 1) $C(X)$ содержится в множестве эффективных функций из X; 2) если $Y \subset X$ и X, $Y \in G$, то $C(Y) \supset C(X) \cap Y$; 3) для любого X $C(X)$ выпукло и замкнуто относительно поточечной сходимости; 4) если $Y = \alpha X + y$, где $X \in G$, $\alpha > 0$ и y — непрерывная ограниченная функция на Ω, $y \geqslant 0$, $\int y d\mu < \infty$, то $C(Y) = \alpha C(X) + y$; 5) если $X \in G$, $\sigma \in \Sigma$ и X не изменяется при сдвиге аргумента функций из X с помощью σ, то $C(X)$ обладает этим же свойством.

Наконец, для любого множества X функций на Ω совокупность $L(X) = \{x_0;\ x_0 \in X, \int x_0 d\mu = \max\limits_{x \in X} \int x d\mu\}$ называется множеством Лапласа для $L(X)$.

Теорема. Если существует инвариантная мера μ, то для любой общей проблемы G рациональный выбор $C(X)$ совпадает с $L(X)$.

В частности, теорема 1 справедлива для множества Ω, состоящего из конечного числа элементов или являющегося n-мерным евклидовым пространством.

М. Г. Шур

10247. Проблемы измерения величин с точки зрения теории индукции и решений. Черчмэн (Problems of value measurement for a theory of induction and decisions. Churchman C. West), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 5. Berkeley—Los Angeles, 1956, 53—59 (англ.)

Изложение общих соображений о необходимости построения теории измерения с точки зрения наиболее экономного накопления данных, позволяющих получить требуемое решение. А. А. Иванов

10248. Вложение капитала в различные отрасли. Моррис (Diversification. Morris William T.), Manag. Sci., 1958, **4**, № 4, 382—391 (англ.)

Пусть имеется количество X продукта, которые можно разделить на 2 части x_1 и x_2 ($x_1 + x_2 = X$), причем каждая доля продукта, используемая по-разному, с вероятностью p_i дает доход $k_i x_i$, а с вероятностью $1 - p_i - k_i x_i$ ($i = 1, 2$). Пусть y — суммарный доход, а $V(y)$ — его функция полезности. Показано, что, в зависимости от вида функции V, иногда целесообразно с целью максимизации $E[V(y)]$ как x_1, так и x_2 брать отличными от 0. Такое разбиение часто выгодно и при других постановках вопроса (например, при максимизации вероятности достижения значением y определенного уровня). С. С. Кислицын

10249. Стремление к изъятию капитала, как поведение, учитывающее риск. Тобин (Liquidity preference as behavior towards risk. Tobin J.), Rev. Econ. Studies, 1958, **25(2)**, № 67, 65—86 (англ.)

Продолжение анализа одного из основных соотношений модели Кейнса — связи между стремлением к превращению капитала в денежную форму и нормой прибыли. При некоторых, довольно далеких от действительности, предположениях, выводятся функциональные зависимости, отражающие связь между стремлением к превращению капитала в денежную форму и степенью риска вложения его в дело. А. А. Иванов

10250. Модель политики вложений капитала в различные отрасли. Ансофф (A model for diversification. Ansoff H. I.), Manag. Sci., 1958, **4**, № 4, 392—414 (англ.)

Качественное описание условий, при которых фирме выгоднее направлять часть капитала в новые отрасли и видоизменять функции продуктов, выпускаемых ранее, а не просто увеличивать продукцию. Работа носит нематематический характер. С. С. Кислицын

10251. Разностный контроль прибыли — модернизация анализа безубыточности. Виллерс (Differential profit control—a modernization of the break-even analysis. Villers Raymond), J. Industr. Engng, 1957, 8, № 4, 243—249 (англ.)

Обычно, при некоторых предположениях, зависимость размера прибыли y от размера продажи x может быть выражена уравнением $y = a + bx$. Вычисление каждый раз коэффициентов a и b представляет большую и кропотливую работу. Поэтому автор предлагает пользоваться уравнением $y = (a + \Delta a) + (b + \Delta b)x$, для которого коэффициенты a и b вычисляются время от времени, скажем, раз в год, а для вычисления Δa и Δb следует использовать происходящие изменения в условиях производства и продажи, например, некоторое увеличение расходов на рекламу, рост производительности труда и др. На нескольких примерах показано как производить вычисления Δa и Δb по соответствующим данным. Л. И. Горьков

10252. Интразитивность, полезность и совокупность индивидуальных предпочтений. Мей (Intrasitivity, utility, and the aggregation of preference patterns. May Kenneth O.), Econometrica, 1954, 22, № 1, 1—13 (англ.)

Наличие транзитивности предпочтения при выборе является основой для установления функции «полезности». Автор приводит экспериментальные данные и теоретические рассуждения, из которых следует, что упомянутая выше транзитивность не всегда имеет место. Формулируются некоторые условия, обеспечивающие транзитивность предпочтения и таким образом возможность установления функции «полезности».

А. А. Иванов

10253. Армстронг и теория спроса. Грин (Mr. Armstrong and the theory of demand. Green H. A. J.), Metroeconomica, 1958, 10, № 2, 74—80 (англ.)

В теории спроса обычно постулируется существование вещественной однозначной функции полезности (utility function) $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, где q_i — количество предмета потребления i. Потребитель стремится максимизировать эту функцию при определенной сумме своих затрат. С помощью функции U устанавливаются следующие бинарные отношения между любыми партиями товаров x и y: xPy (партия x предпочитается партии y), если $U(x) > U(y)$; xIy (выбор партии безразличен), если $U(x) = U(y)$.

В 1939 г. Армстронг предложил считать xIy тогда и только тогда, когда $|U(x) - U(y)| < c$, где c — некоторое фиксированное число. Это определение нарушает транзитивность отношения I. В реферируемой статье автор, анализируя дальнейшие последствия принятия определения Армстронга, приходит к выводу, что, несмотря на естественность этого последнего определения, его принятие значительно обедняет теорию спроса. С. С. Кислицын

10254. Заметка о прогнозах на будущее и устойчивости. Эрроу, Нерлав (A note on expectations and stability. Arrow Kenneth J., Nerlove Marc), Econometrica, 1958, 26, № 2, 297—305 (англ.)

Спрос и предложение, вообще говоря, зависят не только от текущих цен, но также и от прогноза на будущее.

Показано, что при некоторых предположениях система рынков обладает динамической устойчивостью. Функция „будущего" предполагается более сложной, чем функция, первоначально предложенная Хиксом. Л. И. Горьков

10255. Разностные уравнения в эконометрике. Афанасиадис (The difference equations in the econometrics), Спудэ, 1955—1956, 6, № 3-4, 46—55 (греч.)

Подробно решаются уравнения вида $y(t) = \alpha_1 y(t-1) + \alpha_2 y(t-2) + \ldots + \alpha_n y(t-n) + \beta$.

И. В. Романовский

10256. Элементарный метод для системы производства—потребления. Уонг (Un procedimento elementare per un sistema di interdipendenze strutturali. Wong Y. K.), Industria (Ital.), 1956, № 1, 33—40 (итал.)

Без использования принципа неподвижной точки доказывается неотрицательность решения системы уравнений линейной экономической модели:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = h_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $a_{ij} \geqslant 0$, $a_{ii} < 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1$; $d_n = \det(\delta_{ij} - a_{ij}) \neq 0$, $h_i \geqslant 0$. Представляя решение этой системы в виде: $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(n)} h_j / d_n$, автор изучает некоторые свойства коэффициентов $b_{ij}^{(n)}$. С. С. Кислицын

10257. Приближенный метод численного решения открытой леонтьевской модели затрат-выпуска. Кимура (An approximation method in numerical computation of the Leontief's open input-output model. Kimura Hitosi), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, 7, № 2, 115—122 (англ.)

Система линейных уравнений, описывающая открытую модель Леонтьева, приводится к виду:

$$X_i = \frac{1}{b_{ii}} \left\{ Y_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} X_j \right\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $b_{ii} = 1 - a_{ii}$, a_{ij} — технические коэффициенты, Y_i — окончательный спрос на продукт i-й отрасли.

Задача состоит в определении объема продукции X_i, выпускаемой i-й отраслью ($i = 1, \ldots, n$).

Первое приближение строится следующим образом

$$X_i^{(1)} = X_i' + \frac{1}{b_{ii}} (Y_i - Y_i'),$$

где X_i' и Y_i' — те данные, которые использовались для нахождения технических коэффициентов a_{ij}.

В качестве второго приближения при определенных условиях берется либо $X_i^{(2)} = X_i^{(1)} + X_i^{(1)} a$, $i = 1, \ldots, n$, либо $X_i^{(3)} = X_i^{(1)} + X_i' a$, $i = 1, \ldots, n$ где

$$a = \frac{X_i' - \frac{Y_i''}{b_{ii}} \sum_{j \neq i} \frac{Y_j - Y_j'}{b_{jj}}}{X_i' \qquad \sum_{j \neq i} X_j'}.$$

Процесс аппроксимации можно продолжить методом последовательных приближений, принимая за начальное значение либо $X_i^{(2)}$, либо $X_i^{(3)}$. Имеются опечатки.

В. Н. Соколова

10258. К вопросу о выборе между инвестициями и различными сроками обращения. Виннинг (En note om valget mellem investeringer med forskellig løbetid. Winding Poul), Nationaløkon. tidsskr., 1958, 96, Tillaegesh., 373—382 (датск.)

10259. Прогресс исследования операций для промышленности в США. Херц (Progress of industrial operations research in the United States. Hertz David Bendel), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 440—453 (англ.)

Описывается прогресс в работе по исследованию операций для американской промышленности со времени опубликования брошюры «Невоенные приложения исследования операций» (Operations research with special reference to non-military applications, Nat. Res. Council; April, 1951). Автор утверждает, что в то время американские промышленники не понимали и не признавали применения исследования операций в промышленности, но к 1957 г. в этом отношении был достигнут быстрый и энергичный прогресс: многие компании организовали свои группы по исследованию операций, другие используют не подчиненные им группы, а большинство остальных готовятся осуществить это в будущем. Утверждение основано на анализе опроса 5325 компетентных лиц посредством специального вопросника, приведенного в статье. Анализ ответов позволил также составить ряд таблиц. Сюда относится таблица активности исследования операций, таблица качественного и количественного состава групп по исследованию операций, таблица проблематики исследования операций и таблица результативности работ в этой области. Данные всех таблиц приводятся дифференцированно по отраслям промышленности. А. А. Иванов

10260. Вычислительные средства исследования операций. Финетти (Gli strumenti calcolatori nella ricerca operativa. Finetti Bruno de), Civiltà macchine, 1957, **5**, № 1, 18—21, 85 (итал.; рез. англ.)

Статья представляет краткое изложение доклада на Первом итальянском совещании по вопросам исследования операций (5—6 декабря 1956). Дается общее представление о роли комбинаторики, теории случайных процессов, дифференциальных уравнений в развитии теории операций. Большое внимание уделено методу Монте-Карло как средства моделирования и численной оценки решений. Б. В. Гнеденко

10261. Границы применения научного метода в теории управления. Уэйнуэрм (Limitations of the scientific method in management science. Weinwurm Ernest H.), Manag. Sci., 1957, **3**, № 3, 225—233 (англ.)

Рассматривается вопрос о значении и границах применения точных методов исследования операций при решении различных проблем управления. Рассуждения носят общий характер и имеют целью, по выражению самого автора, не представление окончательного вывода, но привлечение внимания к важным, с точки зрения дальнейшего развития теории управления, проблемам. А. А. Иванов

10262. Некоторые современные достижения в исследовании операций на транспорте. Крейн (Some recent developments in transportation research. Crane Roger R.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, **4**, № 3, 173—181 (англ.)

Отмечается быстрое расширение деятельности различных групп исследования операций и большие достижения их по решению различных практических проблем транспортного характера. Приводится обширная литература, посвященная этим проблемам. А. А. Иванов

10263. Исследование операций в горнорудной промышленности. Хайфер (Operational research in mining. Hypher R. P.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 285—296 (англ.)

Показывается, что, несмотря на трудности применения исследования операций в горнорудной промышленности, вызываемые ее спецификой, оно все же возможно. Приводятся примеры проблем, которые могут быть подвергнуты анализу. Более детально рассматривается вопрос о транспортировке руды. А. А. Иванов

10264. Исследование операций в Нидерландах. Схафсма (Operations research in the Netherlands. Schaafsma A. H.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 393—395 (англ.)

Анализируется работа группы по исследованию операций в Нидерландах. Приводится таблица задач, с которыми имела дело группа, и применяемых при их решении методов. Основываясь на этой таблице, автор делает следующие заключения: а) имеется лишь небольшая связь между областями приложений и методами исследования операций; б) некоторые методы (например, теория игр) используются весьма редко; в) приложения исследования операций связаны главным образом с планированием и управлением запасами, в то время как проблемы производительности также представляют подходящую область исследования. А. А. Иванов

10265. Система размеров готовой одежды. Ситтит (A size system for ready-made garments. Sittig J.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 398—400 (англ.)

Описывается проблема создания системы размеров готовой одежды, оптимально удовлетворяющей противоречащим требованиям: экономичность производства, с одной стороны, и удобство для потребителей, а следовательно, увеличение объема и уменьшение издержек продажи, с другой. Утверждается, что введение новой системы размеров женской одежды, разработанной после детального изучения проблемы, дало только в Нидерландах около 10 млн. долларов экономии. А. А. Иванов

10266. «Научный метод». Гудив (The «scientific method». Goodeve Charles F.), Papers Internat. Conf. Operat, Res.,, Bristol, Stonebridge Press, 1957, 3—13 (англ.)

Обсуждается термин «научный метод» с точки зрения применения его к методам исследования операций. А. А. Иванов

10267. Исследование операций. Мьёсунн (Kø-teori i operasjonsanalysen. Mjøsund Arne), Bedriftsøkonomen, 1958, **20**, № 9, 643—645, 647—649 (норв.)

10268. Преимущества проверки одновременного действия многих факторов в промышленном исследовании. Блоджетт (The advantages in industrial research of looking at the effects of many variables at the same time. Blodgett R. B.), Tappi, 1957, **40**, № 5, A150—A156 (англ.)

10269. Применение вычислительного процесса динамического программирования для оптимальной загрузки рабочей силы в большой авиационной компании. Бишоп, Роккуэлл (A dynamic-programming computational procedure for optimal manpower loading in a large aircraft company. Bishop Albert B., Rockwell Thomas H.), Operat. Res., 1958, **6**, № 6, 835—848 (англ.)

Описано применение идей динамического программирования при организации работы крупного авиационного завода. В основу анализа положено уравнение стоимости, которое представляет еженедельную оплату различных категорий рабочих. Изменение еженедельной расстановки рабочих в течение рассматриваемого периода, скажем, месяца при заданной кривой спроса, приводит к различным издержкам производства. Оптимальной расстановкой является та, которая минимизирует сумму еженедельных издержек за весь период.

Применение динамического программирования позволяет получить оптимальное решение, а также исследовать решение при изменении некоторых параметров. Процесс решения не зависит от вида уравнения и кривой спроса, при этом для вычислений могут быть использованы табличные данные.

Техника вычислений проиллюстрирована на примере. Л. И. Горьков

10270. Два года линейного программирования. Уайатт (Two years of linear programming. Wyatt J. K.), Operat. Res. Quart., 1958, **9**, № 2, 154—166 (англ.)

Даются начальные сведения о методах линейного программирования и приводятся конкретные примеры его использования. Н. В. Смирнов

10271. Упрощенное решение задачи линейного программирования Хичкока. Адоризио (Soluzione semplificata del problema di Hitchcock nella programmazione lineare. Adorisio Ilio), Ingegneria ferroviaria, 1958, **13**, № 10, 923—930 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Описывается новый метод решения простейшей транспортной задачи, в некотором смысле обратный симплекс-методу. С. С. Кислицын

10272. Простое истолкование симплексных вычислений. Рандолф (A simple explanation of simplex calculations. Randolph Paul H.), J. Industr. Engng, 1958, **9**, № 3, 162—170 (англ.)

Дается описание симплекс-метода, рассчитанное на инженеров-практиков, незнакомых с высшей алгеброй. И. Л. Романовская

10273. Линейное программирование в операциях переработки. Чини (Linear program planning of refinery operations. Cheney L. K.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, **4**, № 1, 9—16 (англ.)

Приводится пример практического использования линейного программирования для составления оптимального варианта переработки бензина. В связи с этим отмечается необходимость улучшения методов решения задач линейного программирования и развития методов решения задач нелинейного программирования. А. А. Иванов

10274. Линейное программирование с помощью вычислительных машин. Линдбергер (Lineär optimering med hjälp av beräkningsmaskiner. Lindberger Arne), Ekonomen, 1958, № 5, 58—66 (шведск.)

Приводится пример на задачу линейного программирования с 18 уравнениями и 34 переменными. О технике расчета, производившегося на машине ИБМ-650, сведений не содержится. С. С. Кислицын

10275. Метод аналогии для задач линейного программирования. Гаццано, Поцци (Un metodo analogico per i problemi di «linear programming». Gazzano Adriano, Pozzi Giuliana), Boll. Centro ricerca operat., 1957, № 5-6, 27—44 (итал.)

Описывается электрическая модель для решения общей задачи линейного программирования методом логарифмического потенциала. Изложение иллюстрируется конкретным примером. С. С. Кислицын

10276. Линейное программирование, его применение на индийской текстильной фабрике. Мортон (Linear programming — an application in an Indian textile mill. Morton G.), Operat. Res. Quart., 1958, **9**, № 3, 198—206 (англ.)

10277. Исследование операций и национальное планирование — разногласие. Хитч (Operations research and national planning—a dissent. Hitch Charles), Operat. Res., 1957, **5**, № 5, 718—723 (англ.)

Изложение расхождения мнений автора статьи и Р. Аккоффа (РЖМат, 1958, 10131) по поводу целесообразности применения методов исследования операций в области национального планирования развития экономики слабо развитых стран. Автор считает, что сложность политической и экономической ситуации в этих странах не позволяет применять с успехом современные методы исследования операций на уровне национального планирования, что гораздо более целесообразным является применение их на уровне проектирования и производства. Нельзя не отметить тенденцию автора к умалению роли государственного аппарата в развитии национальной экономики слаборазвитых стран и к возвеличиванию «духа предпринимательства». А. А. Иванов

10278. Оптимальное ведение складского хозяйства при известном распределении спроса и при предположении, что это распределение имеет годичный цикл изменения. Клингст (Optimale Lagerhaltung bei bekannter Verteilung des Bedarfes und unter der Voraussetzung, daß diese Verteilung einen Jahresgang aufweist. Klingst A.), Unternehmensforschung, 1958, **2**, № 3, 140—147 (нем.)

Рассматривается задача определения количества S, продукта на складе к началу t-го периода длины t_i минимизирующего математическое ожидание суммы стоимости издержек хранения и убытков из-за отсутствия продукта на складе, выражающихся в том, что тогда приходится доставлять товар из другого места по более дорогой цене. Плотность распределения спроса $f_i(x)$ известна. Кроме нахождения S_i, определяется и величина минимума математического ожидания. Для нормального распределения приводятся упрощенные формулы. В формуле (1) на стр. 141 член nC_s лишний. С. С. Кислицын

10279. Разработка и оценка планов выборочного контроля. Дерман, Соломон (Development and evaluation of surveillance sampling plans. Derman C., Solomon H.), Manag. Sci., 1958, **5**, № 1, 72—88 (англ.)

Рассматривается проблема поддержания заданного уровня качества изделий при их хранении, если качество изделий со временем ухудшается.

Пусть имеется k различных партий, каждая из которых содержит N изделий (N велико). Во время хранения эти партии периодически проверяются, причем с этой целью применяются обычные планы статистического приемочного контроля. Если партия выдерживает проверку, то она хранится до следующей проверки; в противном случае она заменяется новой партией приемлемого качества. Эта ситуация возникает тогда, когда хранимые изделия используются в случае крайней необходимости. Цель плана надзора состоит в том, чтобы к любому моменту времени сохранить достаточный запас изделий хорошего качества. Предлагается мера эффективности плана надзора.

Пусть $L_j(p)$ ($j=1,2,\ldots$) есть вероятность принять партию, если доля дефектных изделий в партии равна p; j — число пройденных партией проверок. Предполагается существование „функции ухудшения" $p(t)$, которая означает долю дефектных изделий в партии, хранившейся t единиц времени. Для оценки эффективности планов надзора используются элементы теории цепей Маркова. Особое внимание уделено следующим двум частным случаям: 1) $p(t)=p_0$ при $t<T$ и $p(t)=p_1$ при $t\geqslant T$ ($p_1>p_0$); 2) $p(t)=1-\theta e^{-\alpha t}$ ($\theta,\alpha>0$). В этих случаях предполагается, что L_j не зависит от j. В заключение рассматривается усеченная модель, соответствующая такому режиму хранения, при котором партия, хранившаяся в течение определенного промежутка времени, автоматически заменяется новой партией. В. В. Петров

10280. Изучение методами исследования операций влияния рекламы на сбыт. Видале, Вулф (An operations-research study of sales response to advertising. Vidale M. L., Wolfe H. B.), Operat. Res., 1957, **5**, № 3, 370—381 (англ.)

Анализируя данные о сбыте различных товаров и затратах на их рекламирование, авторы устанавливают основные закономерности, позволяющие построить математическую модель процесса сбыта и рекламы. Сюда относится, например, соотношение $S(t)=S(0)\exp(-\lambda t)$, имеющее место при отсутствии рекламы, где $S(t)$ — норма сбыта в момент t, λ — постоянная потери сбыта, зависящая от типа продаваемого товара. Общая зависимость между нормой сбыта S и нормой $A(t)$ затрат на рекламу дается уравнением

$$\frac{dS}{dt} = \frac{rA(t)(M-S)}{M} - \lambda S,$$

где r и M — константы, определяемые соответственно характером рекламы и объемом рынка сбыта. Приводится решение этого уравнения в некоторых частных случаях и пример использования его для отыскания оптимального процесса рекламы. А. А. Иванов

10281. Исследование операций. Морзе (Operations research. Morse Philip M.), Trans. Sympos. Appl. Math., 1954. 2. N. Y.—London, 1955, 1—12 (англ.)

Перепечатано из ж-ла Commus Pure and Appl. Math. (РЖМат, 1957, 719).

10282. Согласованность предпочтения (случай двух товаров). Роз (Consistency of preference: the two-commodity case. Rose Hugh), Rev. Econ. Studies, 1958, **25(2)**, № 67, 124—125 (англ.)

Пусть x^i—двумерные векторы, компоненты которых—количества двух товаров, соответствующие случаю, когда цены единицы каждого товара, выраженные через цену единицы второго товара, равны компонентам вектора p_i. Известно, что скалярные произведения $p^i(x^i - x^{i+1})$ неотрицательны, а скалярные произведения $p^{i+1}(x^i - x^{i+1})$ положительны ($i = 1,2,\ldots,n-1$; $n \geqslant 2$). Индукцией по n доказывается, что $p^j(x^i - x^j) > 0$ ($j = 2,\ldots,n$; $i < j$). С. С. Кислицын

10283. Поведение коммерсанта (вариант модели). Матушевский (Trader's behaviour—an alternative explanation. Matuszewski T. I.), Rev. Econ. Studies, 1958, **25 (2)**, № 67, 126—130 (англ.)

Дается новый вариант модели, предложенный Стайколтом и Скоттом, дающий интерпретацию связи между объемом предлагаемых поставок и изменением рыночных цен. В отличие от Стайколта и Скотта, которые брали в качестве аргумента существующую цену при фиксированной ожидаемой цене, автор изучает объем предлагаемых поставок, как функцию ожидаемого изменения цены. А. А. Иванов

10284. Изучение процесса сбора задолженности по ссудам. Митчнер, Питерсон (An operations-research study of the collection of defaulted loans. Mitchner Morton, Peterson Raymond P.), Operat. Res., 1957, **5**, № 4, 522—545 (англ.)

Изучается процесс сбора задолженности по банковским ссудам, осуществляемый соответствующим отделом банка в Лос-Анжелосе (LAD). Сбор осуществляют специальные служащие (сборщики), каждый из которых имеет дело с определенным количеством счетов по ссудам, находящимся под контролем LAD. Требующие изучения проблемы возникают в связи с тем, что среди этих счетов есть счета, по которым задолженность погашается, и счета, по которым задолженность продолжает оставаться неоплачиваемой. Каждый служащий должен, таким образом, выполнять две функции: следить за тем, чтобы не прекращалось погашение задолженности и принимать те или иные меры воздействия на неплательщиков. От распределения рабочего времени на выполнение этих функций зависит доход LAD. Авторы ставят три вопроса: 1. Сколь долго следует продолжать попытки заставить неплательщика погасить задолженность по ссуде? 2. С каким количеством счетов должен иметь дело сборщик? 3. Какие доли рабочего времени должны уделяться оплачиваемым и неоплачиваемым счетам?

Авторы останавливаются на первом вопросе, считая, что решение двух других может быть основано на решении первого. На основе изучения фактического материала они устанавливают основные закономерности процесса сбора задолженности и строят математическую модель, позволяющую решить вопрос до конца. А. А. Иванов

10285. Разработка инженерного стандарта производительности труда. Хорн (Developing an engineered productivity standard. Horne R. C.), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 3, 203—206 (англ.)

Предлагается простая схема разработки норм производительности труда и использования их для количественной оценки отклонения фактической производительности от стандартной, в частности, производительности труда управленческого персонала. А. А. Иванов

10286. Модель стоимости при изменяющемся уровне производства. Браун (Un modello di costo a saggi di produzione variabili. Brown Robert G.), Riv. internaz. sci. econ. e commerc., 1958, **5**, № 10, 932—939, 991, 994 (итал.; рез. англ., нем.)

Пусть цех работает по программе, которая в среднем обеспечивает спрос, однако, ввиду колебаний спроса применяется и сверхурочная работа. В предположении, что отклонения спроса от среднего его уровня распределены по нормальному закону, а оплата сверхурочной работы пропорциональна разности между произведенной и плановой продукцией, вычисляется математическое ожидание затрат на сверхурочные работы. С. С. Кислицын

10287. Статистические методы определения потребности в зубоврачебных материалах. Инглиш, Джером (Statistical methods for determining requirements of dental materials. English James A., Jerome E. A.), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 3, 191—199 (англ.)

Анализируются данные о потреблении зубоврачебных материалов в военно-морском флоте США за 1937—1948 гг. с целью выявления зависимости потребления от числа зубных врачей. Приводятся формулы и графики, которые, по мнению авторов, могут быть использованы для планирования потребности флота в подобных материалах. А. А. Иванов

10288. Заметка о полезных свойствах индексных чисел Стьювела. Изерен (A note on the useful properties of Stuvel's index numbers. Yzeren J. van), Econometrica, 1958, **26**, № 3, 429—439 (англ.)

Для сравнения ситуации, когда имеются товары в количествах q_{i0} ($i = 1, 2, \ldots, n$) при ценах p, с ситуацией, когда количества товаров равны q_{i1} при ценах p_{i1}, в экономике были введены различные индексы, например, v (value index): $v = \sum p_{i1}q_{i1} / \sum p_{i0}q_{i0}$, индексы Лесперея: $P_L = \sum p_{i1}q_{i0} / \sum p_{i0}q_{i0}$, $Q_L = \sum p_{i0}q_{i1} / \sum p_{i0}q_{i0}$ Стьювелом были предложены новые индексы: $P = (P_L - Q_L + R)/2$ и $Q = (Q_L - P_L + R)/2$, где $R = \sqrt{(P_L - Q_L)^2 + 4V}$. В реферируемой статье исследуются некоторые свойства P и Q. Недостатком индексов автор считает их непропорциональное изменение при пропорциональном изменении цен или количеств товаров. С. С. Кислицын

10289. Следует ли подоходному налогу быть одним из средств экономической политики? Тинберген (Should the income tax be among the means of economic policy? Tinbergen J.), Nationaløkon. tidsskr., 1958, **96**, Tillaegesh., 351—362 (англ.)

На весьма грубых экономических моделях общества сравниваются различные налоговые системы. С. С. Кислицын

10290. Поправка. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 6, 1054 См. РЖМат, 1959, 9329.

10291 К. Элементарное математическое программирование. Мецгер (Elementary mathematical programming. Metzger Robert W. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, X, 241 pp., ill.) (англ.)

10292 К. Теория игр и статистических решений. Блекуэлл Д., Гершик М. А., Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1958, 374 стр., илл., 17 р. 70 к.

10293 К. Линейное программирование; методы и приложения. Гасс (Linear programming. Methods and applications. Gass Saul I. New York-Toronto-London, McGraw—Hill Book Co., 1958, XII, 223 pp., ill.) (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

10294. К вопросу о природе и методе средних и относительных величин. Карапетян А. Х., Научн. зап. Моск. финанс. ин-та, 1957, вып. 9, 46—65

Статья содержит ряд дискуссионных положений, из которых, по мнению референта, представляет наибольший интерес следующее: статистические совокупности могут быть образованы либо 1) на основе организационно-хозяйственного единства, либо 2) на основе качественной однородности единиц. В первом случае задача средней величины чисто расчетная — замещать в проектных, плановых и других статистических расчетах индивидуальные значения признака, сохраняя при этом неизменным некоторое определяющее свойство. В зависимости от последнего получаются различные виды средних величин. Во втором случае задача средней заключается в выявлении типичной меры признака через взаимопогашение случайных отклонений. Это осуществляется при помощи средней арифметической.

Я. И. Лукомский

10295. Графические методы для анализа паводков. Гюмбель (Méthodes graphiques pour l'analyse des débits de crues. Gumbel E. J.), Rev. statist. appl., 1957, **5**, № 2, 77—89 (франц.)

Предполагается, что максимальные расходы воды следуют предельному закону распределения для максимального члена выборки вида $F(\alpha, u, x) = e^{-e^{-y}}$, где $y = \alpha(x - u)$ (двойной показательный закон), причем α и u — два параметра, оцениваемых по статистическим данным. Указывается процедура построения эмпирической кривой распределения, удобная для сопоставления с гипотетически допускаемой. Данные о максимальных расходах реки упорядочиваются по величине $x_1 < x_2 \ldots < x_i \ldots < x_n$ и значению x_i ставится в соответствие значение $y = y_i$, определяемое из уравнения $e^{-e^{-y}} = \frac{i}{n+1}$. Если гипотеза оправдывается, то точки $(y_i\, x_i)$ должны располагаться вблизи прямой $x = u + \frac{x}{\alpha}$, параметры которой оцениваются.

Произведено довольно большое число сопоставлений (по рекам Роне, Миссисипи, Рейну и др.). Констатируется удовлетворительное соответствие эмпирических данных с допущением двойного показательного закона. Однако, точной оценки соответствия не производится.

Н. В. Смирнов

10296. Прикладная статистика в технологии изготовления стекла. Моррисон (Applied statistics in glass technology. Morrison S. J.), J. Soc. Glass Technol., 1957, **41**, № 200, T185—T219 (англ.)

Из-за изменчивости некоторых признаков материала (например, прочности и размера) в технологии стекольного производства трудно достичь точности при отдельных экспериментах. В связи с этим автор указывает те пункты стекольного производства, где должны применяться статистические методы. По резюме автора

10297. Использование элементарной статистики в анализе задач, связанных с перевозкой материалов. Ричардсон (Use of elementary statistics to analyze materials-handling problems. Richardson Wallace J. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1958, № A-291, 4 pp., ill.) (англ.)

10298. Роль статистических расчетов в автоматических системах контроля с обратной связью. Смит (Role of statistical computation in machine-tool feedback gaging. Smith David N.), Control Engng, 1957, **4**, № 9, 190—196 (англ.)

10299. Применение метода случайных выборок для анализа цен и контроля. Росандер, Гутерман, Мак-Кион (The use of random work sampling for cost analysis and control. Rosander A. C., Guterman H. E., McKeon A. J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 282, 382—397 (англ.)

Метод случайных выборок при обследовании работы какого-либо предприятия состоит в том, что по установленной форме собираются данные о работниках, относящиеся к моментам времени, выбранным с помощью таблицы случайных чисел. Подчеркиваются преимущества этого метода, который отражает действительное состояние более верно, чем всякий другой. Приводятся формы таблиц для сбора данных и формулы подсчета по этим данным вероятностей и дисперсий для определения доли времени, в течение которого обследуемый объект занят соответствующей работой.

Ю. А. Веретенников

10300. Принятие выборочного плана, основанного на распределении размаха, когда выборка производится из треугольной совокупности. Осл, Уисен (An acceptance sampling plan based on the distribution of the range when sampling from a triangular population. Ostle B., Wiesen J. M.), Industr. Quality Control, 1958, **15**, № 3, 8—9 (англ.)

Предлагается способ приемочной инспекции, в основе которого лежит выборочный размах с распределением, выраженным в терминах совокупного размаха, когда эта совокупность распределена по треугольному закону.

Р. Х. Дивеев

10301. Применение статистических методов в промышленности. Братина (Primena statističkih metoda u industriji. Bratina Miroslav), Tekstilna ind., 1958, **6**, № 10, 484—493 (сербо-хорв.; рез. англ., франц., нем.)

10302. Последовательные корректирующие коды. Хонда (The sequential error-correcting code. Honda Namio), Sci. Repts Res. Insts Tohoku Univ. Ser. B—Electr. Commun., 1956 (1957), **8**, № 3, 113—124 (англ.)

Автор рассматривает простейший бинарный симметричный канал для передачи информации, в котором символы на входе принимают два значения 0 и 1 и с вероятностью p символ на выходе совпадает с соответствующим символом на входе. Передача символов в разные моменты времени производится независимо. В первой части статьи автор строит коды $A(2^n, 2^m)$ для коррекции 2^m ошибок при передаче 2^n символов, т. е. подмножества последовательностей 0 и 1 длины 2^n такое, что любые два элемента этого подмножества отличаются по крайней мере в 2^m местах. Число элементов этого кода (подмножества) совпадает с аналогичным числом для кодов, построенным в предыдущих работах других авторов, однако коды Хонда обладают тем преимуществом, что элементы кода $A(2^{n+1}, 2^{m+1})$ получаются из элементов кода $A(2^n, 2^m)$ приписыванием некоторым способом 2^n недостающих символов. Это позволяет автору предположить метод последовательной передачи информации, состоящий в том, что вначале передается последовательность символов длины 2^n. Если полученная на выходе последовательность такова, что апостериорная вероятность ошибочного восстановления переданного сигнала недостаточно мала, то по каналу обратной связи об этом сообщают на вход канала, после чего дополнительно передается еще 2^n символов, так чтобы совокупный набор символов принадлежал снова корректирующему коду. Если после этого

апостериорная вероятность ошибки не оказалась мала, то число переданных символов вновь удваивается и т. д. Автор доказывает, что при некоторых предположениях с вероятностью 1 эта процедура закончится через конечное число шагов. Вопрос о скорости передачи информации при таком методе кодирования не обсуждается. Р. Л. Добрушин

10303. Об использовании разложений по функциям Эрмита в задачах с шумами. Кемпбелл (On the use of Hermite expansions in noise problems. Campbell L. Lorne), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1957, 5, № 4, 244—249 (англ.)

Метод разложений по многочленам Эрмита $H_n(x)$, используемый для изучения вероятностных процессов на выходе нелинейных устройств, обобщается на случай, когда на выходе нелинейного устройства подается сумма сигнала и гауссовского шума $S(t) + N(t)$, а не только один шум. Известно, что

$$MH_m\left(\frac{N(t)}{\sqrt{2\psi_0}}\right)H_n\left(\frac{N(t)}{\sqrt{2\psi_0}}\right) = (2r)^m m!\delta_{mn}, \quad (1)$$

где $\psi_\tau = MN(t)\,N(t+\tau)$, $r = \frac{\psi_\tau}{\psi_0}$, $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$

Тогда, если вероятностный процесс на выходе нелинейного устройства имеет вид

$$I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\,H_n\left(\frac{N(t)}{\sqrt{2\psi_0}}\right), \quad (2)$$

где $c_n(t)$ — случайные величины, не зависящие от $N(t)$, то ковариация для этого процесса задается формулой

$$\psi(\tau) = MI(t)\,I(t+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} n!(2r)^n M c_n(t) c_n(t+\tau). \quad (3)$$

Автор иллюстрирует этот метод вычисления ковариации для случаев $I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$ и $I = \frac{1}{2\pi}\int_c F(iu)e^{ivu}du$, где $v = S(t) + N(t)$, используя разложения типа (2) для таких нелинейных устройств. Ю. К. Беляев

10304. Оценка происходящего из-за сложения видеонапряжений двух радиолокационных приемников ухудшения обнаружимости сигнала. Мак-Корд (An estimate of the degradation in signal detection resulting from the addition of the video voltages from two radar receivers. McCord H. L.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, 5, № 2, 83—89 (англ.)

Автор указывает, что иногда бывает нужно складывать видеонапряжения двух радиолокационных приемников, причем сигнал может присутствовать лишь в одном из них. (Под видеонапряжением понимается напряжение, полученное в результате прохождения принятого сигнала через систему: входной фильтр — линейный детектор — усилитель низкой частоты. Под термином „сложение напряжений" автор подразумевает одну из двух операций: или обычное алгебраическое сложение, или же операцию, в результате которой в каждый момент времени получается максимальное из двух напряжений). Так как сигнал может присутствовать лишь в одном из приемников, а шумы имеются в обоих, то в результате „сложения" обнаружение сигнала ухудшается по сравнению с тем случаем, когда используется один приемник, который принимает сигнал. Считается, что закон распределения вероятностей значений видеонапряжения при отсутствии сигнала — релеевский, а при наличии сигнала (при условии, что интенсивность сигнала много больше средней интенсивности помех) — гауссовский. Решение о присутствии или отсутствии сигнала принимается в зависимости от того, превышает или нет $x(t_0)$ некоторое пороговое значение, где $x(t_0)$ — величина, полученная при „сложении" видеонапряжений двух приемников в некоторый момент времени. Вычисленные при таком способе принятия решений ошибки 1-го и 2-го родов будут зависеть от параметра S/N, где S — интенсивность сигнала и N — средняя интенсивность помех. Для обеих операций „сложения" вычислено, насколько нужно увеличить отношение S/N, чтобы вероятности ложной тревоги и пропуска оставались фиксированными и равными 10^{-8} и 0,5 соответственно. Для первого способа „сложения" S/N надо увеличить в 1,7 раза, а для второго — в 1,04 раза.

В. Ф. Писаренко

10305. Об информационных критериях оценки телеизмерительных систем. Михайловский (Про інформаційні критерії оцінки телевимірювальних систем. Михайловський В. М.), Автоматика (Київ), 1958, № 2, 75—84 (укр.; рез. русск., англ.)

Предлагается использовать для сравнительной оценки телеизмерительных систем выражения, содержащие энтропию их источника информации, условную энтропию на выходе и пропускную способность каналов.

М. З. Розенфельд

10306. О помехоустойчивости частотно-импульсного телеизмерения. Позин Н. В., Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 10, 968—976 (рез. англ.)

Рассматривается импульсный метод передачи, при котором частота следования импульсов является медленно меняющейся функцией времени, которая несет информацию. В некоторых предположениях элементарными теоретико-вероятностными методами вычисляется среднее число «ложных» импульсов, образованных помехой за единицу времени. Б. С. Цыбаков

10307. Некоторые приложения теории обнаружения к радару. Сиберт (Some applications of detection theory to radar. Siebert William M.), IRE Nat. Convent. Rec., 1958, **6**, № 4, 5—14 (англ.)

Указывается, что специфика задачи обнаружения сигналов в радиолокации нарушает полное сходство в характере применения статистических методов при ее решении и решении проблемы контроля качества продукции. По мнению автора, основным в задаче радиолокационного обнаружения является создание решающей процедуры (т. е. обработки получаемых выборок исследуемого процесса), не зависящей от априорных вероятностей и величин ошибок первого и второго рода. Такого рода процедура не во всех случаях будет являться оптимальной. Приводятся несколько примеров, в которых оптимальное статистическое решение задачи будет приемлемым для радиолокационной техники. Это — обнаружение постоянного сигнала в присутствии шума — случайного стационарного гауссовского процесса или процесса, имеющего «нормальное» распределение с дисперсией — случайной величиной. Б. С. Цыбаков

10308. Влияние шума на некоторый метод измерения частоты. Пиккард (The effect of noise upon a method of frequency measurement. Pickard F. B.), IRE Trans. Inform. Theory, 1958, 4, № 2, 83—88 (англ.)

Описывается некоторый радиотехнический метод измерения разности частот, который предлагается автором в весьма специальных условиях. Исследуется вопрос о точности измерения этим методом. Математически задача сводится к вычислению интеграла типа

$$\int_R\int_{t_1}^{t_2} x_2\delta(x_1)\,\varphi(x_1, x_3)\,dtd\Phi(x_1, x_2, x_3, t),$$

где $\delta(x_1)$ — дельта-функция Дирака; $\varphi(x_1, x_3)$ — некоторая ступенчатая функция со скачками в x_1 и x_3; $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ — совместная функция распределения трех случайных величин, а R — область, где

$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) \neq 0$. Вычисление интеграла доводится до конца, в частности, когда $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ —нормальное распределение, не зависящее от t. Б. С. Цыбаков

10309. Специальная статистическая модель линейных переменных четырехполюсников при конечном времени работы. Джонсон (Frequency-domain statistical model of linear variable networks for finite operating time. Johnson G. W.), IRE Nat. Convent. Rec., 1958, 6, № 4, 70—78 (англ.)

На вход прибора (четырехполюсника) подается случайный стационарный процесс $\eta(t) = \xi(t) + \zeta(t)$, где $\xi(t)$ — полезный сигнал (случайный стационарный процесс), а $\zeta(t)$ — шум (также случайный стационарный процесс). Выход четырехполюсника $\Theta(t)$ в момент $t>0$ представляет собой

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t, \mu)\, \eta(t-\mu)\, d\mu,$$

где $h(t, \mu)$ — некоторая функция—„переходная характеристика“ четырехполюсника. В работе прямым методом с помощью трансформации Лапласа вычисляется дисперсия разности

$$e(t) = \chi(t) - \Theta(t),$$

где

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{t} \widetilde{h}(t, \mu)\, \xi(t-\mu)\, d\mu,$$

а $\widetilde{h}(t, \mu)$ — некоторая заданная функция — переходная характеристика другого четырехполюсника. Описываемая задача представляет интерес в теории автоматического регулирования. Б. С. Цыбаков

10310. Нелинейные системы контроля со случайными сигналами на входе. Бутон (Nonlinear control system with random inputs. Booton Richard C., Jr), Trans. I.R.E., 1954, CT—1, № 1, 9—18 (англ.)

Метод „описывающей функции“ (Kochenburger R. J., Electr. Engr, 1950, 69, 687—692) в анализе нелинейных динамических систем с синусоидальными сигналами на входе интерпретируется как прием квазилинеаризации по способу наименьших квадратов и обобщается на случай случайных сигналов. Из резюме авторов

10311. Стохастические свойства очередей. Морзе (Stochastic properties of waiting lines. Morse Philip M.), J. Operations Res. Soc. Amer., 1955, 3, 255—261 (англ.)

Временные характеристики очереди в процессах массового обслуживания исследуются путем определения корреляционной функции и соответствующего спектра для длины очереди так, как это принято в теории случайных шумов. Техника исследования состоит в определении переходных вероятностей, по которым вычисляется корреляционная функция. Эта техника иллюстрируется на примере одного обслуживающего устройства с экспоненциально распределенным временем обслуживания и пуассоновым потоком. Процесс записан в спектральной форме, принадлежащей Ледерману и Рейтеру (РЖМат, 1955, 2318), хотя и допускает более точную характеристику. Окончательные выражения для корреляционной функции и спектральной плотности содержат по одной квадратуре, но для них получены простые приближенные выражения. Приближенное выражение для корреляционной функции выглядит так: $\psi(t) = L^2 + \Delta^2 \exp\left(-\frac{t}{\Delta^2}\right)$, где L и Δ^2 — математическое ожидание и дисперсия количества уже обслуживаемых или ожидающих объектов в условиях равновесия, а время t измеряется в единицах среднего времени обслуживания. „Время релаксации“ есть среднее время, необходимое для того чтобы очередь пришла от размера среднего квадратического отклонения к $1/e$-й доле этого отклонения, и приближенно равно $\tau = 2\Delta^2$. Так как $\Delta^2 = \rho/(1-\rho)^2$, то время релаксации более чувствительно к насыщению ($\rho \to 1$), чем средняя длина очереди. В заключение приводятся соображения о распространении этих результатов на системы с большим количеством обслуживающих устройств с экспоненциальным временем обслуживания. J. Riordan

Перевод из Math. Revs, 1956, 77, № 1, 51.

10312. Статистические свойства движущейся волновой формы. Лонге-Хиггинс (Statistical properties of a moving wave-form. Longuet-Higgins M. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 2, 234—245 (англ.)

Рассматривается случайная функция вида

$$f(x, t) = \sum_n a_n \cos[k_n(x - c_n t) + \varepsilon_n],$$

где ε_n — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 2\pi]$; a_n — независящие от ε_n случайные величины с известным средним квадратом; k_n и c_n — некоторые константы. $f(x, t)$ имеет следующий физический смысл. Это суперпозиция бесконечного числа распространяющихся синусоидальных волн со случайными амплитудами a_n и фазами ε_n. При этом k_n и c_n имеют смысл волнового числа и скорости n-й волны. Автор указывает, что случайные функции подобного вида встречаются, например, при изучении статистических свойств морской поверхности.

Предполагается, что a_n таковы, что для $f(x, t)$ выполнены условия центральной предельной теоремы и ее можно считать гауссовским однородным полем от двух переменных. В работе изучаются следующие свойства случайной поверхности $y = f(x, t)$.

1) Находятся условные функции распределения случайных величин $\xi_1 = -\frac{\partial f}{\partial t}\Big/\frac{\partial f}{\partial x}$, $\xi_2 = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\Big/\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\xi_3 = -\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t}\Big/\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ соответственно при условиях $f(x, t) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = b_1$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = b_2$, где b_0, b_1 и b_2 — некоторые константы. Если взять на поверхности $y = f(x, t)$ точки, удовлетворяющие $f(x, t) = b_0$ и рассматривать в этом уравнении x как неявную функцию от t, то $\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial t}\Big/\frac{\partial f}{\partial x} = \xi_1$. Таким образом, ξ_1 имеет физический смысл скорости движения точек поверхности, в которых $f(x, t) = b_0$. Совершенно аналогично ξ_2 и ξ_3 можно интерпретировать как скорости движения точек поверхности, с постоянным наклоном $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = b_1\right)$ и с постоянной кривизной $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = b_2\right)$. Так как случайные величины ξ_1, ξ_2 и ξ_3 являются отношениями двух гауссовских величин, то они подчиняются закону распределения Коши.

2) Вычисляется среднее число N_1 точек поверхности $y = f(x, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяющих условиям $f = b_0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, а также аналогичные средние N_2 и N_3 при условиях $\frac{\partial f}{\partial x} = b_1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = b_2$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_3} = 0$ соответственно. Величину N_1 можно интерпретировать как среднюю частоту возникновения и уничтожения точек пересечения функцией $f(x, t)$ как функцией от x некоторого фиксированного уровня на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Аналогичные интерпретации допускают величины N_2 и N_3. Метод вычисления подобен известному методу подсчета среднего числа нулей гауссовской функции, предложенному Райсом. В. Ф. Писаренко

10313. К гармоническому анализу распределений радиальных скоростей. Наон (Sur l'analyse harmonique des distributions de vitesses radiales. Nahon Fernand), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 17, 1311—1313 (франц.)

Пусть (x, y) — координаты произвольной точки M в прямоугольной системе Oxy; (R, T) — координаты той же точки в прямоугольной системе OXY, повернутой относительно Oxy на угол l; $F(x, y)$ — плотность некоторого распределения точек на плоскости (распределение F); $g(R, l)$ — плотность проекции распределения F на ось OX (распределение g).

Если известна плотность $g(R, l)$, определение $F(x, y)$ сводится к решению интегрального уравнения

$$g(R, l) = \int_{-\infty}^{+\infty} F\,(R\cos l - T\sin l,\ R\sin l + T\cos l)\,dT. \quad (1)$$

Обозначим через $\Phi(u, v)$ и $\varphi(t, l)$ характеристические функции, соответствующие F- и g-распределениям. Тогда (1) равносильно функциональному уравнению $\varphi(t, l) = \Phi(u\,t\cos l,\ v\,t\sin l)$. Вводим полярные координаты: $x = \rho\cdot\cos\alpha$, $y = \rho\sin\alpha$, $F(x, y) = \Phi(\rho, \alpha)$; $R = \rho\cos\Theta$, $T = \rho\cdot\sin\Theta$, $\alpha = \Theta + l$. Соответственно меняется вид (1). Ставится задача определения $\Phi(\rho, \alpha)$, если задана $g(R, l)$ или $\varphi(t, l)$.

Применяя разложения

$$\Phi(\rho, \alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(\rho) e^{ik\alpha},\quad g(R, l) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_k(R) e^{ikl},$$

$$\varphi(t, l) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t)\, e^{ikl},$$

автор выводит соотношения, позволяющие определять $\Phi_k(\rho)$ и, таким образом, решить поставленную задачу. Л. Н. Куцев

10314. Задача о поиске. Севастьянов Н. Б., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1954, № 12, 128—131

Автор исследует наименьшее расстояние от первоначальной точки поиска до пункта, с которого можно наблюдать какую-либо одну из некоторой рассеянной совокупности целей. Довольно туманные определения и гипотезы автора не приводят к определенным результатам относительно пути поиска. J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 10, 1036

10315. Применение принципов теории информации к теории зрения. Рапопорт (Application of information networks to a theory of vision. Rapoport Anatol), Bull. Math. Biophys., 1955, 17, № 1, 15—33 (англ.)

Принцип теории информации применяется к построению нервной системы типа Мак-Каллоха—Питтса (McCulloch W. S., Pitts W., Bull. Math. Biophys., 1943, 5, 115—133). В частности, рассматриваются схемы, в которых сигналы от нескольких нейронов проходят через один, создавая таким образом «затор» в потоке информации — абстрактная модель зрительного процесса, протекающего между сетчаткой и оптическим нервом глаза. В II ч. статьи строится модель, в которой избыточные сигналы в двух нейронах проходят через один нейрон с малой потерей информации. В II ч. сигналы от множества нейронов проходят по двум каналам нейронов. Для этого случая расчитывается оптимальная система связи (т. е. система с наименьшей потерей информации). Указывается возможный биологический смысл такой схемы. Резюма автора

10316. Распределение генов в популяции двуполых диплоидных особей. Моран (The distribution of gene frequency in a bisexual diploid population. Moran P. A. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 4, 468—474 (англ.)

Рассмотрена популяция с двумя типами хромосом A и a, которые могут переходить один в другой вследствие мутаций. Общая численность популяции и численность полов не меняются за счет того, что каждая смерть сопровождается одним рождением особи того же пола. За каждый интервал происходит одно и только одно рождение, при котором любой тип скрещивания равновероятен. Для всех одинаковых генов мутации равновероятны. Вероятности мутаций малы и различаются для разных генов. Смерть равновероятна для всех особей.

В этих предположениях сначала вычисляются вероятности рождения особей, имеющих генотипы aa, Aa или AA, затем — вероятность перехода из состояния с некоторым количеством особей каждого генотипа в состояние со смежным количеством. Доказывается, что некоторые выражения, составленные из относительных частот каждого генотипа в группах мужских и женских особей, стремятся к нулю при неограниченном росте популяции. Из этих выражений находится предельная устойчивая вероятность гена «a». С. П. Божич

10317. Исследование химических реакций с помощью теории стохастических процессов. Реньи (Kémiai reakciók tárgyalása a sztochasztikus folyamatok elmélete segítségével. Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 83—101 (венг., рез. русск., нем.)

Статья излагает статистическую трактовку бимолекулярных реакций.

Пусть $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — количества молекул реагирующих веществ A и B в момент t; $\gamma(t)$ — число молекул, возникших в результате реакции в момент t (это вещество будем обозначать через C). $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ $(t>0)$ предполагаются случайными величинами, а $\alpha(0)$, $\beta(0)$ — константами ($\alpha(t) = \alpha(0) - \gamma(t)$, $\beta(t) = \beta(0) - \gamma(t)$). Вероятность того, что произойдет реакция между A-молекулой и B-молекулой в течение временного интервала Δt предполагается равной $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$.

Если $h_n = (\alpha(0) - n)\,(\beta(0) - n)$, $W_n(t) = P(\gamma(t) = n)$, то, если обратные реакции исключены, имеем систему дифференциальных уравнений

$$W_n'(t) = \lambda\,(W_{n-1}(t)\,h_{n-1} - W_n(t) h_n).$$

Для математических ожиданий выводится формула

$$\frac{d\,M(\gamma(t))}{d\,t} = M(\alpha(t)\,\beta(t)) = \lambda\,(M(\alpha(t))\,M(\beta(t)) + D^2(\gamma(t)).$$

Сравнивая последнее уравнение с дифференциальным уравнением, выражающим кинетический закон взаимодействующих масс, замечаем, что они различны, но если $D^2(\gamma(t))$ достаточно мало, получается хорошее согласие. Это главный результат. Если C-молекула может распасться и если вероятность одного распадения за время Δt есть $\mu\,\Delta t + o(\Delta t)$, то

$$\frac{d\,M(\gamma(t))}{d\,t} = \lambda\,(\alpha(0) - M(\gamma(t)))\,(\beta(0) - M(\gamma(t))) + \lambda\,D^2(\gamma(t)).$$

Отбрасывая $\lambda\,D^2(\gamma(t))$, получаем известное уравнение равновесия. Аналогично исследуются процессы ионизации и рекомбинации в идеальных газах. Для $W_n(t)$ выводятся асимптотические формулы

$$\lim_{t\to\infty} W_n(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{\alpha(0)}{k} \binom{\beta(0)}{k} k!\,W_0,\quad n \neq 0,$$

где

$$W_0 = \lim_{t\to\infty} W_0(t) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\gamma(0)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{\alpha(0)}{k} \binom{\beta(0)}{k} k!}.$$

Автор утверждает, что подобная статистическая трактовка возможна и в более сложных ситуациях.
А. Prékopa

10318. Некоторые замечания об асимптотическом поведении ливня космических лучей при большой толщине поглотителя. III. Вычисление функции распределения. Лопушанский (Some remarks on the asymptotic behaviour of the cosmic ray cascade for large depth of the absorber. III. Evaluation of the distribution function. Łopuszański J.), Nuovo cimento, 1955, 2, Suppl. № 4, 1161—1167 (англ.)

Части I и II см. РЖМат, 1959, 5064; 5065.

В обозначениях статьи Урбаника (РЖМат, 1959, 5064) и при помощи результатов этой статьи доказывается, что для введенных Яноши факториальных моментов при $n>m$ и $\varepsilon>0$ имеет место соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{s_n(\varepsilon,x)}{s_m(\varepsilon,x)}=0.$$

Используя этот результат и формулу

$$\sum_{l=k}^{\infty}P(l\mid\varepsilon,x)=\sum_{l=k}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k}}{l!}\binom{l-1}{k-1}s_l(\varepsilon,x)$$

показывается, что при $x\to\infty$ вероятность $P(n\mid\varepsilon\,x)$ асимптотически равна $s_n(\varepsilon,x)/n!$ и является бесконечно малой по сравнению с $P(m\mid\varepsilon,x)$, $m<n$.
А. С. Монин

10319. Статистический подход к проблемам космологии. Нейман, Скотт (Statistical approach to problems of cosmology. Neyman Jerzy, Scott Elizabeth L.), J. Roy. Statist. Soc., 1958, **B20**, № 1, 1—29. Discuss., 30—43 (англ.)

Указывается на целесообразность использования в космологии статистического подхода (для которого авторы также употребляют неудачный термин «индетерминистический подход»). В качестве примера рассматривается распределение галактик в пространстве. Разъясняются несовершенства в оценке расстояний до далеких галактик, которые были столь серьезны, что в 1952 г. Бааде установил необходимость пересмотреть существующие шкалы расстояний, увеличив их в 2—4 раза. Обсуждается вопрос о природе красного смещения в спектрах далеких галактик. Толкуемое как эффект Допплера, оно указывает на разлетание галактик с тем бо́льшими скоростями, чем больше расстояние до них (наибольшая скорость, найденная Хьюмасоном, составляет одну пятую скорости света). При такой трактовке красное смещение указывает на расширение части Вселенной, которая пока что доступна наблюдателю.

Богатый статистический материал о распределении галактик дают фотографии неба, полученные Ликской обсерваторией (1246 фотографий 6°×6°, перекрывающихся полосами шириной в 1°). При подсчете всех галактик, до весьма слабых, оказывается, что распределение их по поверхности сферы в достаточно больших масштабах приблизительно равномерное; в то же время в малых масштабах это распределение несомненно не пуассоновское, в нем наблюдаются локальные сгущения — облака галактик, имеющие в свою очередь тенденцию группироваться в супероблака.

Автор основных работ по красному смещению в спектрах галактик Хаббл поставил задачу проверить гипотезу о расширении метагалактики путем оценки распределения плотности облаков галактик по лучу зрения. Это была одна из задач, для решения которых построен 200-дюймовый телескоп на Маунт-Паломар. Однако эта задача еще не решена.

Ряд современных космологических теорий декларируют однородность Вселенной в достаточно больших масштабах („космологический принцип"). Предлагается трактовать эту однородность статистически, рассматривая распределение галактик как реализацию однородного случайного поля. Конструируется „статистическая модель распределения галактик в трехмерном евклидовом пространстве S и во времени (рассматриваемом как ньютоновское или как „космическое время" по Робертсону). Именно, предполагается существование счетно-аддитивной случайной меры $\gamma(R,t)$ борелевских множеств $R\subset S$, причем при условии, что в R содержится n облаков галактик, координаты их центров суть случайные величины с совместным распределением, определяемых распределением величины $\gamma(R,t)$. Как случайная функция от t мера $\gamma(R,t)$ предполагается стационарной. Каждому облаку с центром C ставится в соответствие случайная величина $\nu(C)$ — число галактик в облаке; все ν независимы друг от друга. Координаты галактик в облаке рассматриваются как независимые случайные величины с плотностью вероятностей f, зависящей от расстояния до центра облака и от времени. Если для непересекающихся областей R_i величины $\gamma(R_i,t)$ суть независимые пуассоновские, то определяемый перечисленными постулатами процесс называется процессом облакообразования 1-го порядка. Если распределение центров облаков представляется процессом n-го порядка, то эти постулаты определяют процесс $(n+1)$-го порядка. Движение облаков галактик предлагается описывать законом

$$u_i(t)=u_i(0)\exp\left\{\int_0^t H(t)\,dt\right\}$$

(u_i — координаты центра облака); при $H(t)=\text{const}$ отсюда получается закон расширения Хаббла. Аналогичный закон принимается для координат $x_j(t)$ галактик внутри облака.

Выводится ряд общих формул, нужных для сопоставления распределения галактик в пространстве и времени по данной модели и распределения их изображений на фотопластинке. Разъясняется, как по виду корреляционных функций для плотности изображений далеких и близких облаков галактик проверить теории статической Вселенной (отрицающее ее расширение) и „теории" Бонди, Голда, Хойла и Мак-Кри, в которых предполагается, что расширение компенсируется непрерывным творением материи из ничего (в последнем случае следовало бы говорить не о проверке, а об опровержении, однако авторы формулируют задачу построения статистической модели для „творения" материи).

Рассматривается вопрос о сопоставлении яркости галактик и величины красного смещения. Разъясняется, как можно устранить из эмпирических данных смещение, создаваемое пристрастным выбором наиболее ярких галактик.

В дискуссии по работе выступили Бартлетт, Мак-Кри, Уайтров, Уокер, Бартон, Гуд, Смит, Скиллэм, Мойал. Библ. 43 назв.
А. С. Монин

10320. Спектр вертикальной компоненты скорости ветра по наблюдениям с помощью акустического анемометра в О'Нейле, Небраска, в 1953 г. Бюсингер, Суоми (Variance spectra of the vertical wind component derived from observations with the sonic anemometer at O'Neill, Nebraska in 1953. Businger J. A., Suomi V. E.), Arch. Meteorol., Geophys. und Bioklimatol., 1958, **A10**, № 4, 415—425 (англ.; рез. нем., франц)

Описывается моделирующее устройство для вычисления спектра стационарного случайного процесса $w(t)$, который задается в виде зачерненной площади на киноленте. Значения $w(t)$ считываются оптическим путем и трансформируются при помощи фотоумножителя в электрический сигнал, который подается на вход гармонического анализатора — узкополосного электрического фильтра с подвижной полосой пропускания. Сигнал на

выходе фильтра возводится в квадрат и осредняется по времени, что дает спектральную плотность $\Phi(\omega)$ для частоты ω, соответствующей полосе пропускания фильтра. Аналогичное устройство непосредственно дает полную дисперсию $\overline{w'^2}$.

Анализируются возможные ошибки определения спектра указанным способом. По ширине полосы пропускания фильтра оценивается число степеней свободы и средняя ошибка в определении спектральной плотности по формулам Тьюки (Tukey J. W., Symposium Appl. Autocorr. Analysis to Phys. Probl., Woods Hole, Mass. Off. Naval Res., Washington, 1949, 47—67) и Спетнера (РЖМат, 1956, 6751). Рассматриваются ошибки, связанные с механическими и оптическими погрешностями в приборе; устанавливается, что они не превосходят 7%, т. е. малы по сравнению со статистической ошибкой в определении $\Phi(\omega)$, но являются основными при определении $\overline{w'^2}$.

Приводятся 32 серии измерений $\Phi(\omega)$ и $\overline{w'^2}$ для 43 спектральных полос (от $\omega = 101$ до 6007 цикл/час) по данным регистрации вертикальной компоненты скорости ветра при помощи акустического анемометра на высотах от 3 до 12 $м$ на аэрофизической обсерватории в О'Нейле в 1953 г. Отмечается, что в изученном интервале частот $\Phi(\omega) \sim \omega^{-5/3}$, как это следует из теории подобия А. Н. Колмогорова для инерционного интервала спектра локально-изотропной турбулентности.

А. С. Монин

10321. Вероятность разорения в коллективной теории риска при специальном распределении убытков. Вольф (Die Ruinwahrscheinlichkeit in der Kollektiven Risikotheorie für spezielle Schadensverteilungen. Wolff Karl-H.), Statist. Vierteljahresschr., 1957, **10**, № 3-4, 163—176 (нем.)

Рассматривается следующая задача. Пусть при внесении страховой премии вместе с чистой премией („нетто") величины P страховым обществом взимается надбавка λP ($\lambda > 0$). Пусть далее, при поступлении премии-нетто величины dP с вероятностью $dP + O(dP)$ общество терпит убыток (выплачивает страховую сумму пострадавшему), причем величина убытка имеет распределение с плотностью $f(z)$ ($f(z) = 0$ при $z \leqslant 0$), не меняющейся с течением времени. Предполагается, что $\int_0^\infty z f(z)\,dz = 1$. Какова вероятность $w(y)$ того, что общество разорится, если оно имеет начальный капитал y?

Рассмотрен случай плотности $f(y)$, составленной из r слагаемых типа $f_j(y) = \sum_{k=0}^{a_j-1} S_{jk} y^k e^{(\alpha+i\beta)y} + \sum_{k=0}^{a_j-1} \overline{S}_{jk} y^k e^{(\alpha-i\beta)y}$ ($\overline{S}_{jk}$ сопряжено к S_{jk}). Тогда $w(y)$ составлена из r слагаемых типа

$$2e^{ay} \sum_{k=0}^{v_i-1} y^k [\mathrm{Re}\,(R_{ik}) \cos by - \mathrm{Im}\,(R_{ik}) \sin by],$$

где символы Re и Im означают действительную и мнимую части, а $a, b = \mathrm{const}$. При этом функция $b(s) = -(1+\lambda)^{-1} \int_0^\infty e^{-sy} (1 - f(y))\,dy$ представима в виде $b(s) = -(1+\lambda)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=0}^{a_j-1} s_{jr}^* \frac{r!}{(s-\sigma_j)^{r+1}}$, где $\sigma_i = \alpha + i\beta$, т. е. $b(s) = \frac{P_1^*(s)}{P_2(s)}$, где P_1^* и P_2 — полиномы, не имеющие общих нулей, и степень P_1 ниже степени P_2. Пусть $P_1(s) = P_1^*(s) + P_2(s)$ и пусть $P_1(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - s_i)^{v_i}$, $s_i \neq s_j$, при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} v_i = N$. Коэффициенты R_{ik} определяются равенствами

$$R_{ik} = -\frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{k!\,(v_i - k - 1)!} \frac{d^{v_i-k-1}}{ds^{v_i-k-1}} \times \left[\frac{P_2(s)\,(s-s_i)^{v_i}}{sP_1(s)}\right]_{s=s_i}.$$

При $f(y) = e^{-y}$ $w(y) = (1+\lambda)^{-1} e^{-\frac{\lambda}{1+\lambda} y}$

М. Г. Шур

См. также: 9643, 9783, 10148, 10159

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

10322. О независимости аксиом инциденции, порядка и конгруэнтности Гильберта. Белецкий (Sur l'indépendance des axioms d'incidence, l'ordre et de congruence de Hilbert. Bielecki Adam), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1955 (1957). **A9**, № 1-13, 157—175 (франц.; рез. русск., польск.)

Система аксиом евклидовой геометрии, содержащаяся в 7-м издании „Оснований геометрии" Гильберта, не независима, несмотря на то, что по сравнению с первым изданием число этих аксиом значительно сокращено.

В настоящей работе путем незначительного ослабления аксиом I и II групп получаются несколько сокращенные, равносильные им группы аксиом I* и II*, в которых каждая аксиома не зависима от всех остальных. Более существенные сокращения возможны в III группе аксиом Гильберта. Отбрасывая аксиому III_3 о суммах отрезков и часть аксиомы III_4, которая гласит, что всякий угол совмещается с собой, получается система аксиом III*, из которых каждая не зависима от прочих аксиом III* и от аксиом I* и II*. Система, составленная из аксиом I*, II* и III*, равносильна системе аксиом I, II, III Гильберта. Резюме автора

10323. Понятие площади в евклидовом пространстве. Ханнер (Ytinnehåll i euklidisk geometri. Hanner Olof), Elementa, 1957, **40**, № 4, 229—238 (шведск.)

10324. Покрытие плоскости равносторонними многоугольниками. Судзуки, Хираока, Ибараки дайгаку кёйку гакубу киё, Bull. Educ. Fac. Ibaraki Univ., 1955, № 5, 56—67 (японск.)

10325. Нормальная кривая площадь и геометрические преобразования. Ганс (Normal curve areas und geometric transformations. Gans David), Math. Mag., 1958, **31**, № 4, 205—206 (англ.)

10326. Ромбический триаконтаэдр. Ид (Rhombic triacontahedra. Ede John D.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 340, 98—100 (англ.)

10327. О геометрическом представлении спинорных величин. Бофе (Sur la représentation géométrique des grandeurs spinorielles. Beaufays O.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 6, 555—576 (франц.)

Выводятся известные соотношения (см., например, РЖФиз, 1956, 21786, 21787), связывающие дираковский

спинор с выраженными через него тензорами. Исходя из соответствия между изотропными 4-векторами и точками абсолюта проективного 3-пространства, эти соотношения геометрически интерпретируются в терминах проективного пространства, что дает возможность при их изучении воспользоваться результатами проективной геометрии. В частности, проективные соотношения применяются для решения задачи о нахождении спинора по известным тензорам. Г. А. Зайцев

10328. О геометрических основах теории спиноров в трехмерном пространстве. Моран (Sur les fondements géométriques de la théorie des spineurs de l'espace à trois dimensions. Morand Max), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 25, 2299—2301 (франц.)

Спиноры трехмерного пространства предложено вводить при помощи понятия о поляризованной плоскости, на которой задано направление вращения. Такая плоскость определена, если известны два расположенных на ней ортогональных вектора с равной длиной $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$. Соответствие между поляризованной плоскостью и спинором 1 ранга устанавливается с помощью известных соотношений (Картан Э., Теория спиноров, Изд-во ин. лит., М., 1947, стр. 64), связывающих компоненты комплексного изотропного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$ с компонентами спинора. Г. А. Зайцев

10328. О геометрических основах теории спиноров в Удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. Клейн (Famous problems of elementary geometry. The duplication of the cube, the trisection of an angle, the quadrature of the circle. Klein F. New York, Dover Publs, Inc., 1956, XI, 92 pp., 1.50 doll.) (англ.)

Фотоофсетное стереотипное переиздание (перев. Бемана и Смита, Нью-Йорк, 1930).

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 8, 883.

10330 К. Об основах геометрических воззрений Н. И. Лобачевского. Пособие по основаниям геометрии. Для студ.-заочн. физ.-матем. фак. ун-тов и пед. ин-тов. Крамар Ф. Д., Казахск. ун-т. Алма-Ата, 1957, 20 стр., илл.

10331 К. О взаимном пересечении поверхностей и их развертках. Гордеев К. Н. Томск., Томский ун-т, 1958, 26 стр., илл., 1 р. 10 к.

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

10332. К вопросу о технике пропорциональных выборов. Штолль (Betrachtung zur Technik der Zürcher Proportionalwahlen. Stoll A.), Elem. Math., 1957, **12**, № 6, 123—125 (нем.)

Рассматриваются n одинаковых, неделимых предметов и требуется их распределить на g групп, пропорционально натуральным числам s_i, $i = 1, 2, \ldots, g$, сумма которых равна s. Точное пропорциональное деление дает числа $S_i = ns_i/s$, вообще не целые и поэтому не реализуемые. Приводятся правила, определяющие целочисленные приближения n_i, $i = 1, 2, \ldots, g$, сумма которых n. Доказывается, используя метод координат в пространстве g-измерений, что существует такой множитель пропорциональности φ, что $n_i \leqslant \varphi s_i \leqslant n_i + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, g$). Оцениваются разности $S_i - n_i$ и оказывается, что при построении n_i округление может быть не только 1, но и больше 1 и теоретически достигнуть величины $g - 1$ при больших s_i. Округления не являются случайными, они зависимы от величины группы. В. С. Люкшин

10333. Теория двуполюсников с шумом. Болиндер (Theory of noisy two-port networks. Bolinder E. Folke), J. Franklin Inst., 1959, **267**, № 1, 1—23 (англ.)

Представлена новая геометрическо-аналитическая теория двуполюсников с шумом. Основывается она, с геометрической стороны, на методах, использующих изометрические свойства сфер, обобщающих методы изометрических свойств окружности на размерность до третьей и, с аналитической стороны, на трехмерных конформных отображениях, начало исследований которых восходит еще к Пуанкаре и Пикару. Отображение, используемое в изучении преобразования количества шума, есть среднее отношение его на двух концах двуполюсника. Изучение отображения облегчается его интерпретацией как неевклидова движения на модели Пуанкаре и Кэли-Клейна трехмерного гиперболического пространства. В дальнейшем преобразование среднего отношения шума представляется в четырехмерном пространстве, где оно обозначает четырехмерный вектор, аналогичный вектору Стокса, используемому в оптике и в теории антенн.

Новая теория применялась к изучению следующих вопросов: метод Рота и Дальке расщепления двуполюсника с шумом в двуполюсник с шумом и без шума; каскад двуполюсника с шумом; шум основной (камертон) и сопутствующий (обертон), волна, представляющая шум двуполюсника и наличие наибольшего шума. Резюме автора

10334. Геометрическая интерпретация уравнения Лагранжа—Коши. Георгевич (A geometrical interpretation of the Lagrange—Cauchy equation. Georgewich R.), Notes et trav. Sec. astron. Inst. math. Acad. serbe sci., 1958, **2**, № 10-20, 81—88 (англ.)

Рассматривается уравнение Лагранжа—Коши

$$(x\xi + y\eta + z\zeta)^2 - C_0\zeta\,(x\xi + y\eta + z\zeta) = \Omega\,(xX + yY), \quad (1)$$

связывающее данные полного наблюдения малой планеты. Здесь x, y, z — координаты вектора секториальной скорости $\mathbf{C}$; ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' — направляющие косинусы геоцентрического направления и их первые производные; X, Y — координаты Солнца, C_0 — величина вектора секториальной скорости Земли и $\Omega = X(\eta\zeta' - \zeta\eta') + Y(\xi\xi' - \xi\zeta')$. Для всех небесных тел солнечной системы, имеющих одни и те же сферические координаты ξ, η, ζ и скорости их изменения ξ', η', ζ', концы векторов секториальной скорости лежат на поверхности второго порядка (1). Обычными приемами аналитической геометрии автор устанавливает, что эта поверхность — действительный параболический цилиндр. Получено каноническое уравнение этого цилиндра. В. С. Малаховский

10335. Точная теория напряжений и деформаций в стержнях и в оболочках. Эриксен, Трусделл (Exact theory of stress and strain in rods and shells. Ericksen J. L., Truesdell C.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 4, 295—323 (англ.)

При помощи тензорного анализа дается общая теория деформаций в пространстве n-го измерения. Вводятся понятия деформации положения и деформации ориентации.

Затем эта теория применяется в стержнях и в оболочках. Рассматривая стержень как кривую в пространстве трех измерений, а оболочку как поверхность, дается точная теория деформации в стержнях и в оболочках.

Далее рассматривается общая теория напряжений в стержнях и в оболочках. Вводятся основные принципы напряжений и выводятся дифференциальные уравнения равновесия как стержней, так и оболочек. В. С. Жгенти

10336. Приближенные формулы для вектора поворота при малой деформации. Скрипкин В. А., Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 5, 715

Рассматривается однородная деформация

$$dx^i = \sum_{j=1}^{3} C_j^i d\xi^j, \quad \| C_j^i \| = \| \delta_j^i + w_{;j}^i \| = C,$$

$i, j = 1, 2, 3$

сплошной среды в окрестности точки, отнесенная к декартовой системе в этой точке. Здесь $w^i_{;j}$ — ковариантная производная по j от i-ой компоненты вектора смещений, δ_j^i — единичный тензор, $d\xi^i$ и dx^i — компоненты бесконечно малого вектора до и после деформации. Если ε — матрица тензора деформации (ε_j^i), то $C = D(E + 2\varepsilon)^{1/2}$ где $E = \| \delta_j^i \|$, D — матрица, характеризующая жесткий поворот. Последний задается тензором

$$K = (K_j^i) = \begin{Vmatrix} 0, & -\varphi n & \varphi m \\ \varphi n & 0 & -\varphi l \\ -\varphi m & \varphi l & 0 \end{Vmatrix},$$

где l, m, n — направляющие косинусы оси, φ — угол поворота. Если компоненты тензора деформации малы сравнительно с величиной φ, то приближенно $C = D$ и находятся выражения l, m, n через φ и производные от w^i по ξ^j. При $\sin\varphi \approx \varphi$ для l, m, n получаются обычные формулы линейной теории. Так как $K = \ln D$ выражается через C_j^i, то при помощи разложения в ряд $\ln(E + \Delta)$ получаем ряд для K_j^i. В. С. Люкшин

10337. О некоторых свойствах приведенных ускорений любого порядка. Манжерон (Asupra unor proprietăți ale acceleraţiilor reduse de ordin oarecare. Mangeron D.), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1957, **3**, № 1-2, 43—46 (рум.; рез. русск., нем.)

Рассматривается геометрическое место точек M^*, определяемых векторным уравнением $\bar{r}_{M^*} = \bar{r}_M + \lambda_n \bar{a}^{(n)}_M$, где M — лежащие на некоторой прямой l_M точки фигуры, совершающей плоскопараллельное движение; $\bar{a}^{(n)}_M$ — ускорение n-го порядка точки M и λ_n — фиксированный параметр. Указанное геометрическое место оказывается прямой линией, образующей с l_M угол, зависящий только от состояния движения фигуры в данный момент времени и от λ_n. С. Г. Кислицын

10338. Обобщенная кинематика. Гёненч (Cinematica generalizzata. Gönenç Süeda), Istanbul üniv. fen. fac. mecm., 1955, **A20**, № 1—2, 17—47 (итал.; рез. турецк.)

Изучаются свойства движения, определяемого равенством

$$W = \frac{A(t)W^* + B(t)}{C(t)W^* + D(t)} \qquad (1)$$

в плоскости комплексного переменного. При всяком t существуют две точки плоскости (полюсы движения), в которых скорости равны нулю. Пара полюсов m, n и пара бесконечно близких к ним полюсов определяют общую им гармоническую пару p, q. Автор называет канонической плоскостью плоскость комплексного переменного, в которой точки m, n, p имеют соответственно координаты -1, 1, 0. Тем самым получаются три вида движения:

1) M/F — движение подвижной плоскости относительно неподвижной (см. (1));

2) K/F — движение канонической плоскости относительно неподвижной;

3) M/K — движение подвижной плоскости относительно канонической.

Все три движения определяются равенствами, аналогичными (1), а потому каждому из них соответствует своя пара подвижных полюсов. Автор находит эти полюсы и показывает, что существует одна и только одна пара точек, которые гармонически делят каждую пару полюсов. Находятся соприкасающиеся окружности к различным траекториям. Находятся вершины, т. е. точки, в которых траектории движения (1) имеют сверхсоприкасающиеся окружности.

Выкладки упрощаются путем введения тетрациклических координат. Автор выбирает в качестве репера тетрациклической системы круги, определенным образом построенные на точках m n, p, q.

Рассматривается движение (1) с совпадающими полюсами. В этом случае понятие канонической плоскости вводится с помощью дробно-линейной подстановки $W^* = (W - p)/(CW + D)$. Это движение рассматривается также в тетрациклических координатах.

Рассматриваются другие частные случаи движения:

1) Один из полюсов при движении остается постоянным. Такой случай принципиально ничем не отличается от элементарного движения, где этот полюс бесконечен.

2) Два полюса, отличные друг от друга, остаются постоянными. Полагая один из них нулем, а другой, удаляя в бесконечность, получают в этом случае $W = A(t)W^*$.

3) Оба полюса совпадают и остаются неподвижными. Удаляя двойной полюс в бесконечность, получают обычный параллельный перенос.

В последней части работы указывается метод изучения обобщенной кинематики с помощью кватернионов. Н. И. Кованцов

10339. О понятии «точка приложения векторной производной» и применении его в кинематике плоского движения. Катаев И. И., Zinātn. raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, **21**, 41—45

В каждой точке P параметризованной линии $P(t)$, расположенной в плоскости π, задан вектор $\bar{\omega}(P) = \omega(t)\bar{n}$, где $\omega(t)$ — дифференцируемая функция, $\bar{n}$ — постоянный вектор, перпендикулярный плоскости π. Приращением векторного поля $\bar{\omega}(P)$, соответствующим интервалу $(t, t + \Delta t)$, назовем вектор $\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega}(t + \Delta t) - \bar{\omega}(t)$, приложенный в точке K_1 такой, что равнодействующая двух параллельных сил, приложенных в точках $P(t)$ и $K_1(t, \Delta t)$ и определяемых соответственно векторами $\bar{\omega}(t)$ и $\Delta\bar{\omega}$, представляет собой силу, приложенную в точке $P(t + \Delta t)$.

Пусть $\lim\limits_{\Delta t \to 0} K_1(t, \Delta t) = K(t)$ („точка приложения векторной производной"); имеет место равенство

$$\overline{PK} = \frac{dP(t)}{dt} \frac{\omega(t)}{\frac{d\omega(t)}{dt}}.$$

В том случае, когда $P(t)$ есть мгновенный центр скоростей плоской фигуры, точка $K(t)$ („мгновенный центр углового ускорения фигуры") используется для следующего разложения вектора $\bar{a}(M)$ — ускорения произвольной точки M плоской фигуры: $\bar{a}_M = \bar{\omega}(t) \times \times v(\bar{M}) + \frac{d\omega}{dt} \times \overline{KM}$, где $\bar{\omega}(t)$ — вектор мгновенной угловой скорости фигуры, $\bar{v}(M)$ — вектор скорости точки M. А. М. Лопшиц

10340. Релятивистская кинематика. Арзельес (La cinématique relativiste. Arzeliés Henri. Paris, Gauthier-Villars, 1955, XI, 229 p., 2500 fr.) (франц.)

Исчерпывающее исследование релятивистской кинематики, содержащее очень богатый список литературы. L. Infeld

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 9, 1014.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10341. Подсчет площадей фигур, построенных в разных масштабах. Шпурре Э. Ф., Уч. зап. Бийск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 3, 63—68

10342. Об одном обобщении задачи 3104. Мармион (Sur une généralisation de la question 3104. Marmion A.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 158—159 (франц.)

Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — вершины тетраэдра вписанного в тетраэдр $T \equiv ABCD$ и тетраэдра, описанного около T; A_2 и A_3, B_2 и B_3 и т. д. — ортогональные проекции точек A и A_1, B и B_1 и т. д. на произвольную плоскость. Доказывается, что сферы с центрами в серединах соответственных отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, проходящие через точки A_2 и A_3, B_2 и B_3 и т. д., принадлежат одной сети. Аналогичное предложение имеет место для плоскости: Пусть A и A_1, B и B_1, C и C_1 — три пары противоположных вершин полного четырехугольника; A_2 и A_3, B_2 и B_3, C_2 и C_3 — их проекции на произвольную прямую, тогда окружности с центрами в серединах отрезков AA_1, BB_1, CC_1, проходящие через точки A_2, A_3 и т. д., принадлежат одному и тому же пучку. Г. И. Глейзер

10343. Об углах, образованных прямой со сторонами треугольника. Гурматай (Sur les angles formés par une droite et les côtés d'un triangle. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1958, **67**, № 9-10, 338—343 (франц.)

Известные соотношения между сторонами треугольника и углами, ими образованными с некоторой прямой, обыкновенно выводятся путем проектирования контура треугольника на данную прямую. Прибегая к полю комплексных чисел, автор по-иному получает уже известные и некоторые новые соотношения. Пусть θ_a, θ_b, θ_c — углы, образованные ориентированными сторонами BC, CA, AB треугольника ABC с параллельным данной прямой радиусом OT окружности Γ, описанной около ABC. Устанавливается: а) $\cos A \sin\theta_a + \cos B \sin\theta_b + \cos C \sin\theta_c = OH'/R$, $\cos A\cos\theta_a + \cos B\cos\theta_b + \cos C\cos\theta_c = HH'/R$, где H' — проекция ортоцентра H треугольника ABC на OT; R — радиус окружности Γ; б) $\sin^2\theta_a + \sin^2\theta_b + \sin^2\theta_c = 3/2 + OH_1/2R$, $\cos^2\theta_a + \cos^2\theta_b + \cos^2\theta_c = 3/2 - OH'_1/2R$, где H'_1 — проекция на OT ортоцентра H_1 треугольника, вершинами которого являются точки пересечения с Γ прямых, проведенных через T параллельно сторонам треугольника ABC; в) $\cos 2A \sin 2\theta_a + \cos 2B \sin 2\theta_b + \cos 2C \sin 2\theta_c = H_2H'_2/R$, $\cos 2A \cos 2\theta_a + \cos 2B \cos 2\theta_b + \cos 2C\cos 2\theta_c = -OH'_2/R$, где H_2 — ортоцентр треугольника, вершины которого симметричны с T относительно прямых OA, OB, OC; H'_2 — проекция H_2 на OT; г) Пусть прямые, проходящие через T и параллельные сторонам треугольника ABC, пересекают Γ в точках A_2, B_2, C_2 и пусть A_4, B_4, G_4 — точки, симметричные с T относительно OA_2, OB_2, OC_2; A_8, B_8, C_8 — точки, симметричные с T относительно прямых OA_4, OB_4, OC_4 и т. д. Доказывается: $\sin 2^n\theta_a + \sin 2^n\theta_b + \sin 2^n\theta_c = -H_nH'_n/R$, $\cos 2^n\theta_a + \cos 2^n\theta_b + \cos 2^n\theta_c = OH'_n/R$, где H_n — ортоцентр треугольника, соответствующего индексу n, H'_n — проекция H_n на OT. Г. И. Глейзер

10344. Гармонические группы и окружности. Ларсон (Harmonic sets and circles. Larsson Robert D.), Math. Mag., 1958, **32**, № 1, 35—37 (англ.)

Окружность определяется как геометрическое место точек, расстояния которых до данной прямой равны квадратам расстояний до данной точки. Выбирая начало координат в данной точке и ось OY параллельной данной прямой, исследуется, в каких случаях четыре точки (точки пересечения прямой и окружности с осью OX и начало координат) образуют гармоническую группу точек. С. А. Каганов

10345. Четырехугольник, ортогонально вписанный в тетраэдр. Тебо (Quadrangle orthogonalement inscrit à un tétraèdre. Thébault V.), Mathesis, 1958, **67**, № 1-3, 47—49 (франц.)

Используются формулы, полученные автором ранее (РЖМат, 1956, 6054 К) для определения сторон косого четырехугольника $Q_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$, стороны которого соответственно перпендикулярны граням $(A) \equiv BCD$, $(B) \equiv CDA$, $(C) \equiv DAB$, $(D) \equiv ABC$ и направлены все внутрь. Круговой перестановкой из четырехугольника Q_1 получаем четырехугольники $Q_2 \equiv A_2B_2C_2D_2$ и $Q_3 \equiv A_3B_3C_3D_3$, ортогонально вписанные в тетраэдр T с вершинами в (A), (C), (D), (B) и (A) (D), (B), (C). Диагонали AC, BD четырехугольника Q_1 параллельны прямым $\alpha\alpha'$ и $\gamma\gamma'$, из которых первая перпендикулярна ребрам BC и DA, а вторая — ребрам AB и DC; длины диагоналей обратно пропорциональны $\alpha\alpha'$ и $\gamma\gamma'$. Если вершины четырехугольника Q_1 совпадают с вершинами ортоцентрического тетраэдра $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$, то двугранные углы с ребрами AC и BD тетраэдра T — прямые, и обратно. Приводятся еще некоторые свойства четырехугольников, вписанных в тетраэдр.

С. И. Зетель

10346. Эквицентры двух тетраэдров. До (Equicentres de deux tétraèdres. Deaux R.), Mathesis, 1956, **65**, № 4-6, 261—262 (франц.)

10347. Многоугольники, эквивалентные относительно переноса. Вьола (Poligoni equivalenti per traslazione. Viola Tullio), Period. mat., 1958, **36**, № 5, 310—321 (итал.)

Статья содержит развитие и обобщение результатов, полученных Манара (РЖМат, 1959, 763). Основными понятиями являются T-конгруэнтность, T-равносоставленность и векторная звезда многоугольника (РЖМат, 1959, 763).

Теорема. Для того, чтобы два многоугольника (или две группы многоугольников) P, P' были T-равносоставленными, необходимо и достаточно 1) чтобы P и P' были равновеликими и 2) чтобы P и P' имели одну и ту же векторную звезду.

Отсюда, в частности, следует известный факт: всякие два равновеликих параллелограмма T-равносоставлены.

Необходимость указанных условий доказана Манара (см. выше). Автором доказана достаточность для простых выпуклых многоугольников, для простых невыпуклых и для непростых (звездчатых) многоугольников.

А. М. Комиссарук

10348. Сферы, присоединенные к тетраэдру. Экке, Тебо (Sphères adjointes d'un tétraèdre. Hecquet J., Thébault V.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 125—131 (франц.)

Присоединенными к тетраэдру сферами авторы называют сферы, проходящие через две вершины тетраэдра и касающиеся двух его противоположных ребер. В статье устанавливается ряд фактов, связанных с положением и метрическими свойствами 12 таких присоединенных к тетраэдру сфер, естественно разбивавшихся на 3 четверки.

В частности, доказана теорема: Каждая из присоединенных сфер проходит через две из восьми точек Брокара грани тетраэдра. Центры сфер каждой четверки лежат в вершинах параллелограмма, плоскости которых проходят через точку Монжа, а стороны гармонически сопряжены относительно двух ан фем, которым эта плоскость параллельна. Каждая из сторон будет гармонически сопряжена 3-й апофеме относительно направления двух высот. Р. М. Гейдельман

10349. Гомотетичные ассоциированные тетраэдры. Тебо (Tétraèdres homothétiques associés. Thébault V.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 153—154 (франц.)

Автор дает способ построения тетраэдра, гомотетичного данному с коэффициентом гомотетии $k+1$. Отсюда при $k=1$ и $k=0$ получаются простые доказательства двух теорем Неуберга. Р. М. Гейдельман

10350. Сферы, присоединенные к тетраэдру. Тебо (Sphères associées à un tétraèdre. Thébault Victor), Mathesis, 1958, **67**, № 1-3, 20—23 (франц.)

Лемуан в 1889 году показал аналитически свойство кругов, присоединенных к треугольнику. В настоящей заметке дан краткий геометрический вывод этих свойств, дающий возможность сравнить их со свойствами шаров, аналогичных по отношению к тетраэдру.

Пусть (A) — круг, касающийся в вершине A стороны AC и касающийся в точке a_1 стороны BC треугольника $T\equiv ABC$ внутри угла C; (A') — круг, касающийся в вершине A стороны AC и касающийся BC в точке a_2 внутри угла смежного с углом C треугольника. Аналогично определяются круги (B) и (B'), (C) и (C'). Показано, что радикальные оси шести пар кругов, таких как (A) и (B), (A') и (B') пересекаются по три в центрах вписанного и вневписанных кругов треугольника T_1, дополнительного относительно данного треугольника T. Эти центры совпадают с центрами тяжести системы масс (a, b, c), $(-a, b, c)$ $(a, -b, c)$ $(a, b, -c)$, приложенных в вершинах A, B, C.

Далее доказана следующая лемма: Если точка A находится в плоскости (P), точка (B) в плоскости (Q), сфера (O) касается в точке A плоскости (P) и касается плоскости (Q), и сфера (O') касается в точке B плоскости (Q) и касается плоскости (P), причем обе сферы находятся в одном двугранном углу, то радикальная плоскость двух сфер проходит через середину AB. Применяя лемму к произвольному тетраэдру, получаем следующую теорему: Радикальные центры шести четверок сфер таких, как (A), (B), (A'), (B'), отнесенных к ребрам тетраэдра, совпадают с общими точками плоскостей, проходящих через середину отрезков, соединяющих центры, и через середины противоположных ребер. Если центры радикальных осей несобственные точки, то тетраэдр T — ортоцентрический. Если ребра $BC=a$, $DA=a'$; $CA=b$, $DB=b'$, $AB=c$, $DC=c'$ удовлетворяют равенствам:

$$a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2,$$

то радикальные центры четверок сфер относительно ребер AB, AC, AD совпадают с серединами ребер DC, DB и BC и обратно. С. И Зетель

10351. О центрах квадрик, нормально вписанных в тетраэдр. Мармион (Sur les centres des quadriques normalement inscrites à un tétraèdre. Marmion A.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 138—144 (франц.)

Доказываются некоторые предложения относительно центров квадрик, нормально вписанных в тетраэдр (т. е. таких, что нормали в точках касания сходятся в нормальном полюсе), и их нормальных полюсов.

Центры двух квадрик, нормально вписанных в тетраэдр, у которых нормальные полюсы изогональны, сами изогональны. Четыре центра квадрик, нормально вписанных в тетраэдр, так же как и четыре нормальных полюса, расположены на биквадратичном сечении гиперболоида высот и его изогонали. Четыре прямые, порожденные центрами нормально вписанных квадрик и соответствующими нормальными полюсами, являются образующими гиперболоида высот тетраэдра, описанного около четырех квадрик, нормально вписанных в данный тетраэдр.

Далее рассматриваются свойства центров нормально вписанных квадрик и нормальных полюсов ряда специальных классов тетраэдров. Р. М. Гейдельман

10352. Построения, основанные на двойном касании линейки двух окружностей или на применении диска и линейки. Росье (Constructions admettant la bitangence d'une règle et de deux cercles ou au moyen d'un disque et d'une règle. Rossier Paul), Arch. sci., 1958, **11**, № 3, 363—365 (франц.)

Сообщение о применении двойного касания (касание линейки одновременно двух окружностей) для определения центров двух окружностей, когда окружности лежат одна вне другой, не касаясь. Аналогично с помощью диска и линейки решаются задачи, которые требуют применения циркуля. С. К. Шакулова

10353. Геометрические построения при помощи линейки и циркуля на ограниченной части плоскости. Мартинов (Геометрични построения с линийка и пергел в ограничена част на равнината. Мартинов Н.), Матем. и физика (Бълг.), 1958, **1**, № 5, 6—11 (болг.)

10354 К. К методике решения задач на построение методом подобия. Клёпов В. Д. (Оид ба методикаи халли масъалахои сохтани геометрий бо методи монанди. Клёпов В. Д. Вазорати маорифи РСС Точикистон, Инст. респ. такмили ихтисоси муаллимон. Сталинобод, 1956, 28, сах. расм.) (тадж.)

10355 К. Стереометрия (Геометрия в пространстве). Цвергер, Клуг, Теллер, Николь (Stereometrie «Räumliche Geometrie». Zwerger, Klug. 20. Aufl. Völlig neu bearb. Teller Otto, Nikol Friedrich. München, Lindauer, 1959 (1958), 94 S., ill., 3.80 DM) Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 2, 132 (нем.)

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

10356. О медианах треугольника в гиперболической геометрии. Боттема (On the medians of a triangle in hyperbolic geometry. Bottema O.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 502—506 (англ.)

Если медианы A_iG_i треугольника $A_1A_2A_3$ пересекаются в точке G (центроиде), то равенства $GG_i:A_iG_i=\frac{1}{3}$ для $i=1, 2, 3$ характеризуют свойства центроида треугольника в евклидовой плоскости. Доказывается, что для гиперболической плоскости отношения $\mathrm{sh}GG_i:\mathrm{sh}A_iG_i$ равны $\{2(\mathrm{ch}A_2A_3+\mathrm{ch}A_3A_1+\mathrm{ch}A_1A_2)+3\}^{-\frac{1}{2}}$. Для того чтобы в гиперболической плоскости $GG_1:A_1G_1=\frac{1}{3}$, необходимо и достаточно, чтобы $GG_3=\frac{1}{2}A_1A_2$. Однако не существует таких треугольников, для которых два аналогичных отношения были равны по $\frac{1}{3}$. В треугольнике либо все три отношения $GG_i:A_iG_i$ меньше $\frac{1}{3}$, либо два из этих отношений меньше $\frac{1}{3}$, а третье отношение (соответствующее наименьшей стороне) больше или равно $\frac{1}{3}$. Доказательства аналитические, опирающиеся на задание абсолюта относительно данного треугольника по методу, указанному Коксетером (Coxeter H. S. M., Non-Euclidean geometry, Toronto, 1957). З. А. Скопец

10357. Новая карта плоскости Лобачевского и некоторые ее приложения. Ч. I. Метод и предложения о линиях постоянной кривизны. Хазанов М. Б., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1957, вып. 2, 189—199

В своей работе автор построил карту плоскости Лобачевского, отличную от уже известных. Используя конформное отображение плоскости Лобачевского на полусферу

Пуанкаре $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} < 1$, автор проектирует ее из точки (0, 0, 1) на всю касательную евклидову плоскость и получает новую карту, изоморфную карте Пуанкаре. Автор удачно построил интерпретационный словарь, который позволил ему установить ряд предложений на плоскости Лобачевского и на плоскости Евклида. М. П. Черняев

10358. О некоторых кривых в пространстве Лобачевского. Вакарчук (Про деякі криві в просторі Лобачевського. Вакарчук Б. С.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-т, 1958, **34**, 79—90 (укр.)

Рассматриваются кривые в пространстве Лобачевского, заданные своими натуральными уравнениями. Автор, пользуясь понятиями поверхности, образуемой осями кривизны, ее ребра возврата и соприкасающейся сферы, находит необходимые и достаточные условия того, чтобы кривая была расположена на сфере, эквидистантной или предельной поверхностях.

П. М. Олоничев

10359. Об одном классе конгруэнций прямых трехмерного гиперболического пространства. Зарецкая К. А., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957 (1958), **29**, 241—250

В трехмерном евклидовом пространстве рассматривается сфера, пересеченная плоскостью по окружности большого круга. Каждой точке плоскости, действительной или мнимой, не принадлежащей окружности большого круга (абсолюту), соответствует действительная хорда сферы; каждой точке, принадлежащей абсолюту, соответствует действительная точка сферы. Такое соответствие является взаимно однозначным.

Если хорду сферы рассматривать как прямую гиперболического пространства, то указанное соответствие позволяет отобразить плоские кривые на конгруэнции прямых гиперболического пространства.

Выделен случай аналитических кривых. Каждому двумерному многообразию комплексных точек плоскости сооветствует конгруэнция прямых гиперболического пространства. Аналитической кривой соответствует особая конгруэнция, названная A-конгруэнцией. Кривая рассматривается как точечный образ и одновременно как тангенциальный. Поэтому кривой соответствует пара конгруэнций. При этом лучи одной конгруэнции ортогонально пересекают соответствующие лучи другой. Множество точек пересечения образует поверхность (базисную поверхность пары конгруэнций).

Выяснен ряд свойств A-конгруэнций. Например, показано, что такие конгруэнции являются изотропными. Если кривая оснащена нормалями, то ей соответствует система трех конгруэнций, соответствующие лучи которых попарно ортогональны и пересекаются в точках базисной поверхности. Лучи двух из них лежат в касательных плоскостях этой поверхности, а лучи третьей служат ее нормалями. A-конгруэнцию можно рассматривать как конгруэнцию нормалей некоторой поверхности гиперболического пространства. О. С. Редозубова

10360. Дифференциальные уравнения ортогональных траекторий однопараметрического семейства плоскостей в пространстве Лобачевского. Вакарчук (Диференціальні рівняння ортогональних траєкторій однопараметричного сімейства площин в просторі Лобачевського. Вакарчук Б. С.), Наук. зап. Черчівецьк. ун-т, 1958, **34**, 43—50 (укр.)

Рассматривается однопараметрическое семейство плоскостей в пространстве Лобачевского и находится линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих семейство кривых, проходящих через заданную кривую и ортогональных к выделенному однопараметрическому семейству плоскостей. Полученная система решается в случаях, когда семейством плоскостей будет пучок плоскостей, проходящих через прямую, пучок плоскостей, параллельных плоскости, пучок плоскостей, перпендикулярных к прямой. В первом случае семейство ортогональных кривых образует поверхность вращения, во втором случае, как называет автор, — поверхность вращения первого рода, в третьем случае — поверхность вращения второго рода. Предлагается определять тип поверхности по знаку кривизны ее линий кривизны. П. М. Олоничев

10361. Циклографическое отображение псевдогиперболического пространства на идеальную область плоскости Лобачевского. Скопец З. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 6, 233—243

Берется неособая линейчатая поверхность 2-го порядка F_2. В каждой плоскости, не касающейся F_2, определяется гиперболическая метрика. Метризованное таким образом проективное пространство называется псевдогиперболическим пространством. Проектирование точек F_2 на плоскость π, пересекающую F_2, из ее полюса P относительно F_2, называется циклографическим. Каждой точке на π соответствуют две точки на F_2, которые можно различить, приписывая точкам π ориентацию. Произвольной плоскости α пространства соответствует ориентированная кривая 2-го порядка, являющаяся проекцией $(F_2 \cap \alpha)$ из P на π. Эта кривая называется циклом. Рассматриваются различные типы циклов. Доказываются некоторые теоремы, устанавливающие связь между расположением плоскостей в псевдогиперболическом пространстве и соответствующими циклами. В. А. Маневич

10362. Применение комплексных и двойных чисел к теории прямолинейных конгруэнций в трехмерных неевклидовых пространствах. Габададзе Н., Тр. Тбилисск. ун-та, 1957, **64**, 331—351

Как было показано Клейном, абсолют трехмерного гиперболического пространства ${}^1S_3$ взаимно однозначно и непрерывно отображается на расширенную плоскость комплексного переменного. Б. А. Розенфельд показал, что можно построить аналогичное отображение абсолюта трехмерного неевклидова пространства индекса два ${}^2S_3$ на расширенную плоскость двойного переменного $z = x + ey$, где e — двойная единица, определяемая условием $e^2 = 1$. При этом группы движений пространств ${}^1S_3$ и ${}^2S_3$ изоморфны группам дробно-линейных преобразований комплексного и двойных переменных. Прямые пространств ${}^1S_3$ и ${}^2S_3$, пересекающие абсолют пространств ${}^1S_3$ и ${}^2S_3$, изображаются тогда парами точек плоскости комплексного или двойного переменного, соответствующими точкам пересечения этих прямых с абсолютом. Конгруэнция ориентированных гиперболических прямых пространств ${}^1S_3$ или ${}^2S_3$ (т. е. прямых, пересекающих абсолют) определяет функцию комплексного или двойного переменного $W = f(z)$, где z — точка, изображающая одну точку пересечения прямой конгруэнции с абсолютом, W — другую. Эту функцию автор называет определяющей функцией конгруэнции. В реферируемой статье развивается идея Штуди и Бека о изучении конгруэнций прямых неевклидовых пространств с помощью изучения определяющей ее функции. Автором доказаны следующие утверждения:

1. Параметр распределения P конгруэнции гиперболических прямых пространств ${}^1S_3$ и ${}^2S_3$, заданной определяющей функцией $W = f(z)$ в направлении dZ, равен: $\lim \operatorname{tg} \arg \frac{\sqrt{aZdW}}{W - Z}$ (в пространстве ${}^1S_3$) и $\lim \operatorname{tg} \arg \frac{\sqrt{dZdW}}{W - Z}$ (для пространства ${}^2S_3$).

2. Конгруэнция прямых пространства ${}^1S_3$, полярная конгруэнции, заданной аналитической функцией комплексного переменного, определяется аналитической функцией двойного комплексного переменного (переменного $= x + ye$, где x и y — комплексные). Конгруэнция

прямых пространства $^2S_3$, полярная конгруэнции, заданной аналитической функцией двойного переменного, определяется аналитической функцией двойного переменного. Дано также более простое доказательство следующих теорем Штуди и Бека. У конгруэнций прямых пространств $^1S_3$ и $^2S_3$, определяемых функциями комплексного или двойного переменного, сопряженными с аналитическими, параметр распределения постоянен для каждого луча, а у конгруэнций, определяемых аналитическими функциями комплексного или двойного переменного, центры и центральные плоскости прямых конгруэнции постоянны для каждой прямой. Получены также и другие результаты. Р. М. Гейдельман

10363. О квадрате в афинной прямоугольной геометрии. Циммер (Über Quadrate der affinen Rechtwinkelgeometrie. Zimmer Hans-Georg), Math. Ann., 1958, **135**, № 4, 340—351 (нем.)

Дана афинная плоскость, для которой существует малая теорема Дезарга и аксиома Фано о пересечении диагоналей параллелограмма. Аксиоматически устанавливается существование перпендикулярных прямых g и h ($g \perp h$) плоскости. Прямая g изотропна, если $g \perp g$. Постулируется существование квадрата. Квадрат рассматривается как часть плоскости, в которой лежат стороны и диагонали и называется в этом смысле „квадратной пластинкой" (Quadratgewebe). В дальнейшем широко используется следующее доказанное в начале статьи положение. Дан квадрат $OPQR$. Из точки Q' на прямой OQ опущен перпендикуляр на диагональ PQ, пересекающий стороны квадрата OP в точке P'. Прямые QP' и $P'Q'$ взаимно перпендикулярны. В разделе „конфигурации в геометрии квадрата" доказаны некоторые теоремы, например, если $OPQR$ — квадрат, то существует еще один квадрат со стороной OP. Для каждой пары точек прямой, если она не изотропна, существует два квадрата. Если две стороны треугольника принадлежат квадрату („квадратной пластинке"), то для этого треугольника действительна теорема о пересечении высот в одной точке.

Это положение обозначено H' и в дальнейшем широко используется. В рассматриваемой плоскости за систему координат принимается пара взаимно перпендикулярных не изотропных прямых, за единичную точку выбирают такую точку, чтобы она с вершинами углов образовала квадрат. В этой координатной системе измерение отрезков производится по Гильберту.

На основании положения H' определяется произведение отрезков $a \cdot b$ следующим образом. Из точки $(b, 0)$ опускается перпендикуляр на прямую, проходящую через точки $(a,0)$ и $(0, -1)$, пересекающий ось y в точке $(0, a \cdot b)$.

Если $a \neq 0$, то при помощи символа a_l^{-1} и соответственно символу a_r^{-1} обозначаются величины, обратные a и отложенные соответственно влево и вправо от элемента a. Далее вводится „счетное правило K"

$$(-a_l)^{-1}(ab) = -b \text{ для всех } b.$$

Из него следует, что

$$(-a_r)^{-1} = -(a_l)^{-1}.$$

Правило „K" выводится на основании определения умножения отрезков и положения H'. При помощи правила „K" получается обычное условие перпендикулярности двух прямых.

Заканчивается статья решением задач по аналитической геометрии. С. И. Зетель

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10364. О нормальном уравнении прямой. Мейер (Zur Hesseschen Normalform der Geraden. Meyer H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 5, 225 (нем.)

См. также РЖМат, 1958, 4101.

10365. Пересечение двух парабол. Гурматай (Intersections of two parabolas. Goormaghtigh R.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 341, 213—214 (англ.)

10366. Схема построения параболы. Рансом (A parabola scheme. Ransom William R.), School Sci. and Math., 1959, **59**, № 2, 135—137 (англ.)

10367. Добавление к статье «Изучение сопряженных диаметров гиперболы». Малль (Nachtrag zum Beitrag über die Behandlung der konjugierten Durchmesser bei der Hyperbel. Mall J.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **10**, № 10, 468—469 (нем.)

Добавление к статье РЖМат, 1958, 9180.

10368. От Архимедова алгоритма для площади параболического сегмента к приближенной формуле для площади кругового сегмента. Ю Чжао-чжэнь, Шусюэ тунбао, Shuxue tongbao, 1958, № 8, 1—6 (кит.)

Геометрическая интерпретация первой приближенной формулы $\frac{2}{3}lh$ для вычисления площади кругового сегмента будет, площадью параболического сегмента $P_1P_2P_3$ с вершиной в точке P_3. Если точно так же провести две параболические дуги соответственно для сегментов P_2P_3 и P_1P_3, то площадь между этими двумя параболическими дугами и хордой P_1P_2 будет хорошо представлять вторую приближенную формулу $\frac{2}{3}lh + \frac{1}{2}\frac{h^3}{l}$.

Общая формула для площади параболического сегмента через длину хорды $P_1P_2 = l$, ее равноделящей $P_3M = h$ из вершины P_3 и угла между ними $\angle P_1MP_3 = \alpha$ легко получается из Архимедова алгоритма для площади и имеет вид:

$$\sum = \frac{2}{3}lh\sin\alpha.$$

Подобно этому приближенная формула для эллиптического сегмента получается в виде:

$$S \approx \frac{2}{3}lh\sin\alpha$$

с относительной ошибкой меньше $\frac{4}{3}\Phi^2\%$, где $\Phi = \theta_1 - \theta_2$ есть разность углов θ, определяющих концы P_1, P_2 хорды сегмента в уравнении эллипса $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$. Первая формула для площади кругового сегмента будет специальным случаем ее. Что касается до кругового сегмента, который больше полукруга, то формула, соответствующая первой формуле, теперь будет

$$\frac{\pi}{4}\left(h^2 + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{16}\frac{l^4}{h^2}\right) - \frac{1}{6}\frac{l^3}{l}.$$

Резюме автора

10369. Конические сечения, аналогичные окружностям Тюкера. До (Coniques analogues aux cercles de Tücker. Deaux R.), Mathesis, 1958, **67**, № 4—6, 113—122 (франц.)

Гомотетия с любым коэффициентом и центром в точке Лемуана преобразует данный треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, стороны которого пересекают несоответственные стороны треугольника ABC в шести точках, лежащих на окружностях Тюкера. В настоящей заметке рассматривается аналитически в проективной плоскости семейство действительных конических сечений Γ, которые соответствуют окружностям Тюкера при замене гомотетии гомологией H с центром в произвольной точке S треугольника, не лежащей на его сторонах и с произвольной осью d, не проходящей ни через одну из его вершин. Возвращаясь к случаю гомотетии, находят условия, при которых Γ — парабола, равносторонняя гипербола.

Обозначения: s — трилинейная поляра точки S; D — трилинейный полюс прямой d; (S), (D) — конические сечения, проходящие через основания чевиан, пересекающихся в точках S и D, эти сечения огибают трилинейные поляры точек прямых s и d. (S_1), (D_1) — описанные конические сечения — геометрическое место трилинейных полюсов прямых, проходящих через S и D.

Устанавливается зависимость между координатами гомологичных точек M и M', если центр гомологии S (x_0, y_0, z_0) и уравнение оси гомологии $x + y + z = 0$ при различных k (коэффициент гомологии). Далее получается уравнение искомых конических сечений с параметром k. Исследуя частные случаи: $k = \infty - \Gamma_\infty$ — двойная прямая, при $k = 1$ — коническое сечение (S_1), при $k = 0$ — коническое сечение, содержащее точки пересечения сторон треугольника ABC с прямыми, проектирующими из S точки пересечения сторон с осью гомологии d. При переменном k и фиксированных ABC, S и d, точки пересечения D_1 и D_2 прямой d с коническим сечением Γ_k — фиксированы. Они совпадают, если S находится на коническом сечении (D). Если прямые d и s не совпадают и пересекаются в точке P, то на прямой m, проходящей через P и не совпадающей с d, конические сечения Γ_k образуют инволюцию, для которой точка P — двойная, имеющая общую поляру p относительно всех конических сечений Γ_k. Уравнение p поляры Γ_k: $\sum y_0 z_0 (y_0 - z_0) x = 0$. Поляра p — геометрическое место полюсов относительно конических сечений Γ_k всех прямых, проходящих через точку P.

Сложное отношение полюсов Q_k прямой d относительно четырех конических сечений Γ_k равно отношению соответствующих коэффициентов четырех гомологий. В частности,

$$(SQ_\infty Q_0 Q_k) = \frac{1}{1+k}, \quad (SQ_\infty Q_1 Q_k) = \frac{2}{1+k}.$$

Приводится много интересных свойств рассматриваемых конических сечений.

В заключение рассматривается случай, когда конические сечения — окружности. В этом случае $x_0 : y_0 : z_0 = a^2 : b^2 : c^2$ (характеристическое свойство точки K — точки Лемуана). Показано, что центры окружностей Тюкера лежат на диаметре круга Брокара $p = OK$, где O — центр описанного круга. В случае совпадения точки D с центром тяжести треугольника ABC, коническое сечение (D) — вписанный эллипс Штейнера. Если точка S лежит на трилинейной поляре ортоцентра (или ортической оси), то конические сечения — равносторонние гиперболы. С. И. Зетель

10370. Хорда конического сечения, серединой которой служит данная точка. Герриш (Chord of a conic with a given midpoint. Gerrish F.), Math. Gaz., 1958, 42, № 341, 211 (англ.)

Заметка методического характера. Уравнение хорды, обладающей требуемым свойством, получено в виде $S_1 = S_{11}$, где индекс означает подстановку координат заданной точки в полярную форму конического сечения $S = 0$. А. М. Березман

10371. Общий способ построения кривых второго порядка. Мишагин В. Н., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 205—208

Элементарный способ построения конических сечений основан на преобразовании прямой линии с помощью окружности. Точка K прямой $x = q$ преобразуется в точку $M(x, y)$ с помощью вспомогательной окружности, концами диаметра которой являются точки $C(p, 0)$ и $B(n, 0)$. Прямая CK встречает окружность в точке P. Пересечение прямых BP и KA, где A — точка оси абсцисс, определяет точку M, удовлетворяющую уравнению кривой второго порядка:

$$(m + x)(n - x)(q - p) = (q + m) y^2,$$

где m — расстояние точки A от начала координат.

Рассматривается построение эллипса, гиперболы и параболы для задания этих кривых различными элементами или сочетанием их: а) ссями; б) осью и точкой; в) фокусами и большой (действительной) осью — для эллипса (гиперболы); г) осью, вершиной и точкой и е) фокусом и директрисой — для параболы. Построения, не считая вспомогательной окружности, выполняются при помощи одной линейки. Г. И. Глейзер

10372. О построении лемнискаты по точкам. Блум (On a pointwise construction of the lemniscate. Blum Richard), Canad. Math. Bull., 1958, 1, № 1, 1—4 (англ.)

Решается задача: Даны две касающиеся окружности N и T. Найти геометрическое место вершин треугольников, для которых N — окружность девяти точек и T — вписанная или вневписанная окружность. Для получения уравнения искомого геометрического места вводится подвижная декартова косоугольная система координат с осями τ-переменной касательной к окружности T и η-касательной к окружностям в точке их касания. После перехода к фиксированной декартовой прямоугольной координатной системе и исключения параметров получено уравнение бициркулярной кривой 4-го порядка

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(r + R) x (x^2 + y^2) + 4r[(r + 3R) x^2 + (r - R) y^2] = 0$$

(ось x-ов совпадает с линией центров, а начало симметрично с центром окружности T относительно точки касания обеих окружностей). При $R = -r$, что означает равенство радиусов и внешнее касание окружностей N и T, получается лемниската

$$(x^2 + y^2)^2 - 8r^2(x^2 - y^2) = 0$$

с центром в начале координат и фокусом в центре окружности T. Из свойств рассматриваемого геометрического места вытекает следующее построение лемнискаты по точкам. Пусть окружности N и T равных радиусов с центрами в O и F касаются. Переменная касательная τ к T пересекает окружность N в точке B, а общую касательную η окружностей — в точке C. Точка пересечения прямой $BU \perp \tau$ с прямой $OV \parallel CF$ является искомой. О. А. Котий

10373. n-мерный аналог теоремы Паскаля. Ивницкий Т. Г., Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-та, 1957, 21, 139—147

Обобщается на n-мерное пространство теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, аналогично тому, как это сделано в ранней статье автора (РЖМат, 1957, 4297). В. А. Маневич

10374 К. Векторное изложение некоторых задач аналитической геометрии плоскости и прямой. Михайлович (Vektorska obrada nekih problema analitičke geometrije ravni i prave. Mihailović D. Mat. bibliot., № 5, Beograd, 1957, 70 s., il.) (сербо-хорв.)

Книжка имеет целью дать в векторной форме изложение основных элементарных задач линейной аналитической геометрии. Сюда входит уравнение плоскости в различных векторных формах — общего вида, нормального вида, в отрезках, параметрическое уравнение с двумя скалярными параметрами, а также уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору и через три данных точки, и уравнение пучка плоскостей. Прямая рассматривается заданной с помощью двух линейных векторных уравнений,

уравнением вида $\bar{r}\times\bar{a}=\bar{b}$, а также точкой и направляющим вектором или двумя точками; показывается, как эти виды уравнений можно сводить одно к другому. Разбираются задачи определения расстояний и углов между заданными плоскостями, прямыми и точками. Само векторное исчисление и аналитическая геометрия предполагаются известными и не излагаются. Собрания задач книжка не содержит, кроме небольшого числа иллюстрирующих примеров. Как указывает автор, он использовал многочисленную и в особенности советскую литературу по этому предмету. М. Ф. Бокштейн

10375 К. Векторное и тензорное исчисление. Делаше (Calcul vectoriel et calcul tensoriel. 3e éd. Delachet André. Paris, Presses univ. France, 1958, 128 p., ill., 177 fr.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 1, 6 (франц.)

10376 К. Аналитическая геометрия с векторной алгеброй. Улчар (Аналитична геометрија со векторска алгебра. Улчар Јоже. Скопје, ун-т во Скопје, 1958, 500 стр., илл.) (македон.)

Книга является первым на македонском языке учебником по математике, предназначенным для университетских занятий. Разделена на две части: I. Векторы и их применение в геометрии (стр. 1—184), II. Кривые линии и поверхности (стр. 185—500).

Первая часть состоит из шести глав: 1. Введение в векторную алгебру; 2. Афинные координаты вектора и точки; 3. Ориентированные поверхности и пространства; 4. Скалярное и векторное произведения двух векторов; 5. Полярные координаты; 6. Преобразования координат и аффинное отображение.

Вторая часть состоит из пяти глав: 1. Прямая линия на плоскости. Плоскость в пространстве; 2. Окружность и сфера; 3. Кривые линии и поверхности второго порядка; 4. Некоторые категории поверхностей; 5. Комплексная плоскость и комплексное пространство.

Автор цитирует 28 названий книг, послуживших ему при редактировании настоящего учебника. Материал в учебнике изложен систематически. Автор пользуется матричным и векторным исчислениями. Теоретические изложения иллюстрированы многочисленными решениями задач. Большое число задач оставлено для упражнений читателям.

Учебник рассчитан на студентов математико-физических факультетов первого курса, но он может быть использован и в работе студентов втузов.

Д. Митринович

10377 К. Лекции по аналитической геометрии. Погорелов А. В. Харьков, Харьковск. ун-т, 1957, 162 стр., илл., 4 р. 40 к.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10378. Метод малой вариации в задачах о действительных плоских алгебраических кривых. Часть I. Порку (Il metodo di «piccola variazione» in problemi concernenti le curve algebriche piane reali. Parte 1. Porcu Livio), Period. mat., 1958, **36**, № 3, 156—174 (итал.)

Обзор, новых результатов не содержит. Метод малой вариации есть способ качественного исследования изменения формы кривой линейного пучка при малом изменении параметра. Возможность применения к построению кривых с заданными особенностями и расположением ветвей. См. также обзор Брузотти (РЖМат, 1958, 7095).

Ю. И. Манин

10379. Алгебраические косы; некоторые приложения. Леви-Брюль (Tresses algébriques: quelques applications. Levy-Bruhl P.), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris. 1956—1957, 10. Paris, 1958, 4-1—4-18 (франц.)

Продолжение работы, опубликованной ранее (РЖМат, 1959, 7202): канонические формы косы алгебраической кривой, теорема существования (Кизини), примеры и приложения, в частности, к теории кратных плоскостей.

В. В. Морозов

10380. О неравенстве Кастельнуово — Севери. Маттук, Тейт (On the inequality of Castelnuovo-Severi. Mattuck Arthur, Tate John), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 3-4, 295—299 (англ.)

Пусть C и C' — полные несингулярные кривые, определенные над алгебраически замкнутым полем k, D — дивизор на $V=C\times C'$, $d=[D\cdot(p\times C')]$ и $d'=[D\cdot(C\times p')]$ — степени D над C и C'. Показывается, что неравенство Кастельнуово — Севери $\frac{1}{2}[D\cdot D]\leqslant dd'$ является следствием теоремы Римана — Роха для поверхностей. Далее, исходя из того же круга идей, доказывается гипотеза Римана о числе N рациональных точек кривой C жанра g над конечным полем с q элементами: $|q+1-N|\leqslant 2g\sqrt{q}$. В. В. Морозов

10381. Об одной заметке Маттука и Тэйта. Гротендик (Sur une note de Mattuck—Tate. Grothendieck A.), J. reine und angew. Math., 1958, **200**, № 3-4, 208—215 (франц.)

Автор указывает, что неравенство Вейля, доказываемое в заметке (реф. 10380), является простым алгебраическим следствием теоремы Ходжа — Сегре (которой здесь же дает простое доказательство): пусть x — неособенная проективная поверхность, G — группа классов (относительно линейной эквивалентности) дивизоров на ней, $P(x)$ — его многообразие Пикара, $N=G/P$ — группа Нерона — Севери и пусть $E=N\otimes R$ имеет размерность n. Тогда билинейная форма на $E\times E$, индуцируемая отображением $(D,\ D')\to D\cdot D'$ группы $G\times G$ в Z, будет невырожденной и типа $(1,\ n-1)$. Показывается, что из факта существования на конечномерном линейном пространстве симметрической билинейной формы этого типа следует ряд неравенств между значениями этой формы (например, если $f(x,\ x)\geqslant 0$, то $f(x,z)^2f(y,\ y)+f(x,\ y)^2f(z,\ z)-2f(x,\ y)f(y,\ z)\times f(z,\ x)\leqslant 0$, причем равенство имеет место только, если $f(x,\ x)=0$ или $yf(x,\ z)-zf(x,\ y)=0$); применительно к алгебраической геометрии так получается не только неравенство Вейля но и многие другие.

Развивая эту идею, автор доказывает следующую теорему: Пусть X — несингулярная проективная поверхность арифметического жанра $\chi(X)$, C и C' — две неприводимые кривые на ней, $\widetilde{C}$ и $\widetilde{C}'$ — их нормализанты, g, g', π, π' — их жанры и виртуальные жанры соответственно, $\delta=\pi-g$, $\delta'=\pi'-g'$, $\alpha=C^2$, $\alpha'=C'^2$ и D — такой дивизор на X, что $D\cdot C\leqslant g-1$, $D\cdot C'\geqslant\pi'-1-\alpha'+\delta'$. Тогда если $C^2>0$, $C'^2>0$ и отображения $P(X)\to P(\widetilde{C})$, $P(X)\to P(\widetilde{C}')$ сюръективны, то

$$\chi(D)=\frac{1}{2}\ D(D-K)-\chi(X)\leqslant 0.$$

Из этой теоремы выводится ряд следствий, из которых приведем одно: Если X — несингулярная проективная поверхность и C — неприводимая несингулярная кривая на ней, удовлетворяющая условиям теоремы и $2a=K\cdot C$, то квадратичная форма, ассоциированная билинейной форме $f_C(D,\ D')=\alpha(D,\ D')-(D\cdot C)(D'\cdot C)$, отрицательно определена и для любого дивизора D $f_C(D,\ D-K)+2a\chi(X)-a^2\leqslant 0$. В. В. Морозов

10382. Обобщение формулы Шуберта. Бреннан (A generalisation of a formula due to Schubert. Brennan J. G.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1958, **11**, № 2, 79—82 (англ.)

Если на алгебраической кривой жанра p даны линейный ряд g^r_m и алгебраический ряд γ^1_n индекса ν с d двойными точками (оба без фиксированных точек), то число групп общих им точек, каждая из которых (групп) состоит из a_i точек кратности k_i $(i = 1,2,\ldots,p)$ для g^r_m, но простых для γ^1_n $\left(\sum a_i k_i = r+1\right)$, дается, как показывает автор, формулой

$$Z = \frac{n!}{a_1'\ldots a_p'\left(n-\sum a\right)!}\left[\frac{\nu}{n}\left\{(r+1)(m-p+1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(p-1)\sum a_i k_i^2\right\}-\frac{d}{2n(n-1)}\left\{(r+1)^2-\sum a_i k_i^2\right\}\right].$$

Формула Шуберта получается отсюда при $a_1 = r+1$, $k_1 = 1$, $k_i = 0$ $(i > 1)$. В. В. Морозов

10383. Поверхность третьего порядка с двумя абсолютными двойными точками, содержащая абсолютное коническое сечение и циркулярную кривую 3-го порядка. Пальман (Flächen dritter Ordnung mit zwei absoluten Doppelpunkten, die den absoluten Kegelschnitt enthalten, und zirkuläre Kurven dritter Ordnung. Palman Dominik), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, **13**, № 1, 41—55 (нем.; рез. сербо-хорв.)

На произвольной плоскости π возьмем циркулярную кривую C 3-го порядка 1-го рода. Пусть Θ — пучок плоскостей, перпендикулярных π и параллельных асимптоте кривой C. Каждая плоскость пучка Θ пересекает C в двух собственных и одной несобственной точках. На отрезке с концами в этих собственных точках строим как на диаметре окружность, лежащую в плоскости Θ. Все такие окружности образуют поверхность 3-го порядка F^3, содержащую абсолютную кривую 2-го порядка и две абсолютные двойные точки. Рассматриваются некоторые свойства этой поверхности, как например: центры окружностей, образующих F^3 лежат на равносторонней гиперболе. В. А. Маневич

10384. О кубической поверхности с одной бипланарной и двумя коническими точками. Штепанский (O ploše kubické s jedním bodem biplanárním a dvěma konickými. Štěpánský Václav), Sbor. vědec. prací Vysoké školy báňské Ostravě, 1958, **4**, № 2, 165—184 (чешск.; рез. русск., англ.)

Рассматриваемая поверхность определяется как геометрическое место точек, каждая из которых характеризуется следующим свойством: прямые, соединяющие эту точку с вершинами данного тетраэдра, пересекают соответственно грани другого данного тетраэдра в точках, лежащих в одной плоскости. При специальном выборе взаимного расположения двух данных тетраэдров указанное геометрическое место представляет собою поверхность третьего порядка с одной бипланарной и двумя коническими точками. Исследование уравнения этой поверхности показывает, что поверхность имеет определенную систему лежащих на ней прямых различной кратности, причем положение этих прямых вполне определяется заданными тетраэдрами.

Используя результаты алгебраического исследования, автор рассматривает некоторые конструктивные задачи, относящиеся к построению упомянутой системы прямых, связанных с рассматриваемой поверхностью, по некоторым данным ее элементам, а также к построению точек самой поверхности.

Русское резюме работы содержит существенные неточности перевода. В. Н. Скрыдлов

10385. Об одной теореме Вилларсо. Дюрье (Sur un théorème de Villarceau. Durieu M.), Mathesis, 1958, **67**, № 1-3, 57 (франц.)

Сечение алгебраической поверхности касательной плоскостью имеет двойную точку в точке касания. Поскольку тор — поверхность 4-го порядка, несобственная линия которой — дважды взятая абсолютная окружность, всякая дважды касательная плоскость сечет его по кривой 4-го порядка, которая, имея 4 двойных точки, из которых две циклические, и распадается на две окружности. Из резюме автора

10386. Дальнейшее развитие теории диаметральных плоскостей алгебраических поверхностей. Розина (Ulteriori sviluppi della teoria diametrale delle superficie agebriche. Rosina B. A., Ann. Univ. Ferrara, 1955, Sez. 7, **4**, 51—67) (итал.)

Диаметральная плоскость алгебраической поверхности есть полярная плоскость бесконечно удаленной точки, направление которой называется сопряженным плоскости. Общие формы даны для уравнения в декартовых координатах поверхности, имеющей «главную» точку или прямую (собственную или несобственную), т. е. такую, через которую проходят все диаметральные плоскости. Находятся также главные диаметральные плоскости, т. е. такие, которые перпендикулярны к сопряженному направлению. Методы элементарны, и результаты очевидны, за исключением тех, которые явно ошибочны. В подстрочечном примечании утверждается, что квадрика с главной прямой, собственной либо несобственной, является параболоидом, тогда как очевидно это цилиндр, обычный либо параболический. Более грубая ошибка в утверждении, что общая поверхность порядка n имеет n^2 главных диаметральных плоскостей, что дает четыре для общих квадрик. Правильное число будет n^2-n+1. P. Du Val

Перевод из Math. Rews, 1956, **17**, № 10, 1136

10387. О некоторых алгебраических поверхностях, несущих циклические инволюции со слитыми точками только первого рода. Годо (Sur certaines surfaces algébriques contenant des involutions cycliques n'admettant que des points unis de première espèce. Godeaux Lucien), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 155—160 (франц.)

Рассматривается поверхность, заданная в S_4 уравнениями $\varphi_i(x_0,x_1)+\psi_i(x_2,x_3,x_4)=0$, $i=1,2$, где φ_i, ψ_i — формы простой нечетной степени p. Она допускает инволюцию, индуцированную гомографией $x_0':x_1':x_2':x_3':x_4' = x_0:x_1:\varepsilon x_2:\varepsilon x_3:\varepsilon x_4$, где ε — первообразный корень степени p из единицы; эта инволюция имеет p^2 слитых точек, которые все первого рода (т. е. инволюция оказывается тождеством в окрестности первого порядка любой из этих точек). Изучается поверхность — образ этой инволюции и ее каноническая модель. Оказывается, что система гиперплоскостных сечений последней дает ее полную каноническую систему. В. В. Морозов

10388. О циклических инволюциях, принадлежащих некоторым алгебраическим поверхностям. Лави (Sur des involutions cycliques appartenant à certaines surfaces algébriques. Lavis A.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 8, 708—722 (франц.)

В S_{r+4} рассматривается поверхность F, заданная уравнениями $(x_{r+3}x_{r+4})^k = f_{2k}$ $(k = 1,\ldots,r)$, $x_{r+3}^{2r+1} = f_{2r+1}$, $x_{r+4}^{2r+1} = f'_{2r+1}$, где f_j, f'_{2r+1} — формы от $x_0,\ldots,x_{r+2}$ степеней, равных их индексам. Она допускает инволюцию $x_0':x_1':\ldots:x'_{r+4} = x_0:\ldots:x_{r+2}:\varepsilon x_{r+3}:\varepsilon^{2r}x_{r+4}$, где ε — первообразный корень степени $2r+1$ из единицы. Изучается поверхность F' — образ этой инволюции, структура ее точек дирамации и некоторые кривые на ней. В. В. Морозов

10389. О циклических инволюциях, принадлежащих некоторым алгебраическим поверхностям. Лави (Sur des involutions cycliques appartenant à certaines surfaces algébriques. Lavis A.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 9, 767—779 (франц.)

Часть I см. реф. 10388.

В S_{r+4} рассматривается поверхность $x_{r+3}^{2i-1}x_{r+4}^{r-i+1} = f_{r+i}(x_0, \ldots, x_{r+2})$ $(i = 1, \ldots, r)$, $x_{r+3}^{2r+1} = f_{2r+1}$, $x_{r+4}^{2r+1} = f'_{2r+1}$, где f, f' — полиномы, степени которых равны их индексам, и инволюция на ней порожденная гомографией $x_0' : \ldots : x'_{r+4} = x_0 : \ldots : x_{r+2} : \varepsilon x_{r+3} : \varepsilon^2 x_{r+4}$, где ε первообразных корень степени $2r+1$ из единицы. Изучается поверхность — образ этой инволюции и структура ее точек дирамации. В. В. Морозов

10390. Некоторые формулы для мультисекущих. Вильсон (Some formulae for multisecants. Wilson E. M.), Istanbul üniv. fen. fac. mecm., 1955, **A20**, № 3-4, 113—139 (англ.; рез. турецк.)

Предполагая возможным выразить (если оно конечно) число i-секущих $[k]$-пространств алгебраического многообразия V_d в S_r в функции $m^i{}_{k,d}[r] = \varphi$ от его аддитивных проективных характеров $x_0, x_1, \ldots$ (для поверхностей общего типа это — порядок, жанр гиперплоскостных сечений, класс, тип и числа содержащихся в поверхности рациональных кривых 1-го, 2-го и т. д. порядков, а для линейчатых поверхностей—скроллей — порядок и жанр) и что φ сохраняет смысл для распадающегося многообразия, автор получает функциональное уравнение

$$\varphi(x_0' + x_0'', x_1' + x_1'', \ldots) = \varphi(x_0', x_1', \ldots) + \varphi(x''_0, x''_1, \ldots) + f(x_0', x_1', \ldots; x_0'', x_1'', \ldots),$$

где f — число искомых секущих, общих для компонент V. Показывается, что f выражается через решения аналогичных уравнений в известном смысле низшего порядка и что при известной f искомое решение φ определяется этим уравнением с точностью до линейной функции характеров. Для определения последней автор предлагает использовать в достаточном числе такие многообразия, для которых числовое значение φ известно. Пользуясь этим методом, он находит выражения

$$m^5_{3,2}[13],\ m^4_{2,2}[10],\ m^5_{2,2}[7],\ m^6_{2,2}[6],\ m^9_{2,2}[5]$$

(последнее занимает почти страницу) и аналогичные выражения для скроллей, не говоря уже о промежуточных выражениях, необходимых для вычисления вышеприведенных. Каждая из полученных основных и промежуточных формул, как указывает автор, применялась им к большому числу поверхностей (до нескольких десятков; детали содержатся в его диссертации Formulae for multisecants, 1950, находящейся в библиотеке Лондонского университета) и случаи, когда они оказывались неприменимы, почти всегда объяснялись наличием в поверхностях некоторых аномалий. Как говорит сам автор, „правильность этих формул зависит от справедливости известных предположений и поэтому нельзя требовать от них полной строгости, однако приложения, относящиеся к большому числу поверхностей, преимущественно рациональных, обеспечивают нечто вроде экспериментального их подтверждения. Как можно надеяться, примеры, рассмотренные в достаточном числе, убеждают, что в известном смысле эти формулы верны вообще". В. В. Морозов

10391. Кратности максимальных связных компонент пересечения. Мюрре (Intersection multiplicities of maximal connected bunches. Murre J. P.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 2, 311—330 (англ.)

Пусть V^n — проективное алгебраическое многообразие, A^a, B^b — подмногообразия V, C — максимальная связная совокупность подмногообразий пересечения $A^a \cap B^b$. При условии, что $a + b = n$ и каждая точка C проста на V, автор определяет символ кратности пересечения $i(A \cap B, C, V)$ и доказывает его основные свойства. Как указывает автор, метод определения восходит к Севери и Ван-дер-Вардену; многообразие A включается в алгебраическую систему, общий член которой „хорошо" пересекается с B, а затем применяется принцип связности Зариского (РЖМат, 1958, 7097).

Ю. И. Манин

10392. Теорема существования Римана и ее обобщения. Серр (Le théorème d'existence de Riemann et ses généralisations. Serre Jean-Pierre), Enseign. math., 1958, **4**, № 4, 300—301 (франц.)

Сформулировано следующее утверждение. Пусть V — нормальное неприводимое проективное алгебраическое многообразие над полем комплексных чисел, D — его подмногообразие, $\tilde{f}: \tilde{V} \to V \setminus D$ — конечнолистное накрытие ($\tilde{V}$ связно). Тогда существуют нормальное неприводимое проективное алгебраическое многообразие V' и его регулярное отображение f на V такие, что $\tilde{V} = V' \setminus f^{-1}(D)$, $f = \tilde{f}$ на $\tilde{V}$ и $f^{-1}(v)$ конечно для всех $v \in V$. Эти условия однозначно определяют отображение f. Указаны основные этапы доказательства.

А. Л. Онищик

10393. Универсальное отображающее свойство обобщенных якобиевых многообразий. Розенлихт (A universal mapping property of generalized Jacobian varieties. Rosenlicht Maxwell), Ann. Math., 1957, **66**, № 1, 80—88 (англ.)

Свойство универсальности канонического отображения неособенной алгебраической кривой и ее якобиево многообразие (м.) (Weil A., Variétés Abéliennes et courbes algébriques, Paris, 1948, **77**) переносится на введенные автором обобщенные якобиевы м. (РЖМат, 1956, 5451) с привлечением более ранних результатов автора о соотношениях эквивалентности на алгебраических кривых (Ann. Math., 1952, **56** 169—191) и других его исследований, касающихся их свойств. Соответствующий результат таков: пусть C — полная неособенная кривая, G — коммутативная алгебраическая группа, ψ — рациональное отображение $C \to G$ и $P_1, \ldots, P_s$ — точки C, в которых ψ не определено. Тогда на C существует отношение эквивалентности, местами которого являются $P_1, \ldots, P_s$, причем, если I — обобщенное якобиево м. этого отношения и φ — каноническое отображение $C \to J$, то существуют точка $a \in G$ и рациональный гомоморфизм $\tau: J \to G$ такие, что для любой точки P кривой C (кроме $P_1, \ldots, P_s$) имеет место $\psi P = \tau\varphi P + a$.

Указываются упрощения, которые вносит в изложение теории алгебраических групп использование этого результата (реф. 10394). В. В. Морозов

10394. Некоторые основные теоремы об алгебраических группах. Розенлихт (Some basic theorems on algebraic groups. Rosenlicht Maxwell), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 2, 401—443 (англ.)

Цель статьи — дать систематическое изложение некоторых основных результатов теории алгебраических групп. Главнейшим из полученных результатов является доказательство структурных теорем, в которых рассматривается существование нормальной алгебраической подгруппы H в некоторой алгебраической группе G, таких, что H и G/H принадлежат к некоторому определенному типу. Самый важный из этих результатов, высказанный Шеваллеем в 1953 г. и впервые доказанный в печати Барсотти (РЖМат, 1957, 870; 1959, 5148) утверждает, что если G связно, то существует такая линейная подгруппа H, что G/H будет абелевым многообразием. В двух первых частях статьи рассматривается необходимое для дальнейшего понятие фактор-группы, связываемое естественным образом с пространствами преобразований и множествами траекторий. Общие ме-

тоды идут от Накано (Nakano, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1952, A27, 55—66) и Вейля (РЖМат, 1957 5106, 5107), но в данной статье они обобщены и на приводимый случай. В третьей части рассматриваются теоремы о гомоморфизмах. Показано, что естественный групповой изоморфизм $G/H \approx (G/N)/(H/N)$ бирационален; это не всегда верно для естественного изоморфизма $H/(H \cap N) \approx HN/N$; однако этот последний рационален и вполне несепарабелен. Пересмотрев вейлевское понятие „изогенности" абелевых групп с целью сделать его приложимым к произвольным алгебраическим группам, автор получает результат, несколько уточняющий тот факт, что $H/(H \cap N) \approx HN/N$ есть вполне несепарабельная изогенность. Это позволяет автору доказать для алгебраических групп теорему Жордана — Гёльдера — Шрейера с помощью леммы Цассенхауза.

В четвертой части рассматриваются связные алгебраические группы, являющиеся разрешимыми (в строгом смысле, все фактор-группы некоторой нормальной цепи бирационально изоморфны либо аддитивной, либо мультипликативной группам универсального поля). Главный результат здесь состоит в том, что если V есть пространство преобразований для такой группы G и если $\tau : V \to W$ обозначает каноническое сюръективное рациональное отображение V на множество траекторий W, тогда существует „сечение", т. е. рациональное отображение $\sigma : W \to V$ такое, что $\tau\sigma = 1$. В последней части рассматриваются структурные теоремы, подобные упоминавшимся выше. E. R. Kolchin

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 6, 514.

10395. Новые геометрические рассмотрения в проективной теории инвариантов. Бурау (Neue geometrische Betrachtungsweisen in der projektiven Invariantentheorie. Burau W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 105 (нем.)

Доказывается, что комитанты степени g относительно коэффициентов формы k-й степени определяют специальные гиперповерхности, содержащие многообразия Веронезе V_n^k. Приводятся примеры. Результаты переносятся на систему многих форм.

10396. Редукция mod p p-адических классов дивизоров. Маттук (Reduction mod p of p-adic divisor classes. Mattuck Arthur), J. reine und angew. Math., 1958, 200, № 1-2, 45—51 (англ.)

Изучается поведение группы D классов дивизоров-нулевой степени поля алгебраических функций одной переменной K над полем констант k с дискретной валюацией p при невырожденной редукции $\mathrm{mod}\, p : K/k \to K'/k'$ в смысле Дейринга (Deuring M., Math. Z., 1942, 47, 643), к теории которой автор делает некоторые добавления. Если поле k полное, то оно содержит подкольцо I p-адических целых; пусть Z — прямая сумма g копий I (g — ранг K). Тогда $D = D_0 \otimes E$, где D_0 — группа элементов порядка, простого с p, а E — конечное p-расширение. При редукции $D_0 \otimes E$ покомпонентно переходит в $D_0' \otimes D_p' = D'$, где D_0' — простая с p, а D_p' — p-часть группы дивизоров D' поля K'/k'. Если Z — ядро отображения $\varphi : D \to D'$, то покомпонентное отображение — эпиизоморфизм. Указывается один случай эллиптических кривых, для которых $\ker \varphi = Z$. В то же время приводится пример поля, не допускающего невырожденной редукции. В. В. Морозов

10397. «Вещественные формы» группы типа E_6. Титс (Les «formes réelles» des groupes de hype E_6. Tits Jacques), Sémin. Bourbaki. Secret. math., 1957—1958, 10. Paris, 1958, 162-1—162-15 (франц.)

Над полем k строится „плоскость" Π — множество E точек и множество B частей E, называемых прямыми, каждая из которых снабжена структурой квадрики 8-мерного пространства, содержащей два семейства плоских 4-мерных пространств. Структура плоскости приводит к наличию своеобразных соотношений инциденции между ее элементами (ср. РЖМат, 1958, 1546). Определяются коллинеации, проективитеты и поляритеты этой плоскости, изучаются некоторые типы их. Отмечаются связи полученных групп с уже известными типами, так, группа проективитетов Π изоморфна группе E_6 „типа Тохоку" (РЖМат, 1958, 6508).

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

10398. К аналитичности кривых с двумя осевыми точками. Вирзинг (Zur Analytizität von Doppelspeichenkurven. Wirsing Eduard), Arch. Math., 1958, 9, № 4, 300—307 (нем.)

Точка S называется по отношению к замкнутой кривой ее „точкой спиц" (Speichenpunkt), осевой точкой иначе — эквихордальной, если любая прямая, проходящая через S, пересекает эту кривую в двух точках, причем получаемые таким путем хорды (спицы) имеют одну и ту же длину. Вопрос о существовании D кривой — замкнутой кривой с двумя осевыми точками S_1 и S_2 — был поставлен Бляшке (Blaschke, Rothe und Weitzenböck, Arch. Math., 1917, 27), для выпуклых кривых и остается открытым и в общем случае; невыяснено также, должны ли D-кривые необходимо быть выпуклыми. Автор указывает, что исследование Линиса о существовании D-кривых (РЖМат, 1958, 5179) является ошибочным. Было доказано (Süss W., Tôhoku Math. J., 1925, II ser. 25; Dirac G. A., J. London Math. Soc., 1952, 31), что выпуклая D-кривая необходимо должна иметь две оси симметрии — прямую, проходящую через S_1 и S_2 и перпендикуляр через середину отрезка S_1S_2, и далее, что через данную точку может проходить не более одной выпуклой D-кривой с заданными осевыми точками и длиной спиц и что в каждой точке D-кривая имеет касательную. Здесь эти результаты устанавливаются без предположения выпуклости. В работе доказывается, что любая D-кривая должна быть на всем своем протяжении аналитической. Доказательство проводится с помощью последовательных отображений, при которых каждая точка плоскости перемещается в направлении осевой точки на расстояние, равное длине спиц. Автору удается показать существование регулярной кривой со свойством локальной эквихордальности. Далее устанавливается необходимое условие существования D-кривой в виде $h(C) = 1$, где $h(C)$ — аналитическая функция, регулярная в области $0 < C < \sqrt{3}/2$ (длина спиц предполагается равной 2), а C — эксцентриситет кривой — половина расстояния между осевыми точками.

А. Г. Школьник

10399. Средне-геометрические кривые. Никулин Н. А., Чуб А. Т., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957, (1958), 29, 9—49

На прямой a, проходящей через точку O (полюс) и пересекающей две линии U' и U'' (образующие) в точках M' и M'', выбирается точка M из условия $|\overline{OM}| = \pm\sqrt{\overline{OM'} \cdot \overline{OM''}}$. Геометрическое место точек M, когда a пробегает пучок с центром в точке O, называется средне-геометрической кривой (с.-г.к.) линий U' и U''.

Из определения вытекает способ построения с.-г. к. по точкам и ряд свойств, например: с.-г.к. имеет центр в точке O; если образующие U' и U'' — алгебраические линии порядков m и k, то с.-г. к. также алгебраическая и ее порядок равен $2mk$; если одна из образующих проходит через полюс, то с.-г. к. распа-

дается и др. Для случая, когда образующие — алгебраические кривые, установлены предложения о наличии и характере особых точек с.-г. к. в зависимости от взаимного расположения образующих и полюса, например: если образующие пересекаются (касаются) в двух точках, лежащих на прямой, проходящей через полюс, то на с.-г. к. им соответствует двойная узловая (самоприкосновения) точка; наличие особых точек, хотя бы на одной из образующих, влечет наличие их и на с.-г. к. и др. Рассмотрение частных случаев, когда в качестве образующих принимаются алгебраические кривые 1-го и 2-го порядков, дает ряд предложений, среди которых:

Всякая центральная алгебраическая кривая 3-го порядка есть с.-г. к. прямой и конического сечения.

Всякая центральная алгебраическая кривая 4-го порядка, имеющая в центре кратную точку с действительными касательными, есть с.-г. к. двух конических сечений, проходящих через полюс.

С.-г. к. двух конических сечений, из которых одно проходит через полюс, есть кривая шестого порядка.

С.-г. к. двух конических сечений, не проходящих через полюс, есть кривая восьмого порядка.

В заключение приведена классификация с.-г. к. двух конических сечений по признаку выбора образующих, причем выделено шесть различных типов.

И. В. Цыганков

10400. О некоторых уравнениях в частных производных второго порядка. Винченсини (Sur certaines équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. Vincensini Paul), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1958, **75**, № 2, 153—166 (франц.)

Рассматривается частный случай преобразования линейчатого пространства (Vincensini P., Bull. Soc. math. France, 1946, 2 ser., **70**, 1—5)—преобразование $T(O, \alpha)$, а именно: взяв в трехмерном евклидовом пространстве точку O и прямую D и проведя через O прямую Δ, параллельную D, переводим D в прямую D' поворотом вокруг Δ на угол α. Преобразование $T(O, \alpha)$ с фиксированной точкой O и переменным углом α преобразует конгруэнцию (D) в конгруэнцию (D').

Конгруэнция (D) определяется посредством вектора $\overline{OI}(u, v)$, перпендикулярного лучу D, и направляющего единичного вектора $\mathbf{N}(u, v)$ луча D или, что то же самое, точкой $N(u, v)$ на единичной сфере Σ с центром в точке O.

Преобразование $T(O, \alpha)$ конгруэнций обладает рядом инвариантов, к которым, например, относятся произведение абсцисс фокусов луча $P = \overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ и квадрат расстояния луча от точки $\overline{OI}^2$. Преобразование $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ переводит нормальную конгруэнцию (D) в конгруэнцию (D'), у которой огибающая средних плоскостей вырождается в точку O; фокусы F_1', F_2' на луче D' симметричны относительно I' и, следовательно, равноотстоящи от O. Такие конгруэнции преобразованием $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ возвращаются в нормальные. Нормальная конгруэнция с равноотстоящими от O фокусами преобразуется $T(O, \alpha)$ в такую же конгруэнцию.

Для определения нормальной конгруэнции (D) можно ввести функцию $\Phi = \overline{IM}$, где $M(u, v)$ — точка на одной из нормальных поверхностей. Можно составить для функции $\Phi(u, v)$ дифференциальные параметры Бельтрами относительно ds^2 единичной сферы Σ.

Опираясь на свои прежние результаты, автор дает геометрическое толкование дифференциальным параметрам Бельтрами первого и второго порядка Δ, Δ_2, Δ_{22}: $\overline{IF_1} + \overline{IF_2} = -\Delta_2\Phi$, $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2} = \Delta_{22}\Phi$, $\overline{OI}^2 = \Delta\Phi$.

Эти соотношения позволяют получить уравнения в частных производных значительного числа нормальных конгруэнций с теми или иными фокальными свойствами. Рассмотрим, например, нормальные конгруэнции, у которых фокусы каждого луча сопряжены относительно единичной сферы Σ с центром O. Если M_1 и M_2 — точки пересечения луча D с Σ, то сопряженность F_1, F_2 относительно Σ выражается соотношением

$$\overline{IF_1} \times \overline{IF_2} = 1 - \overline{OI}^2$$

или

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = 1. \qquad (1)$$

Если у сферы радиус i и центр O, то условия сопряженности примут вид:

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = -1, \qquad (2)$$

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = 0. \qquad (3)$$

Преобразование $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ переводит нормальные конгруэнции (D) с сопряженными фокусами в конгруэнции (D') с фокусами лучей, равноотстоящими от точки O. Уравнения (1), (2), (3) при свойстве $\overline{I'F_1'} + \overline{I'F_2'} = 0$ становятся:

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F_1'}^2 = 1, \qquad (1')$$

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F_1'}^2 = -1, \qquad (2')$$

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F_1'}^2 = 0. \qquad (3')$$

Отыскание нормальных конгруэнций из более общих, чем (1), (2), (3) уравнений

$$F(\Delta_{22}\Phi, \Delta\Phi) = 0$$

или, что то же,

$$F(\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}, \overline{OI}^2) = 0,$$

где F — произвольная функция, заменяется отысканием конгруэнций с фокусами, равноотстоящими от O, из преобразованных $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ уравнений. Действительно, если известна конгруэнция (D') с эквидистантными относительно O фокусами лучей, удовлетворяющая уравнению

$$F(-\overline{I'F_1'}^2, \overline{OI'}^2) = 0,$$

то в результате поворота на $-\frac{\pi}{2}$ $\overline{OI} = \overline{OI'} \wedge \mathbf{N}$; так как $d\mathbf{M} = d(\overline{OI} + \Phi\mathbf{N}) \perp \mathbf{N}$, то $\Phi = -\int \mathbf{N} d(\overline{OI'} \wedge \mathbf{N})$.

Автор останавливается на случае полной интегрируемости. Уравнению $\Delta\Phi - \Delta_{22}\Phi = 0$ в преобразовании $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ соответствует уравнение

$$\overline{OI'}^2 + \overline{I'F_1'}^2 = 1,$$

из которого следует, что фокальные поверхности конгруэнции (D') вырождаются в две кривые на сфере Σ. Задавшись двумя произвольными кривыми на сфере Σ, можно построить конгруэнцию (D') и затем по предыдущему конгруэнцию (D).

Статья заканчивается несколькими дополнительными замечаниями.

К. Н. Тихоцкий

10401. О сечениях поверхности, сверхсоприкасающихся (surosculées) со своими кругами кривизны. Шемин (Sur les sections d'une surface surosculées par leurs cercles de courbure. Semin F. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1954, A19, 34—44) (франц.)

Новым, более простым, по мнению автора, способом получены известные результаты Дарбу (Darboux G., Bull. sci. math., 1880, **4**, 348—384) и Корио (Corio A., Atti Accad. sci. Torino, 1951, **85**, 301—311). Более подробно рассмотрены случаи, когда конус пятого класса, огибаемый плоскостями, проходящими через данную точку поверхности и рассекающими ее по кривым, имеющим в этой точке соприкосновение выше второго порядка со своими кругами кривизны, распадается. В. И. Шуликовский

10402. Распространение теоремы Фенхеля и Авакумовича на замкнутые линейчатые поверхности. Сабан (Estensione alle superficie rigate chiuse di un teorema di Fenchel ed Avakumovic. Saban Giacomo), Istanbul üniv. fen. fac. mecm., 1956, **A21**, № 3-4, 245—251 (итал.; рез. турецк.)

Необходимым и достаточным условием того, что данная замкнутая линейчатая поверхность есть нормалия другой замкнутой линейчатой поверхности, состоит в том, что сферическая индикатриса данной линейчатой поверхности делит пополам единичную сферу и ортогональные траектории образующих замкнуты.

Р. Н. Щербаков

10403. О флекнодальных линиях линейчатой поверхности. Семенов Е. Т., Сб. студ. работ Бурят-Монг. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 2, 9—13

Пусть линейчатая поверхность задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{z}(s) + v\mathbf{e}_3(s),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки линейчатой поверхности, $\mathbf{z}$ — радиус-вектор ее горловой точки, а $\mathbf{e}_3$ — от образующей. Автор использует репер Плужникова, помещая начало подвижного репера в горловую точку, от $\mathbf{e}_1$ — по горловой нормали, а $\mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]$ — по горловой касательной. Пусть $ds = |d\mathbf{e}_3|$. Тогда деривационные формулы этого подвижного репера имеют вид:

$$d\mathbf{z} = (p\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3)\,ds;\quad d\mathbf{e}_1 = (b\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)\,ds;\quad d\mathbf{e}_2 = -b\mathbf{e}_1 ds;$$
$$d\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 ds,$$

где p — параметр распределения, $a = p\operatorname{ctg}(d\hat{\mathbf{z}}\mathbf{e}_3)$, b — „косина“ распределения.

Вообще говоря, линейчатая поверхность имеет две флекнодальные линии — геометрическое место точек, в которых пересекают образующую прямые, проходящие через эту образующую, и три ее бесконечно близкие. В статье находятся уравнения этих флекнодальных линий, а также аффинно-горловой линии — геометрического места середин отрезков образующих между флекнодальными линиями.

Находятся уравнения аффинно-горловой линии на поверхностях $b = \text{const}$ и $a = 0$. На поверхности $p = \text{const}$ горловая линия совпадает с аффинно-горловой линией тогда и только тогда, когда она является линией кривизны. Р. М. Гейдельман

10404. О проективно-минимальных поверхностях, которые одновременно являются евклидово-минимальными. Маркус (Asupra suprafeţelor minime proiective ce sînt în acelaşi timp şi minime euclidiene. Marcus F.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil. Iaşi. Mat., 1957, 8, № 1, 19—36 (рум.; рез. русск., франц.)

Определение таких поверхностей сводится к системе двух дифференциальных уравнений в частных произведениях (одно — второго, другое — четвертого порядка) с одной неизвестной функцией. Если добавить еще одно условие, а именно потребовать, чтобы сферические изображения обеих асимптотических линий в каждой точке имели одинаковые (по модулю) кривизны и кручения, то единственным решением задачи будут поверхности, которые будут одновременно еще и аффинно-минимальными. Эти поверхности описаны в другой работе автора (РЖМат, 1958, 7127). Указывается связь этих поверхностей с конгруэнциями I, выделенными автором (Marcus F., Studii şi cercetări mat. Acad. RPR. Fil. Iaşi, 1952, **3**), это суть конгруэнции нормалей минимальной поверхности с минимальными эволютами): средняя поверхность конгруэнции I соответствует ортогональностью линейных элементов (в смысле Рибокура) поверхности изучаемого типа.

Примечание референта. Во французском и русском резюме автора последний результат изложен неверно. В русском резюме из-за неточности перевода неверно изложено и свойство сферических изображений асимптотических линий. Р. Н. Щербаков

10405. К метрической теории линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции. Лупейкис З. И., Сб. студ. работ Бурят-Монг. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 3, 99—104

В терминах Ф-репера, построенного референтом (РЖМат, 1956, 4822), определяются уравнение соприкасающейся квадрики, координаты ее центра, уравнения спутника и его ребра возврата для любой линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции. Это дает возможность характеризовать ряд классов линейчатых поверхностей, принадлежащих данной конгруэнции. Например: 1) у линейчатой поверхности $\beta' + 2\alpha\eta_1 = 2\alpha\beta$ (β — параметр распределения, η — „косина“ распределения, α — абсцисса горловой точки) одна из главных осей соприкасающейся квадрики параллельна горловой нормали; 2) у поверхности $\beta : \eta = \text{const}$ ребро возврата спутника лежит на линейчатой поверхности, лучи которой параллельны лучам данной и неизменно связаны с Ф-репером. Р. Н. Щербаков

10406. Аффинно-дифференциальные свойства сетей. Дрэджилэ (Propriétés différentielles affines des réseaux. Drăgilă Pavel), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 6, 1127—1133 (франц.)

Как и в других заметках на сходные темы, автор настаивает на некорректности определений сопряженной сети (в связи с теоремой Петерсона о преобразовании параллелизма) у Петерсона и Гишара и приписывает определение сопряженности с помощью уравнения $(x_{uv}, x_u, x_v) = 0$ Миллеру. Далее следует несколько соображений, относящихся к преобразованиям сетей общего или специального типа. В. В. Рыжков

10407. Сопряженные сети и присоединенные параболические конгруэнции. Михэйлеску (Reţele conjugate cu congruenţe asociate de tip parabolic. Mihăilescu Tiberiu), Studii şi cercetări mat. şi fiz. Acad. RPR Fil. Cluj, 1956, **7**, № 1-4, 15—49 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются сопряженные сети, у которых или одна, или обе ассоциированные конгруэнции — аксиальная (образованная линиями пересечения соприкасающихся плоскостей линий сети) и радиальная (образованная прямыми, соединяющими соответствующие точки двух преобразований Лапласа сети) — будут параболическими. Кроме некоторых элементарных случаев (сети с плоскими или коническими линиями, следовательно, принадлежащими поверхностям Петерсона), автор находит на произвольной поверхности трехмерного проективного пространства бесконечное множество сопряженных сетей, линии которых не будут ни плоскими, ни коническими и у которых одна из присоединенных конгруэн-

ций — параболическая. Произвол таких сетей зависит от двух функций одного аргумента и асимптотические единственной фокальной поверхности ассоциированной параболической конгруэнции не могут соответствовать линиям сети.

Соответствие, установленное сетями этого класса между точками произвольной поверхности и точками единственной фокальной поверхности параболической конгруэнции, присоединенной к такой сети, позволяет осуществить преобразование, переводящее сопряженную сеть в новую сопряженную сеть. Произвол сетей, принадлежащих этому классу, зависит от семи функций одного аргумента. Сопряженные сети, у которых обе присоединенные конгруэнции — параболические, существуют с произволом шести функций одного аргумента и их преобразования Лапласа соответствуют асимптотическим.

Единственная фокальная поверхность радиальной конгруэнции является одной из двух фокальных поверхностей конгруэнции, описанной прямыми, соединяющими фокусы радиуса и оси. Определяются сети этого класса, у которых вторая фокальная поверхность упомянутой конгруэнции совпадает с единственной фокальной поверхностью конгруэнции осей. Эти сети принадлежат хорошо известному классу сетей R.

Резюме автора

10408. Определение синектических конгруэнций и линейчатых поверхностей. Сабан (Détermination des congruences synectiques et des surfaces réglées. Saban Giacomo), Istanbul üniv. fen. fac. mecm., 1956, **A21**, № 3-4, 195—199 (франц.; рез. турецк.)

Пусть прямая l определена радиусами-векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ двух своих точек. Положим

$$\mathrm{d} = \rho(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), \quad \mathrm{d}_0 = \rho \boldsymbol{xy}.$$

Множитель ρ определим условием $\mathrm{d}^2 = 1$. Штуди ввел отображение прямых трехмерного пространства на дуальные точки единичной сферы, поставив в соответствие прямой l единичный дуальный вектор $D_1 = d + d_0\varepsilon$, где ε — дуальная единица, подчиненная оперативному закону умножения $\varepsilon^2 = 0$. Пусть $D_1 = d + \varepsilon d_0$ — единичный дуальный вектор, являющийся дифференцируемой функцией одной дуальной переменной $T = t + \varepsilon t_0$. Тогда $\boldsymbol{D}_1(T) = \boldsymbol{D}_1(t) + \varepsilon t_0 \dfrac{d\boldsymbol{D}_1(t)}{dt}$.

Эта функция $\boldsymbol{D}_1(T)$ представляет специальную цилиндрическую конгруэнцию, называемую синектической конгруэнцией. Пусть $dS = \sqrt{\left(\dfrac{d\boldsymbol{D}_1}{dT}\right)^2}\,dT$, тогда, введя специальный репер, автор получает деривационные уравнения:

$$\frac{d\boldsymbol{D}_1}{ds} = \boldsymbol{D}_2; \quad \frac{d\boldsymbol{D}_2}{ds} = -\boldsymbol{D}_1 + \sigma \boldsymbol{D}_3; \quad \frac{d\boldsymbol{D}_3}{ds} = -\sigma \boldsymbol{D}_2;$$

$$\sigma = \left(\boldsymbol{D}_1, \frac{d\boldsymbol{D}_1}{ds}, \frac{d^2\boldsymbol{D}_1}{ds^2}\right)$$

называется дуальной сферической кривизной конгруэнции. Имеет место теорема: Всякая синектическая конгруэнция определяется заданием внутреннего дуального уравнения $\sigma = \Phi(s)$. Аналогично исследуется вопрос об определении регулярной линейчатой поверхности внутренними дуальными функциями.

Р. М. Гейдельман

10409. Деформация полигона в своей плоскости. Гурматай (Sur la déformation d'un polygone dans son plan. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 134—138 (франц.)

Пусть полигон с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ деформируется в своей плоскости. Тогда его вершины A_i описывают кривые (A_i), а отрезки $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ огибают кривые $(B_1), \ldots, (B_{n-1}), (B_n)$. Точки B_i — точки прикосновения отрезков A_iA_{i+1} к огибающим (B_i). Пусть касательные к кривым (A_i) и (A_{i+1}) в точках A_i и A_{i+1} пересекаются в точках C_i. Эти точки при деформации полигона опишут кривые (C_i). Пусть нормали к кривым (A_i) и (A_{i+1}) в точках A_i и A_{i+1} пересекаются в точках D_i, а нормали к кривым (A_i) и (B_i) — в точках E_i.

Тогда имеет место соотношение:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_1}\frac{A_2B_2}{A_3B_2}\cdots\frac{A_nB_n}{A_1B_n} = \frac{C_nA_1}{C_1A_1}\frac{C_1A_2}{C_2A_2}\cdots\frac{C_{n-1}A_n}{C_nA_n}.$$

При деформации полигона $(A_1\,A_2\ldots A_n)$ ангармонические отношения вершин ассоциированных полигонов $(C_1C_2\ldots C_nA_1\ldots A_n)$ и $(A_1A_2\ldots A_nB_1\ldots B_n)$ остаются равными.

Если полигон $(A_1A_2\ldots A_n)$ деформируется, оставаясь вписанным в коническое сечение, произведение отношений, в которых сегменты $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ разделены точками C_i, равно $(-1)^n$, т. е. $\prod\limits_i \dfrac{C_{i-1}A_i}{C_iA_i} = (-1)^n$.

Если полигон $(A_1, \ldots, A_n)$ при деформации остается описанным около конического сечения, то имеет место аналогичное соотношение (с переменой ролей полигонов $(A_1\ldots A_n)$ и $(C_1\ldots C_n)$). Отмечены геометрические проблемы, связанные с рассмотренными вопросами.

Р. М. Гейдельман

10410. О демуленовых преобразованиях проективно-минимальных поверхностей. (I), (III). Су Бу-цин (Su Buchin), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 1, 28—50; 123—127 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\{U_m, V_n\}$ и $\{\hat{U}_m, \hat{V}_n\}$ — последовательности Годо для проективной минимальной поверхности S и для одного из ее демуленовых образов $\hat{S}$ в трехмерном пространстве. Рассмотрим трехрядную таблицу

$$U_4\,U_3\,U_2\,U_1\,U\,V\,V_1V_2$$

$$\hat{U}_4\,\hat{U}_3\,\hat{U}_2\,\hat{U}_1\,\hat{U}\,\hat{V}\,\hat{V}_1\,\hat{V}_2\,\hat{V}_3\,\hat{V}_4$$

$$U_2\,U_1\,U\,V\,V_1\,V_2\,V_3\,V_4$$

В части I доказывается, что отрезок связывающий две последовательные точки второго ряда, должен пересечь отрезок, связывающий две последовательные точки (если такие существуют) в тех же столбцах первого или третьего ряда. В части III доказывается то же самое, если ряды распространяются до бесконечности. Часть II см. реф. 10411.

G. Wu

10411. О демуленовых преобразованиях проективно-минимальных поверхностей. (II). Су Бу-цин (Su Buchin), Фудань сюэбао, 1956, **1**, № 1, 111—119 (кит.; рез. англ.)

Настоящая работа является продолжением предыдущей, (см. реф. 10410), в которой мы показали среди других результатов, что если последовательности Годо проективно-минимальной поверхности S и их демуленовых преобразований $\hat{S}$ расположить в таблице

$$\mathfrak{A}_{(3)}\,\mathfrak{A}_{(2)}\,\mathfrak{A}_{(1)}\,\mathfrak{A}$$

$$\hat{\mathfrak{A}}_{(1)}\,\hat{\mathfrak{A}}\,\hat{\mathfrak{R}}\,\hat{\mathfrak{R}}_{(1)},$$

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{R}_{(1)}\,\mathfrak{R}_{(2)}\,\mathfrak{R}_{(3)}$$

то прямая, соединяющая две последовательные точки второго ряда, должна пересекать прямую, соединяющую две последовательные точки, стоящие в тех же самых столбцах первого или третьего ряда, и точки пересечения отличны от указанных точек.

Здесь рассматривается обратное предложение и доказывается теорема:

Пусть S — не линейчатая, не вырожденная поверхность с четырьмя различными преобразованиями Демулера. Если существует другая поверхность $\hat{S}$ такая, что S и $\hat{S}$ будут находиться в асимптотическом соответствии и последовательности Годо для S и $\hat{S}$ обладают указанным свойством, то поверхность S необходимо будет проективно-минимальной поверхностью и $\hat{S}$ будет одной из ее демуленовых преобразований.

Из резюме автора

10412. О замкнутых цепях Лапласа. Барнер (Über geschlossene Laplace-Ketten. Barner Martin), Arch. Math., 1958, **9**, № 5, 366—377 (нем.)

Пусть в проективном пространстве k измерений R_k дана замкнутая последовательность Лапласа периода $n+1$:

$$\mathfrak{x}_0,\ \mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n; \tag{1}$$

ее можно задать еще так:

$$\rho_0\mathfrak{x}_0,\ \rho_1\mathfrak{x}_1,\ldots,\rho_n\mathfrak{x}_n. \tag{2}$$

Автор применяет полуинвариантное внешнее дифференцирование (Bol G., Math. Z., 1951, **54**, 141 — 159), устраняющее из выкладок производные от нормирующих множителей.

При переходе от (1) к (2) дифференциальные формы $\pi_0,\ \pi_1,\ldots,\pi_n$, зависящие только от дифференциалов вторичных параметров, заменяются формами π_i^*:

$$\pi_i^* = \pi_i - d(\log\rho_i). \tag{3}$$

Если g — форма или величина, преобразуется так:

$$g^* = \rho_0^{c_0}\rho_1^{c_1}\ldots\rho_n^{c_n}g,$$

то ее полуинвариантная внешняя производная имеет вид:

$$\check{d}g = dg + c_0\pi_0\wedge g + c_1\pi_1\wedge g + \ldots + c_n\pi_n\wedge g,$$

где dg — обыкновенная внешняя производная.

С полуинвариантной внешней производной оперируют как обычно:

$$\check{d}(\check{d}g) = c_0 d\pi_0\wedge g + c_1 d\pi_1\wedge g + \ldots + c_n d\pi_n\wedge g.$$

$d\mathfrak{x}_1$ лежит в касательной плоскости к поверхности $\mathfrak{x}_1$. Фиксируя π_1, согласно (3), получаем:

$$d\mathfrak{x}_1 = \alpha_1\mathfrak{x}_0 + \beta_1\mathfrak{x}_2; \tag{4}$$

очевидно, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ дают сопряженную сеть на $\mathfrak{x}_1$.

Условия интегрируемости (4) имеют вид:

$$\check{d}\alpha_1 = 0,\quad \check{d}\beta_1 = 0,\quad \check{d}\pi_1 = -(\alpha_0\wedge\beta_1 + \beta_1\wedge\alpha_2). \tag{5}$$

Уравнения (4), (5) нужно считать написанными для всех значений индекса i: 0, 1,..., n, причем значению 0 соответствует $i-1$, а значению $2-i+1$.

Дифференциальные уравнения (4), (5) определяют замкнутую последовательность Лапласа в R_k, если начальные точки $\overset{\circ}{\mathfrak{x}}_0, \overset{\circ}{\mathfrak{x}}_1,\ldots,\overset{\circ}{\mathfrak{x}}_n$ размещены в R_k; если же точки $\overset{\circ}{\mathfrak{x}}_0, \overset{\circ}{\mathfrak{x}}_1,\ldots,\overset{\circ}{\mathfrak{x}}_n$ линейно независимы и находятся в R_n, то те же дифференциальные уравнения (4), (5) определяют последовательность Лапласа в R_n. Значит каждой замкнутой последовательности Лапласа периода $n+1$ в R_k соответствует определенная до проективного преобразования замкнутая последовательность Лапласа того периода в R_n; первая получается из второй проектированием. Автор показывает, что всякая последовательность периода $n+1$ в R_{n-1} получается посредством сечения из последовательности того же периода в R_n.

Возьмем формы α_0, β_0 за базисные. Сопряженные сети на всех поверхностях (1) соответствуют. Поэтому

$$\alpha_1 = a_1\alpha_0,\quad \beta_1 = b_1\beta_0,\quad \check{d}\pi_1 = c_1\alpha_0\wedge\beta_0,\quad c_1 = a_2b_1 - a_1b_0.$$

Эти уравнения должны быть еще воспроизведены для $i = 2,\ldots,n$.

Положив

$$\check{d}a_l = a_{l1}\alpha_0 + a_{l2}\beta_0$$

и аналогично $\check{d}\beta_l$, приводим условия интегрируемости (5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_{l2} = 0,\quad b_{l1} = 0,\quad l = 1,\ldots,n\ (a_0 = b_0 = 1).$$

Это означает, что замкнутая последовательность Лапласа периода $n+1$ в R_k зависит от $2n$ произвольных функций одного аргумента.

Автор останавливается на свойствах симметрии, относящихся к инвариантам Дарбу сопряженных сетей вписанных и описанных последовательностей Лапласа нечетного периода. К. Н. Тихоцкий

10413. О псевдосферических поверхностях и их обобщении в проективной геометрии. Баккес (Sur les surfaces pseudosphériques et leur extension en géométrie projective. Backes F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 5, 457—465 (франц.)

Пользуясь триэдром Дарбу, автор доказывает, что общая фокальная полость двух нормальных конгруэнций W непременно является поверхностью постоянной полной кривизны. Каждая поверхность постоянной отрицательной кривизны (P) служит фокальной полостью ∞^2 нормальных конгруэнций W. вторые фокальные плоскости лучей которых проходят через нормаль n поверхности (P). Пусть Q_1, Q_2 — вторые фокусы лучей конгруэнций W. Развертывающиеся конгруэнции (Q_1Q_2) и (n) соответствуют. Конгруэнция (n) сопряжена поверхности (P) в том смысле, что ее развертывающиеся чертят на (P) сопряженную сеть.

Автор расширяет понятие поверхности (P) проективным образом, называя поверхностью (P) общую фокальную полость двух конгруэнций W, у которых пересечение вторых фокальных плоскостей порождает конгруэнцию, сопряженную с (P). С помощью тетраэдра Демулена (вершина O_3 на поверхности (P), вершины O_1, O_2 — вторые фокусы лучей конгруэнций W, ребро O_3O_4 — пересечение вторых фокальных плоскостей конгруэнций W, вершина O_4 гармонически сопряжена с O_3 по отношению фокусов луча конгруэнции (O_3O_4)) выводится: конгруэнции (O_1O_2), (O_3O_4) составляют расслояемую пару. Развертывающиеся этих конгруэнций соответствуют. Всякая поверхность (P) служит фокальной полостью ∞^2 конгруэнций W. Вторые фокальные плоскости лучей этих конгруэнций проходят через образующую конгруэнции (O_3O_4), сопряженной с (P). Вторые фокальные полости (Q) конгруэнций W — поверхности (P). К. Н. Тихоцкий

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

10414. Тангенциальное изгибание поверхностей. Рыжков В. В., Матем. сб. 1959, **47**, № 1, 55—110

С n-мерной поверхностью V_n пространства E_N связаны многообразия: точечное $\{M\}$, тангенциальное $\{E_n\}$ и точечно-тангенциальное $\{M, E_n\}$. Вводится классификация наложений: 1. Точечное наложение порядка k, при котором $\{E_n\}$ и $\{M, E_n\}$ претерпевают наложение только порядка $k-1$. 2. Тангенциальное наложение порядка k, при котором поверхность, рассматрива-

емая как точечный образ, налагается только до порядка $k-1$. 3. Точечно-тангенциальное наложение порядка k, когда порядки наложения поверхности как точечного и тангенциального образов совпадают. Выводятся уравнения тангенциальной и точечно-тангенциальной наложимости как аффинной, так и метрической. Поверхности предполагаются тангенциально невырожденными. Если две поверхности допускают аффинное тангенциальное наложение, не являющееся точечно-тангенциальным, то на этих поверхностях соответствуют полные сопряженные системы (РЖМат, 1959, 7431). Две поверхности в E_3 допускают тангенциальное наложение первого порядка в любом соответствии между ними и точечно-тангенциальное наложение первого порядка в тех и только в тех соответствиях между ними, которые сохраняют асимптотические обоих семейств. Двумерная поверхность с единственной сопряженной сетью допускает тангенциальное наложение первого порядка только на поверхность с сопряженной сетью в тех и только тех соответствиях, которые сохраняют эту сеть. В этих случаях имеет место и точечно-тангенциальная наложимость.

Поверхность $\{\bar{y}\}$, несущая n-сопряженную систему и имеющая размерность соприкасающейся плоскости $\rho = 2n$, допускает точечно-тангенциальное наложение первого порядка на любую поверхность того же и только того же типа с обязательным соответствием сопряженных систем на налагающихся поверхностях. Две поверхности, допускающие в некотором соответствии между ними тангенциальное наложение порядка k, допускают в том же соответствии и точечное наложение порядка k.

Поверхность $\{\bar{y}\}$, несущая сопряженную систему, образованную p_0, p_1 ..., p_r-мерными подповерхностями, $\sum_{s=1}^{r} p_s = n$, $p_s > 1$ при условии, что размерность соприкасающейся плоскости $\rho = n + \sum_{s=1}^{r} \frac{p_s(p_s+1)}{2}$, не допускает тангенциальных наложений порядка $k > 1$, отличных от точечно-тангенциальных. Исследуется изгибание двумерных поверхностей в E_4. Поверхности переноса с плоскими линиями переноса и только они допускают в E_4 точечно-тангенциальное изгибание второго порядка с произволом двух функций одного аргумента и тангенциальное наложение второго порядка с произволом четырех функций одного аргумента. Исследуется метрическое тангенциальное наложение поверхностей. Всякое метрическое тангенциальное наложение порядка $k > 1$ является в то же время точечным наложением порядка $k+1$. Всякое точечно-тангенциальное метрическое наложение порядка $k = 1$ является в то же время точечным наложением второго порядка. Метрически тангенциально-наложимые поверхности без соответствия на них полных сопряженных систем находятся в конформном соответствии и допускают в геометрии группы движений — подобий точечно-тангенциальное наложение первого порядка. Это наложение автор называет конформно-тангенциальным. Всякое метрическое тангенциальное наложение поверхности трехмерного пространства совпадает с точностью до движения с одним из ее преобразований параллелизма. Произвольная двумерная риманова геометрия рода два допускает конформно-тангенциальные наложения с произволом одной гармонической функции изотермических параметров. Получены необходимые и достаточные условия, чтобы риманова геометрия рода два допускала конформные тангенциальные наложения.

Я. П. Бланк

10415. Вычислительные формулы для кривизн кривой m-мерного евклидова пространства. Крейцер Г. П., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, 7, 173—181

Пользуясь понятием внешнего умножения векторов m-мерного евклидова пространства, автор дает формулы для вычисления кривизн кривой этого пространства в самом общем случае, т. е. не исключая особых точек кривой. В частности, для 4-мерного евклидова пространства приводится таблица значений кривизн для всех 16 типов точек.

О. С. Редозубова

10416. Об одном многомерном обобщении циклид Дюпена. Ведерников В. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 6, 58—72

В качестве многомерного аналога циклид Дюпена в E_3 (огибающих двух различных семейств сфер) предлагается гиперповерхность, которая одновременно является огибающей m-параметрического ($m > 1$) и ($n - m - 1$) параметрического семейства гиперсфер ($n - m - 1 > 1$).

Доказаны теоремы: 1) для гиперповерхности n-мерного пространства Евклида ($n > 3$) существует ($n-1$)-параметрическое семейство касательных гиперсфер, угловая метрика которых конформна метрике гиперповерхности, тогда и только тогда, когда гиперповерхность является или гиперсферой или циклидой Дюпена, 2) многомерная циклида Дюпена является конформным образом одной из трех типов гиперповерхностей: тора, конуса или цилиндра. Даны конечные уравнения циклид для каждого из трех типов. Доказательства основаны на результатах автора (РЖМат, 1958, 9219).

В. И. Шуликовский

10417. Некоторые свойства однородных редуктивных пространств с нильпотентной группой. Аллами жон (Quelques propriétés des espaces homogènes réductifs à groupe nilpotent. Allamigeon André-Claude), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 6, 628—631 (франц.)

n-мерное пространство линейной связности называется просто гармоническим, если во всякой системе нормальных координат $\tau = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ локально инвариантно при параллельном переносе.

Теорема 1. Для того чтобы однородное симметрическое пространство G/H было просто гармоническим относительно своей канонической связности, необходимо и достаточно, чтобы G была нильпотентной. Для того чтобы группа G была просто гармонической относительно какой-либо из трех канонических связностей, необходимо и достаточно, чтобы она была нильпотентной. Пусть $V_m = G/H$ — однородное редуктивное пространство (о. р. п.), т. е. алгебра g группы G представляется в виде $g = h + m$, где h — алгебра группы h, а m инвариантна относительно $ad(H)$, через p_m обозначим проекцию g на m. Пусть далее G' — замкнутая инвариантная подгруппа G с алгеброй g', элементы которой неподвижны при p_m. Пространство $\widetilde{V} = \widetilde{G}/\widetilde{H}$ ($\widetilde{G} = G/G'$, $\widetilde{H} = HG'/G'$) называется о. р. п. отношения G/H к G'. В теореме 2 устанавливается связь пространств отношений с римановыми расширениями аффинно-связных пространств.

Теорема 3. Если $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ является о. р. п. отношения однородного риманова естественно редуктивного пространства G/H (G эффективна) и m' вполне изотропна, то для нильпотентности G необходима и достаточна нильпотентность $\widetilde{G}$.

А. С. Феденко

10418. Геометризация неголономных механических систем. Хаймович (Geometrizarea sistemelor mecanice neolonome. Haimovici M.), Studii şi cercetări ştiinţ., 1954, 5, № 3-4, 49—84 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается неголономная механическая система со склерономными связями. Ее положение определяется n лагранжевыми координатами $x^1, \ldots, x^n$, подчиненными $n-m$ кинематическим связям

$$a_{\sigma i}\dot{x}^i = 0 \quad \begin{pmatrix} i, j, \ldots = 1, \ldots, n \\ \sigma = m+1, \ldots, n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Уравнения движения такой системы имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i + \lambda_\sigma a_{\sigma i}, \qquad (2)$$

где Q_i — компоненты обобщенной силы, λ — лагранжевый множитель, а T — кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j. \qquad (3)$$

Изучаются свойства системы дифференциальных уравнений (1), (2), (3), инвариантные относительно группы точечных преобразований

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \ldots, x^n), \quad \bar{t} = t + h,$$

где $\bar{x}^i(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции с отличным от нуля якобианом.

Уравнения (1) определяют в пространстве переменных x^i неголономное многообразие $V_n{}^m$.

Кинетическая энергия T является инвариантом лишь для скоростей, подчиненных связям (1). Следовательно, при помощи нее можно определить риманову метрику ds^2 в наиболее общем виде:

$$ds^2 = g^*_{ij}\,dx^i\,dx^j + (a_{\sigma i}dx^i)\,(\varphi_{\sigma j}\,dx^j),$$

где φ_σ — непрерывные функции от x, дважды непрерывно дифференцируемые. Эта метрика определена для всех перемещений, принадлежащих неголономному многообразию.

Автор представляет метрическую форму в виде

$$ds^2 = \sum \omega^2$$

и изучает группу G допустимых преобразований этих форм

$$\bar{\omega}_\sigma = A_{\sigma\tau}\omega_\tau,$$

$$\bar{\omega}_\alpha = C_{\alpha\beta}\,(\omega_\beta + B_{\beta\sigma}\omega_\sigma),$$

где коэффициенты $C_{\alpha\beta}$ удовлетворяют лишь условиям ортогональности.

Автор определяет на неголономном многообразии евклидову связность, подчиненную некоторым условиям, и находит механическую интерпретацию для этих условий.

Г. Ф. Лаптев

10419. Нормальность гиперповерхности и конфигурация «четырехугольник». Собчук (Нормальність гіперповерхні і конфігурація «чотирикутник». Собчук В. С.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-та, 1958, **34**, 91—97. (укр.)

С помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{du^i}{dt} = f_1{}^i(u^1, u^2, \ldots, u^n); \quad \frac{dv^i}{ds} = f_2{}^i(v^1, v^2, \ldots, v^n)$$

автор определяет в многообразии $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ два n-параметрических семейства линий $u^i = u^i(t;\ C_1{}^1, C_1{}^2, \ldots, C_1{}^n)$; $v^i = v^i(s;\ C_2{}^1, C_2{}^2, \ldots, C_2{}^n)$. Каждая кривая одного семейства определяет однопараметрическое подсемейство пересекающихся с ней кривых другого семейства. Два n-параметрических семейства образуют конфигурацию „четырехугольник“, если и только если из существования точки пересечения двух кривых рассматриваемых семейств следует пересечение любых соответствующих подсемейств. Доказывается, что гиперповерхность в E_n будет нормальной тогда и только тогда, когда любые два семейства ее линий кривизны образуют конфигурацию „четырехугольник“.

П. М. Олоничев

10420. О теории гиперповерхностей аксиального пространства n измерений. Папук (Sur la théorie des hypersurfaces dans un espace axial à n dimensions. Papuc D.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I, 1957, **3**, № 1-2, 133—164 (франц.; рез. русск., рум.)

Пространство Клейна I^n_{n-m} n измерений называется аксиальным, если его фундаментальная группа изоморфна подгруппе проективной группы, переводящей в себя плоскость I_{n-m} $n-m$ измерений, причем $0 < n - m < n - 1$. В этом пространстве рассматривается гиперповерхность X_{n-1} и ее аксиальная нормализация, при которой нормали 1-го рода пересекают абсолютную I_{n-m}, а нормали 2-го рода расположены в гиперплоскостях, содержащих I_{n-m}. Предполагая, что тензор a_{ij} основной квадратичной формы проективной геометрии X_{n-1} имеет ранг $n-1$ и что касательные ее асимптотических направлений, определенных уравнением

$$a_{ij}du^i du^j = 0,$$

не пересекают I_{n-m}, автор показывает, что дополнительное условие, согласно которому нормали 1-го и 2-го рода взаимны, т. е. сопряжены полярно относительно соприкасающейся гиперповерхности 2-го порядка, определяет однозначно аксиальную нормализацию.

Вводятся условия, при которых X_{n-1}, находящаяся в указанной нормализации, определяется заданием тензора a_{ij} и внутренней геометрией 1-го рода в смысле Нордена.

А. П. Норден

10421. О некоторых римановых многообразиях с положительной кривизной. Берже (Sur certaines variétés riemanniennes à courbure positive. Berger Marcel), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 16, 1165—1168 (франц.)

Рассматривается вопрос о топологической структуре компактного просто связного риманова многообразия M четной размерности с положительной кривизной. Доказывается, что если кривизна K многообразия M во всех двумерных площадках удовлетворяет условию $0 < \frac{1}{4}k < K \leqslant k$, где k — некоторая постоянная, то M гомологично сфере. Если же $0 \leqslant \frac{1}{4}k < K \leqslant k$, то M гомологично либо сфере, либо проективно-комплексному пространству $P_n(C)$, либо проективно-кватернионному пространству, либо проективной плоскости октав Кэли.

А. В. Погорелов

10422. О движениях в субпроективных пространствах. В. Ф. Кагана. Кручкович Г. И., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 1, 43—47

Исчерпывающая характеристика субпроективных римановых пространств с точки зрения групп движений дана И. П. Егоровым (РЖМат, 1958, 2377) в классе неэйнштейновых пространств. Автор реферируемой статьи приходит к тем же результатам без предположения неэйнштейновости рассматриваемых пространств.

Н. С. Синюков

10423. Об однородных римановых пространствах. Амброз, Сингер (On homogeneous Riemannian manifolds. Ambrose W., Singer I. M.), Duke Math. J., 1958, **25**, № 4, 647—669 (англ.)

Получена характеристика однородных римановых пространств (в предположении их полноты и односвязности) с точки зрения поведения кривизны при параллельном перенесении. Эта характеристика дается в терминах существования некоторой функции T (которая сопоставляет с каждой точкой x касательно о к V_n в точке m пространства кососимметрическое преобразование его T_x), удовлетворяющей условиям (A) и (B). Условие (A) описывает поведение ковариантной производной от кривизны при T_x, а условие (B) относится

к ковариантной производной от T_x. Эти условия необходимы и достаточны для однородности V_n. В одном частном случае, когда геодезические V_n являются траекториями одномерных подгрупп и его группы движений, кривизна при параллельном перенесении изменяется по экспоненциальному закону. В общем же случае получается более сложная закономерность. В случае, когда все T_x сводятся к тождеству, она приводит к равенству нулю ковариантной производной от тензора кривизны, т. е. к симметрическим пространствам Э. Картана. В статье используются обозначения и результаты предыдущей работы одного из авторов (РЖМат, 1955, 2876). Н. С. Синюков

10424. О паратактической конгруэнции трехмерного риманова пространства. Норден А. П., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 41—43

Пользуясь тем, что ковариантная производная вектора Киллинга v_λ определяет бивектор, в случае V_3, уравнение Киллинга можно записать в виде $v_{ij} = e^k_{ij} u_k$, где e_{ijk} — дискриминантный тривектор, а u_i — вектор, дополняющий $v_{i,j}$ до полного пространства. Если потребовать, чтобы пути движения были геодетиками, а условия интегрируемости уравнений Киллинга выполнялись тождественно, то придем к пространству постоянной кривизны. Отсюда для эллиптического пространства следует, что направленный орт прямых, параллельных в смысле Клиффорда, удовлетворяет уравнению $v_{i,j} = \pm \sqrt{k}\, e^r_{ji} v_r$, где k — постоянная кривизна пространства, а двойной знак соответствует наличию правого и левого параллелизмов. Доказывается также, что единичные векторы клиффордовых параллелей образуют поля абсолютно параллельных векторов по отношению к связности $\overset{\omega}{\Gamma}{}^k_{ij} = G^k_{ij} + \omega e^k_{jl}$, для которой связность V_3 с коэффициентами G^k_{ij} будет средней. Эти клиффордовы связности индуцируют на поверхности ту же риманову связность, которая индуцируется и геометрией внешнего пространства постоянной кривизны. Отсюда следуют условия: $\delta v^\alpha = 0$, $(b_{\beta\alpha} + \omega\varepsilon_{\beta\alpha}) \times du^\beta\, v^\alpha = 0$, полученные впервые Я. П. Бланком, характеризующие вектор v^α, принадлежащий поверхности и пернеосимый по ней параллельно в смысле Клиффорда. А. З. Петров

10425. О n-мерных поверхностях с асимптотическими полями p-направлений. Лумисте Ю. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 105—113

p — направление, касательное к n-мерной поверхности F_n N-мерного проективного пространства P_N, называется асимптотическим, если на нем тождественно обращаются в нуль все вторые квадратичные формы этой поверхности.

Доказывается, что если поверхность F_n имеет поле асимптотических p-направлений A_p, где $p > 1$, то при некоторых дополнительных предположениях, имеющих характер неравенств, это поле направлений определяет расслоение поверхности F_n на $(n-p)$-параметрическое семейство p-мерных плоских образующих P_p.

Далее рассматривается поверхность F_n с полной системой, состоящей из k полей асимптотических направлений $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$, где $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$. Оказывается, что такая поверхность лежит в своей $(k-1)$-й соприкасающейся плоскости. При некоторых дополнительных предположениях, также имеющих характер неравенств, в этом случае имеет место полное расслоение поверхности F на k семейств асимптотических подповерхностей. В силу первой теоремы при $\rho_x > 1$ поверхности соответствующего семейства будут плоскостями. Примером такой поверхности может служить псверхность

$$M = M_0 + \sum_{x=1}^{k} \sum_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_x)} M_{(i_{\lambda_1}, \ldots, i_{\lambda_x})} u^{i_{\lambda_1}} \ldots u^{i_{\lambda_x}},$$

где $(\lambda_1, \ldots, \lambda_x)$ — любое сочетание из чисел $1, \ldots, \kappa$ а M_0 и $M_{(i_{\lambda_1}, \ldots, i_{\lambda_x})}$ — произвольные постоянные точки, из которых M_0, $M_{i_{\lambda_1}}$, $M_{i_{\lambda_1} i_{\lambda_2}}$, $M_{i_{\lambda_1} i_{\lambda_2} i_{\lambda_3}}$ линейно независимы. М. А. Акивис

10426. О конгруэнциях плоскостей в проективном пространстве S_4. Италиани (Sulle congruenze di piani dello spazio proiettivo S_4. Italiani Mario), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 1, 105—111 (итал.; рез. англ.)

Конгруэнцией плоскостей в четырехмерном проективном пространстве называется двумерное многообразие плоскостей.

Сегре (C. Segre) ввел понятия фокусов первого и второго порядков плоскости конгруэнции. Фокусом первого порядка называется точка, в которой пересекается исходная плоскость с соседней плоскостью данной конгруэнции. Геометрическое место всех фокусов первого порядка в одной плоскости образует кривую второго порядка.

Автор проводит подробную классификацию таких конгруэнций, для которых эта кривая второго порядка вырождена, и рассматривает фокусы второго порядка (фокусы для конгруэнции фокальных кривых). К. И. Гринцевичюс

10427. Гиперповерхности вращения постоянной кронекеровой кривизны. Каменский Н. П., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957 (1958), **29**, 236—240

Записывается выражение для кронекеровой кривизны гиперповерхности (произведение главных кривизн). Полученное уравнение интегрируется в случае, когда гиперповерхность есть гиперповерхность вращения, а кривизна постоянна. Находится соответствующее семейство гиперповерхностей, уравнение их меридианов. Показывается, что это семейство не сводится только к иперсферам. Г. В. Бушманова

10428. О теории параллельных путей. Кацурада (On the theory of parallel paths. Katsurada Yoshie), Tensor, 1954, **4**, № 1, 1—8 (англ.)

В других работах автор рассматривал параллельное перенесение дуг в пространствах, основным элементом которых является линейный элемент высшего порядка. В данной статье устанавливаются необходимые и достаточные условия, чтобы траектории пространств L_n аффинной связности перешли при параллельном перенесении в такие же траектории. Если R^m_{jkl} является тензором кривизны пространства L_n, то эти условия определяются уравнением

$$R^m_{(\,|k|\,l)} = \frac{1}{n+1} \left(R^h_{h\,|k|\,j}\, \delta^m_l + R^h_{l\,|k|\,h}\, \delta^m_j\right).$$

Траектория, полученная параллельным перенесением вдоль самой себя, совпадает с исходной траекторией. В случае риманова V_n перенесение геодезических возможно только в локально плоских пространствах. Наконец, показывается, что траектории системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + (\Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \rho \frac{dx^i}{dt}$$

являются параллельными кривыми, если ковариантные производные симметрических тензоров $\tilde{T}_{jk}$ вместе

с тензором кривизны удовлетворяют определенному алгебраическому соотношению. O. Varga

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1004.

10429. Инварианты второго порядка кватернарной дифференциальной квадратичной формы. Петров П. И., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 6, 1214—1217

Находится базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка дифференциальной квадратичной формы от четырех переменных, т. е. основной метрической формы 4-мерного риманова пространства. Простейший базис такой системы образуется 14 функциями: B (полная кривизна), σ_i, $\varkappa_i$, Θ_k, ω_k, $\bar{\omega}_k$ ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$).

Из доказанной теоремы следует, что скаляры B, Θ_k образуют базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка 4-мерных конформно-плоских римановых пространств, а простейшая система базисных дифференциальных инвариантов второго порядка 4-мерного пространства Эйнштейна состоит из инвариантов σ_i, $\varkappa_i$.

Примечание референта. По сообщению автора выражения ω_3 и $\bar{\omega}_3$ в работе указаны неверно.

М. А. Джавадов

10430. Интегрирование путей — точное представление путей некоммутативными формальными степенными рядами. Чжэнь Го-цай (Integration of paths — a faithful representation of paths by noncommutative formal power series. Chen Kuo-Tsai), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **89**, № 2, 395—407 (англ.)

Рассматриваются кривые в m-мерном аффинном пространстве. Каждой кривой $x_i = x_i(t)$ ставится в соответствие формальный степенной ряд $\Theta(\alpha) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum \int_{\alpha} dx_{i_1} \dots dx_{i_p} \cdot X_{i_1} \dots X_{i_p}$, где X_{i_p} не коммутируют. Интегралы, входящие в этот ряд, определяются рекуррентной формулой $\int_a^b f_1(t)\,dt \dots f_p(t)\,dt = \int_a^b \left[\int_a^\tau f_1(t)\,dt \dots f_{p-1}(t)\,dt\right] f_p(\tau)\,d\tau$, если $dx_i(t) = f_i(t)\,dt$. Кривая называется неприводимой, если она не может быть представлена в виде $\alpha\gamma\gamma^{-1}\beta$, где α, β, γ — некоторые кривые. Показано, что 2 неприводимые кусочно-регулярные и непрерывные кривые α и β могут быть получены одна из другой переносом и изменением параметризации, если и только если $\Theta(\alpha) = \Theta(\beta)$. Подобный степенной ряд строится и для кривой в дифференцируемом многообразии. Доказывается, что при некоторых ограничительных условиях он вместе с начальной точкой единственным образом определяет кривую. Если заменить dx_i инвариантными формами группы Ли, то полученный степенной ряд определяет кривую в этой группе с точностью до левого сдвига.

Ю. И. Левин

10431. Неподвижные точки изометрий. Кобаяси (Fixed points of isometries. Kobayashi Shoshichi), Nagoya Math. J., 1958, **13**, 63—68 (англ.)

Пусть в n-мерном римановом многообразии M задано поле векторов Киллинга ξ (т. е. инфинитезимальная изометрия). Пусть ξ обращается в нуль в точках множества F и пусть $F = \bigcup V_i$, где V_i — связные компоненты множества F. Доказывается, что: 1) все V_i являются вполне геодезическими замкнутыми подмногообразиями (без особенностей) многообразия M с равными размерностями; 2) структурную группу пучка нормальных к V_i пространств можно редуцировать к полной линейной группе $GL(r, C)$, где $2r = \dim M - \dim V_i$; следовательно, если M ориентируемо, то и V_i ориентируемо; 3) если $x \in V_i$, $y \in V_j$, $i \neq j$, то в случае полного многообразия M существует однопараметрическое семейство геодезических, соединяющих x и y, т. е. x и y сопряжены; 4) если M является, кроме того, компактным, то его эйлерова характеристика равна сумме эйлеровых характеристик подмногообразий V_i.

В качестве следствий доказываются предложения:

A. Если каждый элемент коммутативной алгебры Ли полей векторов Киллинга в M обращается в нуль в точках множества $F = \bigcup V_i$, где V_i связны, то справедливы 1) — 4).

B. Если M является симметрическим в смысле Э. Картана, то и каждое V_i симметрическое.

C. Если кривизна полного риманова многообразия M в любом двумерном направлении неположительна, то F является или пустым или связным.

Получаются и результаты об эйлеровой характеристике $2m$-мерного компактного многообразия M, на котором действует группа T^m (m-мерный тор).

Ю. Г. Лумисте

10432. О приводимости бесконечных групп преобразований Картана. Гу Чаохао, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 60—66

Пусть в n-мерном пространстве действует группа G преобразований (вообще говоря, бесконечная), заданная определяющими уравнениями первого порядка. Линейная группа, преобразующая касательные векторы в какой-нибудь точке p, при преобразованиях группы G, фиксирующих точку p, названа Картаном присоединенной линейной группой. Группа G называется приводимой, если можно найти систему координат, в которой уравнения преобразований имеют вид

$$x^{i_1} = f^{i_1}(x^1, \dots, x^q) \qquad (i_1 = 1, \dots, q),$$

$$x^{i_2} = f^{i_2}(x^{q+1}, \dots, x^n) \qquad (i_2 = q+1, \dots, n),$$

где f^{i_1}, f^{i_2} не зависят друг от друга. Группа называется полуприводимой, если x^{i_1} преобразуются просто транзитивной конечной группой Ли с параметрами c^{l_1}, а x^{i_2} преобразуются по закону

$$x^{i_2} = \varphi^{i_2}(x^{k_2}, c^{l_1}),$$

где φ^{i_2} зависят, кроме c^{l_1}, еще от нескольких произвольных функций или постоянных. G называется полуприводимой в узком смысле, если

$$\varphi^{i_2} = e^{h(c^{l_1})} F^{i_2}(x^{k_2}),$$

а функции F^{i_2} являются правыми частями уравнений группы преобразований.

Доказаны теоремы: Если линейная присоединенная группа L не имеет инвариантных ковариантных или контравариантных векторов и разлагается в прямое произведение групп L' и L'', действующих в подпространствах E_q и E_{n-q}, не имеющих общих направлений, то группа G приводима.

Пусть L имеет E_q совокупностью неподвижных векторов, E_{n-q} неподвижным подпространством, в котором она действует как группа L''. Если L'' не имеет ни инвариантного ковариантного вектора, ни инвариантного кососимметрического тензора второго порядка, то G является полуприводимой. Если, кроме того, L'' не имеет одномерного линейного нормализатора, кроме возможно, группы подобий, то G полуприводима в узком смысле. Эти предложения обобщают ряд теорем, касающихся характера групп преобразований пространств частного типа, например римановых пространств (РЖМат, 1959, 7435). При доказательствах используется картанова теория структуры бесконечных групп.

А. М. Васильев

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

10433. О сферически - симметрических решениях единой теории поля Моффата. Керр (On spherically symmetric solutions in Moffat's uniwied field theory. Kerr R. P.), Nuovo cimento, 1958, 8, № 6, 789—797 (англ.; рез. итал.)

Исследуется сферически-симметрическое решение в единой теории поля Моффата, в основу которой положен комплексный симметрический тензор (РЖМат, 1958, 3227, 6164). В этой теории уравнения поля, получаемые из вариационного принципа, имеют вид $R_{\mu\nu} = -\lambda g_{\mu\nu}$, где $R_{\mu\nu} = -\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \log\sqrt{-g} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\log\sqrt{-g}_{\lambda}$, λ — космологическая константа, а $g = \mathrm{Det}\,(g_{\mu\nu})$. Комплексная связность $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ определяется через $g_{\mu\nu}$, так же как обычная риманова связность. Запятой обозначается частное дифференцирование, а черточкой — ковариантное. Показывается, что общее статическое симметрическое решение в полярных координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$ будет иметь вид:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 & -au'v \\ 0 & -u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^2\sin^2\theta & 0 \\ -au'v & 0 & 0 & B \end{vmatrix},$$

где $A = -\dfrac{a^2(1-v^2)u'^2}{c - 2b/u + (\lambda/3)a^2u^2}$, $B = c - \dfrac{2b}{u} + \dfrac{\lambda}{3}a^2u^2$, где a, b, c — постоянные, а u и v — произвольные комплексные функции r и t. На примере частных решений показывается, что это решение не определяется однозначно граничными условиями даже в том случае, если наложены координатные условия.

Вывод: к уравнениям поля необходимо присоединить еще 4 уравнения. Исследуется также вопрос о физической интерпретации комплексных преобразований в реальном поле для этого решения. А. З. Петров

10434. Основные принципы единой теории поля второго рода. Главатый (Basic principles of the unified field theory of the second kind. Hlavatý V.), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 3, 323—354 (англ.)

В единой теории Эйнштейна используется аффинная связность с кручением $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, в 4-мерном пространстве-времени X_4; эта связность удовлетворяет основным уравнениям:

$$\partial_{\omega} g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\omega\lambda} g_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\omega} g_{\lambda\alpha} = 0, \qquad (\alpha)$$

где $g_{\lambda\mu}$ — вещественный тензор. Решение системы (α) существует и единственно, если $\mathfrak{g}(\mathfrak{g} - 2\mathfrak{h}) \neq 0$ для $\mathfrak{h} < 0$. Здесь $\mathfrak{g} = |g_{\lambda\mu}|$, $\mathfrak{h} = |h_{\lambda\mu}|$ и $h_{\lambda\mu} = g_{(\lambda\mu)}$. Автором исследовался также тот случай, который возникает при $\mathfrak{g}(\mathfrak{g} - 2\mathfrak{h}) = 0$ и им получены необходимые и достаточные условия для существования единственного решения (α) в этом случае. В реферируемой статье рассматривается другой возможный вырожденный случай, когда:

$$\mathfrak{h} = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{g} \neq 0. \qquad (\beta)$$

В этом случае теория существенным образом отличается от того, что имело место в предыдущих случаях. В первой главе рассматриваются совместные инварианты тензора $g_{\lambda\mu}$ и дискриминантного тензора $e_{\omega\mu\lambda\nu}$. Вопрос сводится к исследованию тензоров $h_{\lambda\mu}$ и $k_{\lambda\mu}$, определяемых условиями: $h_{\lambda\mu} = g_{(\lambda\mu)}$, $k_{\lambda\mu} = g_{[\lambda\mu]}$, $g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} + k_{\lambda\mu}$. Исследование ведется в предположении, что выполняются условия: 1) $\mathfrak{g} \neq 0$, 2) ранг $(h_{\lambda\mu})$ равен трем и сигнатура $h_{\lambda\mu}$ имеет вид $(+++)$, 3) ранг матрицы $(k_{\lambda\mu})$ равен 4 или 2. Сопоставляя $k_{\lambda\mu}$ и $h_{\lambda\mu}$ квадрику и конику, автор в первой главе получает соотношения, характеризующие эти два тензора. Во второй главе определяется вспомогательная связность $\mathring{\Lambda}^{\nu}_{\lambda\mu} \overset{\text{def}}{=} a^{\nu\alpha}\gamma_{\alpha\lambda\mu} + \delta^{\nu}_{4}\partial_{(\lambda}a^{4}_{\mu)}$ $(= \mathring{\Lambda}^{\nu}_{\mu\lambda})$, без кручения. Здесь $\gamma_{\alpha\lambda\mu} = \partial_{(\mu}h_{\alpha\lambda)}$, $a^{4}_{\mu} = a^{\nu}_{4}a_{\lambda\nu}$, $a^{\nu}_{4} = \delta^{\nu}_{4}$ и $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda} \overset{\text{def}}{=} h_{\lambda\mu} + a^{4}_{\lambda}a^{4}_{\mu}$. Выводятся необходимые и достаточные условия существования такой связности и некоторые вспомогательные формулы, которые в следующей статье помогут в решении поставленной задачи: получении условий существования и единственности решений уравнений (α) при условиях (β). А. З. Петров

10435. Об уравнениях поля единой теории Боннора. Аброл, Мишра (On the field equations of Bonnor's unified theory. Abrol M. L., Mishra R. S.), Tensor, 1958, 8, № 1, 14—20 (англ.)

Рассматриваются уравнения единой теории Боннора (РЖМат, 1959, 4165), имеющие вид:

$$\underset{+-}{g_{ij;k}} \equiv g_{ij,k} - g_{lj}\Gamma^{l}_{ik} - g_{il}\Gamma^{l}_{kj} = 0, \quad S_i \equiv \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^{l}_{li} - \Gamma^{l}_{il}) \equiv \Gamma^{l}_{[li]} = 0,$$

$$R_{(ij)} + p^2 U_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji} + p^2 U_{ij} + p^2 U_{ji}) = 0,$$

$$R_{[ij,k]} + p^2 U_{[ij,k]} = 0,$$

где g_{ij} — несимметрический вещественный тензор, R_{ij} — тензор Риччи, отвечающий связности Γ^{l}_{jk}, а p — произвольная вещественная или мнимая постоянная и $U_{ik} = g_{[ki]} - g^{[mn]} \times g_{im}g_{nk} + \frac{1}{2}g^{[mn]}g_{mn}g_{ik}$. Так как самый общий вид замены аффинной связности, сохраняющей параллелизм, определяется уравнениями $\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + 2\delta^{i}_{j}\lambda_k$, где λ_l — произвольный ковариантный вектор, а в симметрическом случае $\mathring{\Gamma}{}^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + \delta^{i}_{j}\lambda_k + \delta^{i}_{k}\lambda_j$, то автор записывает уравнения поля через аффинные связности $\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}$ и $\mathring{\Gamma}{}^{i}_{jk}$ и λ_l. В случае $\overset{*}{\Gamma}$ эти уравнения принимают вид:

$$\overset{*}{R}_{jk} + \overset{*}{\widetilde{R}}_{kj} = \overset{*}{P}_{jk} + \overset{*}{\widetilde{P}}_{kj} + 6\lambda_{[j,k]} = 2[\overset{*}{P}_{jk} + 3\lambda_{[j,k]}] = 2[\overset{*}{\widetilde{P}}_{kj} + 3\lambda_{[jk]}]$$

и в случае $\mathring{\Gamma}$: $\mathring{R}_{kj} + \mathring{\widetilde{R}}_{kj} = \mathring{P}_{kj} + \mathring{\widetilde{P}}_{kj} = 2\mathring{P}_{jk} = 2\mathring{\widetilde{P}}_{kj}$, где $\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk} - 4\lambda_{[j,n]}$, $P_{ij} = \Gamma^{l}_{ij,l} - \Gamma^{l}_{im}\Gamma^{m}_{lj} - \frac{1}{2}\Gamma^{l}_{(il),j} - \frac{1}{2}\Gamma^{l}_{(jl),i} + \Gamma^{l}_{ij}\Gamma^{m}_{(lm)}$, $\widetilde{P}_{jl} = P_{ij}$, $\overset{*}{P}_{ij} = \overset{*}{\widetilde{P}}_{jl}$.

В случае $\mathring{\Gamma}$ обозначения $*$ и $\sim$ имеют аналогичный смысл. А. З. Петров

10436. Об определении уравнений движения для общей ковариантной нелинейной теории поля Эйнштейна, Инфельда и Гофмана, методом аппроксимации. Пенфилд, Зацкис (On the determination of the equations of motion from a general, covariant, non-linear field theory by the approximation method of Einstein, Infeld, and Hoffman. Penfield R. H., Zatzkis Henry), Acta phys. austriaca, 1956, **10**, № 1—2, 87—94 (англ.)

В ряде работ Эйнштейна, Инфельда и других авторов было показано, что уравнения движения частиц могут быть получены из уравнений поля; для этих теорий является характерным, что материальная частица интерпретируется как математическая сингулярность уравнений поля. Метод аппроксимации основан на возможности разложить метрический тензор в степенной ряд по степеням параметра λ, равного отношению скорости частицы к скорости света

$$(\lambda = r/c): g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + \lambda g^1_{\alpha\beta} + \lambda^2 g^2_{\alpha\beta} + \lambda^3 g^3_{\alpha\beta} + \ldots$$

В статье рассматривается метод получения уравнений движения сингулярностей, являющийся реализацией идеи, высказанной Бергманом (Bergmann P. G., Phys. Rev., 1949, **75**, 680), и охватывающий широкий класс полей. Для этого, не специализируя варьируемые переменные, обозначаемые через y_A $(A = 1, \ldots, N)$, предполагается, что уравнения поля являются следствиями вариационного принципа $\delta I = 0$; здесь

$$I = \int_V L(y_A; y_{A,\rho})\, d^4x \quad \text{и} \quad L = \Lambda^{A_\rho\ B_\sigma}\, y_{A,\rho}\, y_{B,\sigma},$$

$\Lambda^{A_\rho\ B_\sigma} = \Lambda^{A_\rho\ B_\sigma}(y_C)$, L — функция Лагранжа. Тогда уравнения поля получаются в результате варьирования лагранжиана и записываются в виде: $L^A = 0$; здесь

$$L^A = \partial^A L - (\partial^{A,\rho} L)_{,\rho}\ ;\ L^A = \partial^A L - \partial^B\, \partial^{A,\rho} L y_{B,\rho} - \partial^{B,\sigma}\partial^{A,\rho} L y_{B,\sigma\rho};\ L^A = \partial^A\, \Lambda^{B\rho C\sigma} y_{B,\rho}\, y_{C,\sigma} - M^{AB\rho C\sigma} y_{B,\rho}\, y_{C,\sigma} - L^{A\rho B\sigma} y_{B,\sigma\rho};\ y_{A,\rho} \equiv \frac{\partial y_A}{\partial x^\rho}\ ;\ \partial^A L \equiv \frac{\partial L}{\partial y_A}\ ;\ \partial^{A,\rho} \equiv \frac{\partial L}{\partial y_{A,\rho}}\ ;$$

$$L^{A\rho B\sigma} \equiv \Lambda^{A\rho B\sigma} + \Lambda^{A\sigma B\rho};\ M^{AB\rho C\sigma} \equiv \partial^A\, \Lambda^{B\rho C\sigma} + \partial^A\, \Lambda^{C\sigma B\rho}\ .$$

Разлагая варьируемые переменные y_A по степеням $\lambda = \frac{v}{c}$: $y_A \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l y^l_A$, можно представить L^A также в виде разложения $L^A = \overset{0}{L}{}^A + \lambda \overset{1}{L}{}^A + \lambda^2 \overset{2}{L}{}^A + \ldots$

Ограничиваясь аппроксимацией до $\overset{2}{L}{}^A$, авторы производят оценку отбрасываемым членам разложения, что позволяет получить приближенные уравнения движения для того класса полей, уравнения которых могут быть получены из указанного вариационного принципа.

А. З. Петров

10437. О распространении прерывностей риманова тензора. Траутман (Sur la propagation des discontinuités du tenseur de Riemann. Trautman André), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 10, 1500—1502 (франц.)

Исследуются дифференциальные уравнения, которые позволяют оценить распространение прерывности тензора кривизны вдоль гравитационных лучей; предполагается, что фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ имеет компоненты, принадлежащие классу C^1 функций и классу C^2 „на куске", а координаты преобразуются при помощи функции класса C^2 и класса C^3 „на куске" (о понятии класса „на куске" см. Lichnerowicz A., Les théories relativistes de lagravitation et de l'électromagnétisms, Masson, Paris, 1955). Тогда локальная прерывность вторых частных производных на гиперповерхности $\varphi(x^\nu) = 0$ выражается формулой $[\partial_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}] = h_{\mu\nu}\, \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi$. Для характеристического многообразия, где будет иметь место прерывность тензора кривизны, имеем уравнение $g^{\rho\sigma}\, \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi = 0$. В случае свободного пространства $(R_{\mu\nu} = 0)$ исследование распространения прерывностей приводится к изучению дифференциального уравнения: $h^\nu_\mu \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} h^\nu_\nu\, \partial_\mu \varphi = 0$. Кривые вдоль которых изучается изменение прерывностей тензора кривизны (пути гравитации), являются бихарактеристиками и определяются уравнениями: $\frac{dx^\beta}{du} = g^{\rho\beta}\, \partial_\rho \varphi$; они будут изотропными геодезическими. Дифференциальное уравнение для прерывностей тензора кривизны, в произвольной координации, будет иметь вид:

$$2\frac{D}{du}[R_{\mu\nu\rho\sigma}] + \Box\varphi\, [R_{\mu\nu\rho\sigma}] = 0,$$

где $\Box\varphi \overset{\text{def}}{=} g^{\mu\nu}\, \varphi_{,\mu\nu}$ и $DA = A_{,\nu}\, dx^\nu$.

Теория иллюстрируется на примере решения Шварцшильда уравнений поля свободного пространства, отнесенного к полярной системе координат:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\Theta^2 - \sin^2\Theta d\varphi^2).$$

Прерывность тензора кривизны в этом случае имеет вид:

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}(r)] = [R_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_0)]\ \frac{r_0 - 2m}{r - 2m}\ ,$$

что соответствует известным результатам.

А. З. Петров

10438. О постулатах, общих для классической кинематики и для релятивистской кинематики. Каттанео (Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica. Cattaneo Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur, 1958, **24**, № 5, 526—532 (итал.)

Изучается вопрос о построении группы аксиом, общих для классической и релятивистской кинематик; присоединение к этой группе дополнительных требований приводит к этим двум механикам. Аксиоматика строится по следующей схеме:

I. Вселенная. События. Постулируется событие E как основа кинематики и существование вселенной, как феномена, составленного из событий U.

II. Галилеево многообразие: существует одно трехмерное пространство S, обладающее свойствами: а) в нем имеет место геометрия Евклида, б) имеется присоединенное к S понятие одновременности и длительности, в) пространство S, снабженное декартовой системой отнесения $Oxyz$ и временем t, объединяется в многообразие $R(\equiv(Oxyz, t))$ — галилеево пространство-время (вселенная), г) пространство s изотропно и однородно.

III. Принцип относительности. Предлагается группа аксиом, включающая в себя понятие непрерывности допускаемых для описания явлений функций. Пользуясь этими аксиомами, автор устанавливает понятие инерциальных систем и то, что связь между этими системами выражается линейными преобразованиями. Показывается, как из такой аксиоматики получить преобразование Галилея или Лоренца.

Примечание референта. Автор, по-видимому, незнаком с работами А. Д. Александрова по вопросу о построении специальной теории относительности, хотя, при ином понимании существа вопроса, в группе аксиом 1 близок к некоторым основным положениям указанной теории. А. З. Петров

10439. Механика инерциальных систем. Теория гравитации. Единая механика малых расстояний. Онисеску (Une mécanique des systèmes inertiaux. Une théorie de la gravitation. Une mécanique des petites distances. Onicescu O.), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 5, 723—740 (франц.)

Рассматривается вопрос о построении динамики инерциальных систем с учетом релятивистских эффектов и связанные с ней задачи. Если в трехмерном евклидовом пространстве задана голономная система, отнесенная к лагранжевым координатам q^j $(j=1,2,\ldots,N)$, то при помощи уравнений $\frac{dq^j}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_j}$, $\frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q^j}$, $f=$ $=(q,\ p,\ t)$ определяется динамическая система. Инерциальное движение материальной точки определяется при помощи постулатов: 1) изолированная материальная точка является голономной динамической системой с тремя степенями свободы, 2) пространство движения — евклидово, 3) функция положения для изолированной материальной точки определяет скалярное поле при помощи инварианта p^2+q^2+ $+r^2$, т. е., $f\equiv F\left(\frac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)\right)$, 4) при движениях форма $\Omega_\delta=\bar{\pi}\,\delta\,\bar{\rho}-F\delta t$ должна оставаться инвариантной, 5) отношение $\frac{F}{m}$, где $m=\frac{1}{F'}$, должно сохранять постоянное значение независимо от движущейся точки, равное c^2, где c — скорость света в пустоте: $\frac{F}{m}=c^2$. Отсюда следует соотношение $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ и доказывается теорема, что преобразования, оставляющие инвариантной форму Ω_δ, сохраняют также билинейную форму $\varphi=d\,\bar{\rho}\,\delta\,\bar{\rho}-c^2\,dt\,\delta t$, которая интерпретируется физически. Далее рассматривается инерциальная система точек, для которой получаются уравнения движения; вводятся гравитационные постулаты. Определяются соотношения между динамическими массами μ_{nk} и малыми расстояниями

$$r_{ij}:\ \frac{d}{dt}\Big[\sum_h \sqrt{\varphi_h\varphi_j}\,\mu_{hj}\,\bar{\rho}_h\Big]=-\operatorname*{grad}_j\Big(\sum_{hk}\sqrt{\psi_h\psi_k}\,\mu_{hk}\Big)$$

$(j=1,\ldots,n)$, где $\psi_h=1+\frac{f}{c^2}\sum_{k\neq h}\frac{\overset{\circ}{m}_k}{r_{hk}}$, $\varphi_j=1+$ $+\frac{1}{c^2}\sum_{h\neq l}\frac{\lambda_{jh}}{r_{jh}}$, λ_{ij} — численные коэффициенты, характеризующие систему. Отсюда в предельном случае получаются уравнения ньютоновой теории. Результаты применяются к решению задачи двух тел.

А. З. Петров

10440. Единая теория поля и электромагнетизм в материи. Маурер-Тизон (Théorie unitaire et électromagnétisme dans la matière. Maurer-Tison Françoise), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 26, 3042—3045 (франц.)

В качестве приложения результатов предыдущей работы (РЖМат, 1957, 7364) получена связь между характеристиками электромагнитного поля в материальной среде и компонентами метрического тензора.

Я. И. Пугачев

10441. Уравнения Гельмгольца. Определение скорости вылета вихря. Проблема эволюции. Фурес-Брюа (Equations d'Helmholtz. Détermination des vitesses à partir des tourbillons. Problème d'évolution. Fourés-Bruhat Yvonne), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 24, 3319—3322 (франц.)

Исходя из релятивистских уравнений голономной жидкости

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}=\chi\,(ru_\alpha\ u_\beta-\Theta_{\alpha\beta}),\qquad(\alpha)$$

где χ — постоянная, r — псевдоплотность среды, u_α — единичный вектор скорости, $\Theta_{\alpha\beta}$ — тензор, удовлетворяющий уравнению $K_\beta\equiv r^{-1}\Theta^\alpha_{\beta,\alpha}=\partial_\beta\log F$, где F — коэффициент, характеризующий среду, автор исследует релятивистское обобщение уравнений Гельмгольца, имеющее вид:

$$C^\alpha\ \Omega_{\beta\gamma,\alpha}=\Omega_{\alpha\beta}C^\alpha_{,\gamma}+\Omega_{\alpha\gamma}\,C^\alpha_{,\beta}\ ,\qquad(\beta)$$

где $C_\alpha=Fu_\alpha$, $\Omega_{\alpha\beta}$ определяется дифференциальной формой $d\omega\equiv\Omega=\Omega_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\wedge dx^\beta$, а $\omega=C_\alpha\,dx^\alpha$.

Определяются уравнения скорости движения вихря в такой жидкости, которые получаются из соотношения

$$\square\omega=\delta\Omega+dC^\alpha\ \partial_\alpha\log(F^{-2}r),$$

где $\square=d\delta+\delta d$, что приводит к релятивистскому обобщению соответствующих уравнений гидродинамики

$$\{g^{\alpha\beta}+2C^\alpha\ C^\beta\,\Phi'\}\,C_{\gamma,\alpha\beta}+2\Phi'C^\beta\,\{C_{\beta,\alpha}C^\alpha_{,\gamma}+C^\alpha_{,\beta}\,C_{\gamma,\alpha}\}+$$

$$+4\Phi''C^\alpha\,C^\beta C_{\beta,\alpha}C^\lambda C_{\lambda,\gamma}+(\delta\Omega)_\gamma=0,\qquad(\gamma)$$

где $\Phi(F^2)=\log(F^{-2}r)=\Phi\,(C^\alpha\,C_\alpha)$.

Для систем уравнений (α), (β), (γ) ставится вопрос о решении задачи Коши; именно рассматривается та часть проблемы, которая после задания начальных данных Коши предполагает интегрирование по времени. Показывается, что решение этой проблемы можно осуществить в рамках теории, развитой А. Лихнеровичем.

А. З. Петров

10442. О гравитационной радиации. Бель (Sur la radiation gravitationnelle. Bel Louis), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 15, 1094—1096 (франц.)

Рассматривается задача построения теории гравитационной радиации по аналогии с электромагнитной радиацией. Для этого строятся тензорные величины, которые должны играть ту же роль, что и тензор Максвелла, плотность энергии, вектор Пойнтинга в электромагнетизме. Рассматривая риманово пространство с метрикой $ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ и сигнатурой $(---+)$, автор вводит тензор $M_{\beta\gamma,\mu\nu}=R^{\alpha\lambda}_{\beta\mu}R_{\alpha\gamma\lambda\nu}+R^{\alpha\lambda}_{\beta\nu}R_{\alpha\gamma\lambda\mu}$, удов-

летворяющий условиям $M_{\beta\gamma,\mu\nu} = M_{\gamma\beta,\mu\nu} = M_{\beta\gamma,\nu\mu} = M_{\mu\nu,\beta\gamma}$. Для уравнений поля свободного пространства $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$, когда $R_{\alpha\beta\gamma\delta,}{}^{\alpha} = 0$, получается ряд соотношений для тензора M. Пользуясь результатами, полученными референтом (РЖМат, 1956, 4866) и Лихнеровичем (РЖФиз, 1958, 24422), автор вводит тензоры $T_{\beta\gamma,\mu\nu} = A g_{\beta\gamma} g_{\mu\nu} - M_{\beta\delta,\mu\nu}$, $(A = \frac{1}{8} R^{\nu\beta\lambda\mu} R_{\alpha\beta\lambda\mu})$, скаляр $V = -\frac{1}{2} T_{00,00}$ и вектор $\mathbf{P}$, определяемый соотношением $\mathbf{P}^i \equiv T^i{}_{0,00}$, которое является аналогом тензора Максвелла, плотности энергии и вектора Пойнтинга, соответственно, в электромагнитной радиации. Эти величины, полученные в полугеодезической системе координат, могут быть записаны в инвариантном виде. Для заданного направления $\bar{u}$, $\mathbf{P}_\rho(\bar{u}) = (g^\mu_\rho - u_\rho u^\mu) T_{\beta\gamma\mu\nu} u^\beta u^\gamma u^\nu$, $\mathbf{V}(\bar{u}) = -\frac{1}{2} T_{\beta\gamma\mu\nu} \times u^\beta u^\delta u^\mu u^\nu$. Если $\mathbf{P}(\bar{u}) = 0$, то $T_{\beta\gamma\rho\lambda} u^\beta u^\gamma u^\lambda = -2V u_\rho$. Пользуясь терминологией, введенной референтом, автор показывает, что пространства Эйнштейна второго и третьего типов характеризуются наличием радиации. Интересный частный случай в пространстве второго типа получается, если существует изотропный вектор l^α, для которого $l^\alpha R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$. Его можно истолковать как случай „чистой" радиации.

А. З. Петров

10443. Уменьшение основных вынужденных связей в общей ковариантной теории поля. Андерсон (Reduction of primary constraints in generally covariant field theories. Anderson James L.), Phys. Rev., 1958, 111, № 3, 965—966 (англ.)

Всякой ковариантной теории поля, в ее канонической формализации, сопутствуют некоторые вынужденные условия, которые автор подразделяет на два сорта: основные (первостепенные) и второстепенные. Варьируемые переменные поля и некоторые величины, сопряженные им, не всегда будут линейно независимы. Поэтому существенно выяснить число связывающих их условий. Так, в электродинамике группа основных зависимостей записывается в виде $\pi^4 = 0$, где π^4 — каноническая плотность, сопряженная скалярному потенциалу φ; второстепенные связи выразятся условием $\nabla\pi = 0$, где π — векторная плотность, сопряженная с векторным потенциалом $\mathbf{A}$. В общем случае, когда уравнения поля получаются в результате варьирования лагранжиана $L = \frac{1}{2} \Lambda^{A\mu B\nu} y_{A\mu} y_{B\nu}$, где y_A — варьируемые величины поля $\Lambda^{A\mu B\nu}$ — их функции и когда общий вид бесконечно малого преобразования координат будет $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$, вариации переменных поля запишутся: $\delta y_A = C^\nu_{A\mu} \xi^\mu{}_{,\nu} - y_{A,\mu} \xi^\mu$, где $C^\nu_{A\mu}$ — функции от y_A и ξ^ν, которые описывают преобразование. При помощи обобщенных тождеств Бианки можно показать, что

$$C_{A\mu}{}^4 \Lambda^{A_4 B_4} = 0. \qquad (\alpha)$$

Плотности инерции в такой теории будут определяться в виде $\pi^A \equiv \partial L / \partial y_{A,4} = \Lambda^{A_4 B p} y_{B,\mu}$. Умножая эти соотношения на $C^4_{A\mu}$ и пользуясь тождеством (α), получим уравнения, свободные от всех временных производных $C^4_{A\mu}(\pi^A - \Lambda^{A_4 B s} y_{B,s}) = 0$, которые и составляют группу основных связей. Показывается, что существует каноническое преобразование, которое приводит основные связи к виду $\pi^\alpha = 0$; эти преобразования определяются формулами

$$y_{A'} = \frac{\delta \mathfrak{C}}{\delta \pi'^A} = y_A, \quad \pi^A = \frac{\delta \mathfrak{C}}{\delta y_A} = \pi'^A + \left(\frac{\partial \Gamma^{Br}}{\partial y_A} - \frac{\partial \Gamma^{Ar}}{\partial y_B} \right) y_{B,r},$$

где $\mathfrak{C} = \int \{ y_A \pi'^A + \Gamma^{Ar} y_{A,r} \} d^3x$, а величина Γ^{Br} удовлетворяет уравнению $\frac{\partial \Gamma^{Br}}{\partial y_A} - \frac{\partial \Gamma^{Ar}}{\partial y_B} = \Lambda^{A,Br}$. В приложении к общему релятивизму основные связи записываются в виде: $\pi^{\mu 4} - \Lambda^{(\mu 4)(ik)r} g_{ik,r} = 0$, где Λ выражено в виде функции от компонент основного тензора $g_{\mu\nu}$ и плотности g.

А. З. Петров

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

10444. Об отношении S-функций к многообразиям Шуберта. Хоррокс (On the ralation of S-functions to Schubert varieties. Horrocks G.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 26, 265—280 (англ.)

Формула перемножения S — функций и формула для произведений условий Шуберта формально тождественны, если отсутствие каких-либо условий-символов интерпретировать как нуль. Эта работа имеет целью проследить ту же связь для комплексных грассманианов. Широко используются современные теории, работы де Рама, Чжэнь Шэн-шеня (Черна), Э. Картана, Бореля и Серра и интерес работы заключается в искусном применении этих теорий к грассманианам, т. е. симметричным однородным многообразиям с компактной группой преобразований. Автор скромно заканчивает замечанием: „Связь между многообразиями Шуберта и неприводимыми представлениями общей линейной группы все еще содержит много непонятного". D. Redoe

Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 4, 459.

10445. Теорема единственности для двумерных римановых многообразий с границей. Сюн Чуань-чжи (A uniqueness theorem on two-dimensional Riemannian manifolds with boundary. Hsiung Chuan-Chih), Michigan Math. J., 1958, 5, № 1, 25—30 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть M_2 и M_2^* — ориентированные римановы многообразия класса C^2, вложенные в евклидово пространство E размерности $\geqslant 3$, с границами C и C^* соответственно и с положительной гауссовой кривизной в каждом нормальном направлении. Предположим, что существует дифференцируемый гомеоморфизм H многообразия M_2 на M_2^*, сохраняющий ориентацию и такой, что для всякой точки $x \in M_2$ касательные плоскости в точках x и $H(x)$ параллельны и суммы радиусов главных кривизн в этих точках равны между собой для каждого общего нормального направления. Если H индуцируется на границе C некоторым параллельным переносом в пространстве E, то существует параллельный перенос, совпадающий с H на всем M_2.

А. Л. Онищик

10446. О контактных многообразиях. Бутби, Ван (On contact manifolds. Boothby W. M., Wang H. C.), Ann. Math., 1958, 68, № 3, 721—734 (англ.)

Пусть M — гладкое многообразие размерности $2n+1$. Контактной структурой на M называется форма ω первого порядка такая, что $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$. С контактной структурой связывается некоторое векторное поле Z

на M, нигде не обращающееся в 0. Структура называется регулярной, если каждая точка многообразия имеет кубическую окрестность с координатами $x_1, \ldots, x_{2n+1}$, пересечение которой с любой интегральной кривой поля Z задается уравнениями $x_i = c_i$ $(i \geqslant 2,\ c_i$ — константы). Доказывается, что если ω — регулярная контактная структура на компактном многообразии M, то поле Z превращает M в главное расслоенное пространство, слоем которого является окружность S. Если π — проекция пространства M на базу B, то существует такая замкнутая форма Ω на B, что $d\omega = \pi^*\Omega$, причем коцикл Ω является целочисленным и $\Omega^n \neq 0$. Обратно, если B — любое симплектическое многообразие, то существует главное расслоенное пространство M с базой B и слоем S, допускающее контактную структуру такую, что Z — поле скоростей группы S. Контактная структура называется однородной, если на многообразии транзитивно действует связная группа Ли, оставляющая форму ω инвариантной. Доказывается, что однородная контактная структура всегда регулярна. Если M — компактное односвязное однородное контактное многообразие, то база B его естественного расслоения является однородным алгебраическим многообразием. Если $n = 2r > 2$, то такое многообразие M гомеоморфно пространству единичных касательных векторов к некоторому многообразию тогда и только тогда, когда M — многообразие Штифеля $V_{2r+2,2}$. А. Л. Онищик

10447. Определение различных аффинных связностей в почти эрмитовом многообразии. Сугури (Determination of various affine connections in almost Hermitian manifolds. Suguri Tsuneo), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, **A10**, № 2, 151—166 (англ.)

Реферированное ранее (РЖМат, 1958, 5155) исследование продолжается специально для связностей, приписываемых Фрёлихеру и Либерману. Исчезновение некоторой части кручения связности дает необходимые и достаточные условия для псевдоэрмитовой структуры. Изложенная здесь попытка сходна с тем, что сделал Лихнерович (РЖМат, 1957, 5150 К). A. Nijenhuis

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 6, 681.

10448. Локальная и глобальная ковариантные вариации дифференциальных форм при инфинитезимальных конформных преобразованиях. Накаэ (The local and global covariant variations of differential forms under an infinitesimal conformal transformation. Nakae Tatuo), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 1, 20—37 (англ.)

Рассматриваются инфинитезимальные конформные преобразования риманова многообразия и соответствующие им вариации тензоров, дифференциальных форм и операторов, определенных на этих формах. Все рассматриваемые объекты относятся к классу C^∞. Вводятся два вида вариации: локальная δ_l, также обозначаемая штрихом, глобальная δ_g, также обозначаемая точкой над обозначением формы. Вместо обычных обозначений d, — δ, Δ применяются соответственно $\triangle$, ∇, $\square$. Приведем некоторые определения и результаты. Пусть M — n-мерное риманово пространство, D — ограниченная область в нем с границей B, состоящей из конечного числа непересекающихся замкнутых многообразий класса C^∞. Формы и операторы определяются в некоторой окрестности $D + B$. Пусть N_i — единичный касательный вектор в точках B, $\nu = N_i\, dx^i$. Операторы $\nu \wedge \alpha$ и $*(*\alpha \wedge \nu)$ обозначаются через $\perp\alpha$ и $\top\alpha$ соответственно. Формы, для которых $\perp\alpha = 0$ ($\top\alpha = 0$), называются относительными (коотносительными), общие же формы — абсолютными. Известно прямое разложение $C_a = B_r \oplus H_r \oplus \overline{B}_a$ пространства абсолютных C^∞ форм C_a; здесь B_r — пространство относительных форм, являющихся внешними дифференциалами, H_r — пространство относительных гармонических форм, $\overline{B}_a$ — пространство абсолютных форм, являющихся кодифференциалами. Операторы проектирования в H_r, B_r, $\overline{B}_a$ обозначаются через H, K, L соответственно, $H + K + L = E$, где E — тождественный оператор. Далее вводится инфинитезимальное конформное преобразование $vg_{ij} = 2\mu g_{ij}$, где v — символ вариации, μ — функция класса C^∞ (dx^i приписывается вариация, равная нулю). Вводится оператор $M\alpha_p = \left(\frac{n}{2} - p\right)\mu\alpha_p$ (p — степень формы α_p). Получая выражения локальной вариации форм, автор определяет вариацию операторов, считая, например, $(\delta_l H)\alpha = \delta_l(H\alpha) - H\delta_l\alpha$. Тогда имеют место соотношения

$$L'\alpha = (-ML + 2LML - LM)\alpha,$$

$$K'\alpha = (MK - 2KMK + KM)\alpha$$

(откуда сразу получается и вариация H) и ряд других формул. При том же конформном преобразовании глобальная вариация определяется формулой $\delta_g = H\delta_l H\alpha + K\delta_l K\alpha + L\delta_l L\alpha$, т. е. вводится как сумма проекций локальных вариаций трех компонент α в те же основные подпространства. Устанавливается коммутативность δ_g с H, K, L, откуда вытекает $\delta_g H = \delta_g K = \delta_g L = 0$. Если форма относительная или принадлежит B_r, H_r, $\overline{B}_a$, то и $\delta_g\alpha$ — относительная или соответственно принадлежащая B_r, H_r, $\overline{B}_a$ форма. Дается выражение вариации оператора Грина для краевой задачи $\square\beta = (E - H)\alpha$, $\perp\beta = 0$, $\perp\nabla\beta = 0$, $H\beta = 0$. Пусть $\beta = G\alpha$ — ее решение, и $\widetilde{G}$ определено равенством $\widetilde{G}\alpha = \oint_B \alpha \wedge (y) \wedge *G(x,y)$. Тогда $\dot{G} = -G\square\dot{G} + \widetilde{G}\nabla G$. В последнем параграфе рассмотрены инфинитезимальные точечные преобразования в области D. $X: \widetilde{x}^i = x^i + \xi^i dt$; предполагается, что ξ^j касательно к границе B во всех ее точках; тогда область сохраняется, H_r, B_r, $\overline{B}_a$ также сохраняются. X подчиняется условию конформности $Xg_{ij} = 2\mu g_{ij}$ и к нему применяются результаты, относящиеся к v. См. также РЖМат, 1956, 9080.

В. В. Рыжков

10449. О полигармонических потоках. Элиану (Sur les courants polyharmoniques. Elianu Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 5, 486—488 (франц.)

Пусть V есть (аналитическое) риманово многообразие класса C^∞; обозначим через Δ^m m раз примененный оператор Лапласа к V. Автор показывает, что если T есть поток на V такой, что $\Delta^m T$ эквивалентен в области D (аналитической) форме класса C^∞, то T сам эквивалентен (аналитической) форме класса C^∞ в области D. Доказательство легко сводится к известному случаю $m = 1$. В случае компактного V уравнение $\Delta^m S = T$ (S и T — потоки) имеет решение S тогда и только тогда, когда T ортогонален ко всем гармоническим формам; в этом случае существует единственное решение $\sum$, ортогональное ко всем гармоническим формам, и любое решение записывается в виде суммы $S = \sum + h$, где h — гармоническая форма. В частности, если $T = 0$, то S — гармоническая. Доказательство использует описанное де Рамом действие оператора Δ на пространство потоков и индукцию.

L. Ehrenpreis

Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 5, 575.

10450. Алгебраическая теория координатных структур и геометрических объектов. Спивак М. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 236—247

Основными структурами в дифференциальной геометрии являются координатные структуры, которые задаются некоторым множеством K координатных систем. Координатная система есть частичное взаимно однозначное отображение данного геометрического пространства в арифметическое. Автор изучает свойства координатных структур алгебраическими методами. Пусть A и B — два множества; частичное взаимно однозначное отображение $\varkappa$ множества A в множество b называется картой. Множество K карт называется атласом множества A на множестве B, если

$$\bigcup_{\varkappa\in K} pr_1\varkappa = A, \qquad \bigcup_{\varkappa\in K} pr_2\varkappa = B.$$

Аксиоматически определяются несколько основных типов атласов, именно, атласы Веблена — Уайтхеда, атласы Клейна и волокнистые атласы. Аксиомы этих атласов соответствуют некоторым теоретико-множественным свойствам координатных структур пространства X_n, пространства Клейна и касательного составного многообразия. Применяя алгебру бинарных отношений, автор изучает свойства указанных атласов. В эту абстрактную схему переносятся понятия геометрического и геометрического дифференциального объектов, доказывается теорема, аналогичная теореме Медолаги — Вагнера в теории геометрических объектов.

А. Е. Либер

10451. О келеровых многообразиях с исчезающим каноническим классом. Калаби (On Kähler manifolds with vanishing canonical class. Calabi Eugenio), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 78—89 (англ.)

Автор называет келерово многообразие специальным, если оно компактно, и его первый канонический класс Чжень Шэн-шеня, т. е. класс когомологии, определяемый формой $\frac{i}{2\pi} R_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha \wedge dz^{\overline{\beta}}$ есть нуль. Форму $\omega = ig_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\overline{\beta}}$ называют главной формой. При доказательстве теорем автор исходит из предложения, которое он не доказывает, а только поясняет. Именно, пусть M_n — компактное комплексное многообразие, допускающее бесконечно дифференцируемую келерову метрику с главной формой ω и формой Риччи $\sum$. Если $\sum'$ — замкнутая вещественная бесконечно дифференцируемая форма типа (1, 1), когомологичная $\sum$, то существует единственная келерова метрика с главной формой ω', когомологичной ω, и формой Риччи, равной $\sum'$. Эта метрика бесконечно дифференцируемая. Она вещественно аналитическая, если $\sum'$ аналитическая.

Рассмотрим компактное келерово многообразие M_n. Обозначим его первое число Бетти через $2g_1$. Через $\alpha_1, \ldots, \alpha_{g_1}$ обозначим базис дифференциалов Пикара первого рода на M_n. Многообразием Албанезе A_M многообразия M_n называется комплексный тор размерности $2g_1$, периоды которого суть периоды интегралов $\oint \alpha_i$ по одномерным циклам в M_n. Фиксируем пару точек $p_0\in M_1$ и $a_0\in A_M$. Отображение $J(p) = a_0 + \left(\int_{p_0}^{p} \alpha_i\right)_{i=1}^{g_1}$ (по модулю периодов $\oint \alpha_i$) есть комплексно-аналитическое отображение M_n в A_M.

Теорема 1. Если M_n — специальное келерово многообразие, то $0 \leqslant g_1 \leqslant n$ и J есть отображение „на“, M_n можно рассматривать как комплексно-аналитическое расслоенное пространство с проекцией J, базой A_M, имеющее в качестве слоя связное специальное келерово пространство, а в качестве структурной группы конечную абелеву группу.

Из этой теоремы следует теорема 2. Если M_n — специальное келерово многообразие, то существует конечное накрывающее многообразие $\widetilde{M}_n$ многообразия M_n, причем $\widetilde{M}_n$ есть прямое произведение своего многообразия Албанезе $A_{\widetilde{M}}$ и специального келерова многообразия Y, имеющего первое число Бетти, равное нулю. Возможно, что Y вырождается в точку.

Приведенные теоремы позволяют свести задачу классификации специальных келеровых многообразий к классификации специальных келеровых многообразий, у которых первое число Бетти равно нулю.

m — род многообразия M_n есть максимальное число линейно независимых однозначных аналитических плотностей веса m. Предположим, что накрывающее многообразие $\widetilde{M}_n$ k-листное. Тогда существует делитель d числа k такой, что m-род многообразия M_n есть 1 или 0, смотря по тому, делится ли m на d.

Д. В. Беклемишев

10452. О регуляризации метрик в комплексном пространстве. Маруяма (On the regularization of metrics in complex space. Maruyama Takaharu), Sci. Papers Fac. Engng Tokushima Univ., 1953, № 5, 1—6 (японск.; рез. англ.)

В предшествующих работах мы рассматривали свойства геометрии комплексных пространств, но еще не касались метрических свойств. В комплексном пространстве имеются унитарные метрики и метрики Эрмита—Келера, отвечающие соответственно евклидовым и римановым метрикам в вещественном пространстве. Поскольку функции, задающие эти метрики, не являются регулярными, то при изучении геометрии в комплексных пространствах неудобно пользоваться теорией регулярных функций. Поэтому мы хотим построить регулярные функции в комплексном пространстве, нормы которых имеют некоторый геометрический смысл. Это будет называться „регуляризацией метрик“. В настоящей работе вводятся некоторые регулярные функции, связанные с регуляризацией метрик в двумерном комплексном пространстве. Из резюме автора

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 9, 1005.

10453. О комплексных G-структурах. Бернар (Sur les G-structures complexes. Bernard Daniel), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 23, 1821—1824 (франц.)

Пусть V_n — дифференцируемое многообразие класса C^s ($s = 2, \ldots, \infty, \omega$), а $C(V_n)$ (соответственно $E(V_n)$) — главное расслоенное многообразие комплексных (соответственно вещественных) реперов V_n. Пусть G — замкнутая подгруппа $Gl(n, C)$ (соответственно $Gl(n, R)$). Комплексная (соответственно вещественная) G-структура на V_n класса C^r ($r \leqslant s-1$) есть структура S, определенная на V_n заданием главного G-расслоенного подмногообразия $H(S)$ класса C^r. G'-структура S' эквивалентна S, если существует $l\in Gl(n, C)$ такая, что $H(S') = H(S)\cdot l$, $S' = Sl$, $G' = l^{-1}Gl$. G-структура S приводит к G'-структуре S' того же класса, если $H(S')\subset H(S)$, что влечет $G'\subset G$. Ссылаясь на свои работы (РЖМат, 1956, 6119; 1958, 5608) автор указывает условия эквивалентности и приводимости G-структуры к вещественной структуре. Доказывается что с подгруппой $G\subset Gl(n, K)$ канонически ассоциируется векторное пространство M и линейное представление ρ группы G в M. Для каждой G-структуры S на V_n определяется некоторый тензор на $H(S)$ со значениями в M типа $\rho(G)$ — тензор структуры S. Г. Ф. Лаптев

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

10454. Доказательство одной гипотезы Важоньи. Хеппеш (Beweis einer Vermutung von A. Vázsonyi.

Heppes A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 3-4, 463—466 (нем.; рез. русск.)

Известно (Erdös P., Amer. Math. Monthly, 1946, 53, 248—250), что среди $\binom{n}{2}$ расстояний между парами точек некоторого множества, состоящего из лежащих в одной плоскости n точек, не более n могут быть равны диаметру множества, т. е. наибольшему из этих расстояний.

Настоящая работа содержит доказательство одной гипотезы Важоньи, согласно которой в множестве, состоящем из n точек пространства, наибольшее расстояние может встречаться лишь $2n-2$ раза. Примеры, данные для любого $n \geqslant 4$, доказывают, что данная граница точна для всех $n \geqslant 4$. Резюме автора

10455. Конструктивистская теория плоских кривых. Гудстейн (A constructivist theory of plane curves. Goodstein R. L.), Fundam. math., 1956, **43**, № 1, 23—35 (англ.)

Развивается теория p-кривых, представляющих из себя совокупности конечного числа точек, взятых из некоторой решетки двоичных дробей.

Определения. Упорядоченная пара (x, y), где x и y — дроби вида $m/2^p$ (m, p — целые), называется точкой. Упорядоченная пара $<x_1, x_2>$ называется интервалом, упорядоченная пара интервалов $<x_1, x_2><y_1, y_2>$ называется прямоугольником. Если для данного $k \geqslant 1$ целые i_r, j_r удовлетворяют равенству

$$|i_{r+1}-i_r|+|j_{r+1}-j_r|=1$$

для $0 \leqslant r \leqslant k-1$ и $x_r^p = i_r/2^p$, $y_r^p = j_r/2^p$, то упорядоченное множество точек (x_r^p, y_r^p), $0 \leqslant r \leqslant k$ называется плоской p-кривой. Если $|i_r-i_s|+|j_r-j_s|>0$ для всех r и s, удовлетворяющих условию $0 \leqslant r < s \leqslant k$, то кривая называется простой и открытой. Естественным образом вводится понятие простой замкнутой кривой и некоторые другие. В этих терминах изучаются свойства монотонности, аналоги непрерывности, даются определения внутренней области замкнутой кривой, вводится ориентация p-обхода. В заключение рассматриваются p-кривые от относительно непрерывных рекурсивных функций, которые рассмотрены автором в его прежней работе (РЖМат, 1956, 1913).

О. А. Котий

10456. Хорды нелинейной квадрики в PG (3,3). Татт (The chords of the non-ruled quadric in PG (3,3). Tutte W. T.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 481—483 (англ.)

Показывается, что хорды нелинейной квадрики пространства PG (3,3) (РЖМат, 1955, 1120) можно рассматривать как ребра графа, группа которого совпадает с группой автоморфизмов симметрической группы шестой степени. Л. А. Скорняков

10457. Хорды нелинейной квадрики в PG(3,3). Кокстер (The chords of the non-ruled quadric in PG(3,3). Coxeter H. S. M.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 484—488 (англ.)

Предметом этого исследования является установление связи между идеями Татта (реф. 10456) и комбинаторными исследованиями Сильвестра 15 „duads" и 15 „syntheme", образованных 6 символами, и исследованием Ричмонда шеститочечной фигуры в проективном четырехмерном пространстве.

Из предисловия автора

10458. О перспективитетах конечной аффинной плоскости. Андре (Über Perspektivitäten in endlichen affinen Ebenen. André Johannes), Arch. Math., 1958, **9**, № 3, 228—235 (нем.)

Аффинная плоскость называется t-плоскостью, если она допускает нетождественные сдвиги хотя бы по двум направлениям.

Пусть G — группа всех таких коллинеаций t-плоскости π, при которых каждая прямая переходит в прямую, параллельную ей. Устанавливается, что точки плоскости π не могут распадаться в два класса транзитивности относительно группы G. Вопрос о возможности появления трех или большего числа классов транзитивности остается открытым. Л. А. Скорняков

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

10459. Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема. Загускин В. Л., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 6, 89—93

Автор доказывает следующие теоремы: 1. Среди описанных около произвольной фигуры эллипсоидов в n-мерном аффинном пространстве найдется только один эллипсоид минимального объема. 2. Среди эллипсоидов, вписанных в выпуклую фигуру в n-мерном аффинном пространстве, найдется только один эллипсоид максимального объема. 3. Среди эллипсоидов с фиксированным центром, вписанных в выпуклую фигуру в n-мерном аффинном пространстве, найдется только один максимального объема. Э. Г. Позняк

10460. Новое доказательство неизгибаемости выпуклых многогранников. Погорелов А. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 207—208

Предлагается новое доказательство теоремы Коши о неизгибаемости выпуклых многогранников. Доказательство основано на лемме (РЖМат, 1959, 6295).

10461. О порядковом числе класса эйлеровых многогранников. Билинский (Über die Ordnungszahl der Klassen Eulerscher Polyeder. Bilinski S.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 104—105 (нем.)

Основной классификацией эйлеровых многогранников называется такое распределение многогранников на классы, что к одному и тому же классу относятся многогранники с одним и тем же числом вершин, ребер и граней. Возникает задача такого упорядочивания классов эйлеровых многогранников, чтобы получить наиболее целесообразную нумерацию классов. Автор устанавливает такую нумерацию классов, что числа, определяющие многогранник, представляют собой функции порядкового номера классов. Э. Г. Позняк

10462. Правильные косые полиэдры и политопы. Бланушa (Skew regular polyhedra and polytopes. Blanuša D.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 105 (англ.)

Отправляясь от центрально симметричных правильных политопов в евклидовом n-мерном пространстве (полиэдры для $n=3$), посредством идентификации симметричных элементов строятся новые политопы с вдвое меньшим числом вершин. Показывается, что такие политопы могут быть вложены в евклидово пространство размерности $(n^2+n-2)/2$ в виде правильных политопов.

Из резюме автора

10463. О теореме Минковского—Главка. Леккеркеркер (On the Minkowski—Hlawka theorem. Lekkerkerker C. G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1956, **A59**, № 4, 426—434; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 426—434 (англ.)

Автор показывает, что если K — симметрическое выпуклое тело объема V и размерности n, то при $n \geqslant 5$ существует K — допустимая решетка с определителем, не превышающим $\frac{V}{c}$, где $c=4{,}921\ldots$ решение уравнения $c \log c = 2(c-1)$. Далее при $n \geqslant 6$ базис может быть выбран так, чтобы он лежал в кубе.

$|x_i| \leqslant 2{,}13\left(\frac{V}{k_n}\right)^{1/n}$, где k_n — объем единичного шара при соответствующем повороте координатных осей. Второй результат имеет место и для $n = 2, 3, 4, 5$, если вместо c подставить соответственно 3; 3,82; 4,41; 4,80. Первый результат улучшает результаты Давенпорта и Роджерса (Davenport Rogers. Duke Math. J., 1947, **14**, 367 — 375). Доказательства также являются уточнениями их доказательств и требуют подробных вычислений. (Результаты относительно общих звездчатых тел тогда более сильные см. РЖМат, 1957, 1115).
J. W. S. Cassels

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 287.

10464. Доказательство теоремы Ауэрбаха—Банаха—Мазура — Улама о выпуклых телах. Косинский (A proof of an Auerbach — Banach — Mazur — Ulam theorem on convex bodies. Kosiński A.), Colloq. math., 1957, **4**, № 2, 216—218 (англ.)

Доказывается теорема, установленная Х. Ауэрбахом, С. Банахом, С. Мазуром и С. Уламом (называемая также „теоремой о мешке для картофеля"): Дано семейство $\mathfrak{B} = \{V_i\}$ k-мерных выпуклых тел, диаметры которых не превосходят D и $S = \Sigma_i |V_i| < \infty$ ($|V|$ — k-мерный объем V); существует k-мерный куб $C(D, S)$, в котором могут быть размещены все тела семейства таким образом, что никакие два из них не пересекаются.
Э. Г. Позняк

10465. Обобщенная экстремальная задача для выпуклых тел. Оман (Ein allgemeines Extremalproblem für konvexe Körper. Ohmann D.), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 2, 97—107 (нем.)

Поверхностным интегралом $J(g, K)$ по поверхности выпуклого тела K от функции $g(\zeta)$ направления ζ называется выражение $J(g, K) = \int_K g(\zeta)\, dF$, где ζ — направление внешней нормали, а dF — поверхностный элемент K. Из существования интеграла для единичной сферы следует существование указанного интеграла. Функция $g(\zeta)$ называется в этом случае интегрируемой. Если $g(\zeta)$ является опорной функцией $h(K', \zeta)$ фиксированного тела K', то интеграл обозначается $J(K', K)$. Если $V(K'; K, \ldots, K)$ — смешанный объем, то, как известно, $J(K'; K) = nV(K'; K, \ldots, K)$, $J(K'; K)^n \geqslant n^n V(K') V(K)^{n-1}$.
Субфункцией для функции $g(\zeta)$ называется функция $\underline{g}(\zeta) = \liminf g(\zeta')$ $(\zeta' \to \zeta)$. Из интегрируемости $g(\zeta)$ следует интегрируемость $\underline{g}(\zeta)$. Полупространством $H(g; \xi)$ называется множество точек x, для которых $\zeta x \leqslant g(\zeta)$ (ζ — единичный вектор, x — вектор точки, ζx — скалярное произведение). Если пересечение всех $H(g, \zeta)$ не пусто, то оно представляет собой выпуклое тело, обозначаемое Rg и называемое торсом (Rumpfkörper) функции $g(\zeta)$. Автор доказывает следующую теорему. Для заданных интегрируемых функций $g_\varkappa(\zeta)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) и постоянных $c_\varkappa$ можно определить такое множество $\{K\}$ выпуклых тел K с положительным объемом, что для всех $K \in \{K\}$ при фиксированном $\varkappa$ выполняется одновременно одно из трех соотношений: $J(g_\varkappa; K) \geqslant c_\varkappa$, $= c_\varkappa$, $\leqslant c_\varkappa$. Если можно указать такие константы $\lambda_\varkappa$, что при соблюдении соотношений $\lambda_\varkappa [J(g_\varkappa; K) - c_\varkappa] \leqslant 0$ $(k \in \{K\})$ торс R_g линейной комбинации $g(\zeta) = \Sigma \lambda_\varkappa g_\varkappa(\zeta)$ удовлетворяет условиям а) $R_g \in \{K\}$; б) $J(g, R_g) = J(\underline{g}, R_g)$; в) $\lambda_\varkappa [J(g_\varkappa, R_g) - c_\varkappa] = 0$, то среди всех тел множества $\{K\}$ обладает экстремальным объемом. Экстремальным свойством, кроме R_g, обладают лишь тела, полученные параллельным переносом R_g. Автор устанавливает еще несколько специальных предложений.
Э. Г. Позняк

10466. Об интеграле от степени расстояния. Плейель (Über Distanzpotenzintegrale. Pleijel A.), Arch. Math., 1958, **9**, № 6, 430—432 (нем.)

Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство и K — выпуклое тело в E_n. Пусть далее P и Q — две точки в K, dV_P и dV_Q — элементы объема и r — расстояние между P и Q. Автор рассматривает интеграл от степени расстояния

$$D = \int_K r^m dV_P\, dV_Q, \quad m > -n,$$

и доказывает следующее предложение: среди всех выпуклых тел с данной площадью поверхности шар имеет наибольший интеграл D. Из этого предложения автор выводит некоторые ранее известные неравенства, в частности, при $m = 0$ получает изопериметрическое неравенство.
А. Л. Вернер

10467. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». IV. Александров А. Д., Волков Ю. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 13, 27—34 (рез. англ.)

В трех предыдущих публикациях под тем же названием (РЖМат, 1958, 6182, 6183; 1959 5198) содержится доказательство весьма общих теорем единственности для поверхностей в E_n при локальном условии, относящемся к главным кривизнам. В частности, среди них есть теорема, гарантирующая равенство замкнутых поверхностей при условии равенства значений весьма произвольной функции главных кривизн в точках с одинаково направленными нормалями, а также ряд других теорем подобного рода.
В настоящей работе авторы показывают, что эти теоремы верны и в том случае, если вместо обычных кривизн брать условные, которые получаются, если вместо сферы при определении главных кривизн как экстремальных значений отношения линейного элемента сферического изображения к линейному элементу поверхности взять любую строго выпуклую замкнутую поверхность.
А. В. Погорелов

10468. Явные выражения изопериметрических дефектов и теорема Брунна—Минковского для внутреннепараллельных поверхностей. Осио (On the explicit representations of the isoperimetric deficiencies and the Brunn—Minkowski's theorem for inner parallel surfaces. Ohshio Shigeru), Tensor, 1958, **8**, № 1, 38—54 (англ.)

Внутреннепараллельной поверхностью $F(t)$ к замкнутой выпуклой поверхности F называется граница пересечения отрицательных полупространств, ограниченных сдвинутыми внутрь F на расстояние $r - t$ опорными плоскостями к F, где r — радиус наибольшего шара, который можно вписать в F.
Для объема $V(t)$, площади $S(t)$, интеграла средней кривизны $M(t)$, несколько отличной от $M(t)$ „полной средней кривизны" $M^*(t) > M(t)$ и некоторой „характеристики" $k(t) > 4\pi$ поверхности $F(t)$ устанавливаются формулы Штейнера. С их помощью получаются изопериметрические неравенства

$$M^*(t) - k(t)\, S(t) \geqslant 0, \quad S^3(t) - 9k(t)\, V^2(t) \geqslant 0,$$
$$S^2(t) - 3M^*(t)\, V(t) \geqslant 0, \quad M^3(t) - 3(4\pi)^2 V(t) \geqslant 0,$$

обобщающие неравенства Боля — Кнафа, Шварца, Минковского и Ирисона, и даются интегральные выражения для соответствующих изопериметрических дефектов. Доказательства осуществляются путем предельного перехода от предварительно рассмотренных многогранников.
Используя полученные неравенства, автор дает новое доказательство теоремы Брунна — Минковского для

поверхностей $F(t):V(t)$, $S(t)$, $M(t)$ и $M^*(t)$ есть выпуклые функции параметра t. Ю. Д. Бураго

10469. Предельные сечения и универсальные точки выпуклых поверхностей. Мелзак (Limit sections and universal points of convex surfaces. Melzak Z. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 729—734 (англ.)

Мазуром была сформулирована следующая задача: существует ли замкнутая выпуклая поверхность, плоские сечения которой с точностью до аффинных преобразований представляют все замкнутые выпуклые плоские кривые. Автор предлагает несколько вариантов, близких по характеру, но, вероятно, более простых задач: 1) существует ли замкнутая выпуклая поверхность, плоские сечения которой совпадают с точностью до более широкой группы преобразований, чем аффинная, с плоскими замкнутыми выпуклыми кривыми; 2) существование поверхности, плоские сечения которой содержали бы достаточно широкий класс кривых, например, все кривые постоянной ширины; 3) аналогичные задачи для различных обобщений плоских сечений. Одну из задач типа (3) решает автор. Именно, вместо плоских сечений выпуклой поверхности автор рассматривает предельные сечения выпуклых поверхностей, представляющие собой обобщение индикатрисы Дюпена. Пусть S — замкнутая выпуклая поверхность, начало координат расположено внутри S и последовательность плоскостей $\{P_n\}$ сходится к опорной плоскости P к S в точке s. Пусть все P_n пересекают S, C_n — линии пересечения, $\{\lambda_n\}$ — последовательность констант и $\lambda_n C_n$ — кривые, подобные C_n с коэффициентом подобия λ_n. Предельное сечение C поверхности S в точке s по отношению к последовательности $\{P_n\}$ определяется как предел, если он существует, последовательности $\{\lambda_n C_n\}$. Нужно особо отметить, что предел зависит от выбора последовательности $\{P_n\}$. Пусть $C(s)$ — множество всех предельных сечений в точке s. Множество всех предельных сечений, полученных посредством последовательности $\{P_n\}$, параллельных P, обозначается $C_p(s)$. Точка s называется универсальной, если $C(s)=H$ (множество всех замкнутых выпуклых кривых) и p-универсальной, если $C(s)=H$. Поверхность S называется универсальной, если $U_{s\in S}C(s)=H$ и p-универсальной, если $U_{s\in S}C_p(s)=H$. Автор доказывает следующие теоремы: 1. Существует поверхность класса C^∞, за исключением одной точки s, имеющая в s единственную опорную плоскость, и s является p-универсальной точкой. 2. Существует поверхность S, все точки которой универсальны. 3. Существует поверхность S и точка s на ней такая, что $C_p(s)$ — пустое множество, а $C(s)=H$. Точка s поверхности S называется обыкновенной, если $C_p(s)=\{\lambda C\}$ для фиксированного $C\in H$. Обыкновенная поверхность — поверхность, все точки которой обыкновенные. Автор показывает, что 4. Существует обыкновенная поверхность с универсальными точками. Э. Г. Позняк

10470. Об обобщении теоремы Хелли в сферическом пространстве. Молнар (Über eine Übertragung des Hellyschen Satzes in sphärische Räume. Molnár J.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 3-4, 315—318 (нем.)

Дается некоторые обобщения теорем о покрытии выпуклых поверхностей выпуклыми областями. Доказываются следующие утверждения:

Теорема I. Если в n-мерном сферическом пространстве дается множество выпуклых тел такое, что пересечение их по $n+1$ не является пустым, а пересечение их по $n+2$ не покрывает всё сферическое пространство, то пересечение всех тел не является пустым. Отсюда автор получает теорему Робинсона о том, что если любые $n+2$ точки точечного множества n-мерного сферического пространства можно покрыть сферами радиуса $r<\frac{\pi}{2}$, то все множество может быть покрыто шаром радиуса r.

Теорема II. Если каждую $n+1$ точку некоторого точечного множества n-мерного сферического пространства можно покрыть шаром радиуса $r\leqslant\arccos\frac{1}{n+1}$, то все множество может быть покрыто шаром радиуса r.

Теорема II. Если в n-мерном сферическом пространстве дано точечное множество с диаметром $D<\arccos\frac{-1}{n+1}$, то это множество может быть покрыто шаром, описанным около правильного $n+1$ симплекса с длиной ребра D. Р. М. Гейдельман

10471. О локально выпуклых многообразиях проективных пространств. Фенхель (Sur les variétés localement convexes des espaces projectifs. Fenchel W.), Colloq. quest. réalité géom. Liège, 1955, Liège-Paris, 1956, 95—104 (франц.)

Автор рассматривает различные обобщения следующей теоремы Мебиуса. Замкнутая простая кривая локально выпуклая в проективной плоскости является выпуклой кривой в обычном смысле (имеется в евклидовой плоскости не пересекающая данную кривую прямая, называемая бесконечно удаленной, и данная кривая есть граница выпуклого множества евклидовой плоскости).

Автор указывает следующие возможные обобщения этой теоремы. Пусть V^r — замкнутое r-мерное топологическое многообразие. Рассмотрим локально топологическое отображение V^r в проективное пространство Π^n, размерности $n>r$. Пусть образ Φ^r многообразия V^r не содержится ни в какой гиперплоскости Π^n. Пусть x — произвольная точка V^r. Под локальным родом Φ^r в x понимается максимальное число точек пересечения линейного многообразия Π^{n-r} с образом в произвольно малой окрестности x. Предположим, что локальный род Φ^r конечен, не зависит от x и равен ω. Возникает вопрос: влияет ли указанное предположение однородности на глобальную структуру Φ^r и, если $r>1$,— на топологическую структуру V^r. Кроме указанного общего случая, возможно также следующее обобщение. Пусть образы $n-r+1$ точек V^r никогда не располагаются в одном и том же линейном подпространстве размерности $n-r-1$ пространства Π^n. Для случая $r=n-1$ вопрос сводится к следующему — будет ли соответствие между V^r и Φ^r топологическим в целом. Если это действительно так, то можно идентифицировать многообразие параметров V^r с Φ^r. Локальный род не может быть произвольным. Хаупт показал, что наибольшее значение ω, равное $r(n-r)+1$, допустимо почти всюду для многообразий, удовлетворяющих определенным условиям дифференцируемости. В рассматриваемом случае $\omega=n-r+1$. Для случая $r=1$, $\omega=n$ задача была решена Хельмслеви. Предмет исследования автора — случай $r=n-1$, $\omega=2$. Именно, пусть V^{n-1} — замкнутое топологическое многообразие и $\xi=fx$, $x\in V^{n-1}$, $\xi\in\Pi^n$ — локально топологическое отображение V^{n-1} в Π^n. Образ $\Phi^{n-1}=fV^{n-1}$ называется локально выпуклым (или рода два) в строгом смысле, если можно указать такую окрестность U_x каждой точки $x\in V^{n-1}$ в которой f взаимно однозначно и, кроме того, каждая прямая в Π^n имеет не более двух общих точек с образом fU_x. Тогда fU_x есть кусок строго выпуклой гиперповерхности в обычном смысле. При этих условиях автор показывает, что V^{n-1} есть сфера, а ее образ Φ^{n-1} глобально выпуклый, т. е. представляет собой границу выпуклой области. Автор дает два доказательства этого предложения. Перечисленные

выше понятия и факты тесно связаны с глобальной теорией римановых многообразий. Э. Г. Позняк

10472. Относительно теоремы Фенхеля о полной кривизне замкнутой кривой. Цудзи (On a theorem of Fenchel on the total curvature of a closed curve. Tsuji Masatsugu), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1957, **6**, № 1, 29—32 (англ.)

Теорема Фенхеля гласит, что для замкнутой пространственной кривой γ с кривизной $k(s)$ (s — дуга)

$$\int K(s)\,ds \geqslant 2\pi,$$

причем равенство достигается только для плоских кривых. Автор выводит эту теорему как следствие соответствующей теоремы для замкнутых ломаных: если α_i — внешние углы замкнутой ломаной, то $\sum \alpha_i \geqslant 2\pi$. Доказательство теоремы для ломаных основано на том, что при замене двух смежных звеньев ломаной $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} одним звеном $A_{i-1}A_{i+1}$ $\Sigma\alpha_i$ не возрастает. А. В. Погорелов

10473. Оценка длины замкнутой геодезической на выпуклой поверхности. Топоногов В. А., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 2, 282—284

Доказываются теоремы: 1. Длина замкнутой без самопересечений геодезической на замкнутой поверхности R_k кривизны не меньше $k>0$ не превосходит $2\pi/\sqrt{k}$. 2. Если в R_k существует замкнутая без самопересечений геодезическая длины $2\pi/\sqrt{k}$, то R_k—сфера радиуса $1/\sqrt{k}$.

Доказательство основано на лемме: Периметр замкнутого выпуклого многоугольника M на R_k не больше $2\pi/\sqrt{k}$. Для доказательства леммы одна из вершин многоугольника M соединяется геодезическими диагоналями с остальными вершинами и таким образом M разбивается на треугольники Δ. На сфере радиуса $1/\sqrt{k}$ строятся треугольники Δ' с теми же сторонами, что и Δ. Из треугольников Δ' составляется многоугольник M' подобно тому, как из Δ составлен M. Многоугольник M' имеет тот же периметр, что и M, и является выпуклым. Следовательно, его периметр не больше $2\pi/\sqrt{k}$. А. В. Погорелов

См. также: 9841, 9879.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

10474. Численный метод решения дифференциальных уравнений первого порядка. Уоллес (A numerical method of solving first order differential equations. Wallace D. A. T.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 310—314 (англ.)

Элементарное изложение методики применения формул типа „счет-пересчет“ (РЖМат, 1956, 1340К), доставляющих погрешность $O(h^3)$, для численного решения уравнения $y'=f(x, y)$. В. К. Саульев

10475. Замечание о границе применимости теоремы о дифференциальных неравенствах. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 12, 42—43

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} - f[x, y] = 0 \qquad (1)$$

с условиями

$$y^{(k)}(a) = y_0^{(k)} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1). \qquad (2)$$

Относительно функции $f[x, y]=f(x, y, y', \ldots, y^{(r)})$ ($r \leqslant n-1$) предполагается, что она непрерывна в) области $G: a \leqslant x \leqslant b$, $a_k \leqslant y^{(k)} \leqslant b_k$ ($k=0, 1, \ldots, r$) и, кроме того, для любой пары функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, удовлетворяющих на промежутке $[a, b]$ неравенствам $a_k \leqslant y_1^{(k)} \leqslant y_2^{(k)} \leqslant b_k$, выполняется неравенство

$$f[x, y_2] - f[x, y_1] \leqslant \sum_{k=0}^{r} p_k(x)\,(y_2^{(k)} - y_1^{(k)}),$$

где $p_k(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции (условие L_2). Пусть x_c^i и $\overline{x}_c^i$ — границы применимости теоремы о дифференциальных неравенствах i-го порядка для уравнения (1) и для уравнения $y^{(n)} - \sum_{k=0}^{r} p_k(x)\,y^{(k)} = 0$ с начальными разностями $c_k \geqslant 0$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$). В работе доказывается, что отрезок $[a, x_c^i]$ ($i \geqslant r$) содержится в отрезке $[a, \overline{x}_c^i]$. Б. Н. Бабкин

10476. Способ уменьшения погрешности метода Рунге—Кутта. Фелберг (Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge—Kutta Verfahren. Fehlberg Erwin), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 11-12, 421—426 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Благодаря преобразованию исходного дифференциального уравнения интегрирование дифференциального уравнения можно провести с большей точностью, чем по обычному методу Рунге — Кутта, или при помощи формул Рунге — Кутта — Цурмюля.

В первой части подробно рассмотрен случай дифференциального уравнения 1-го порядка. Исходное уравнение преобразовывается, на решение вновь полученного дифференциального уравнения накладывается ряд условий, благодаря которым существенно упрощаются уравнения, которые необходимо решить для получения констант процедуры Рунге — Кутта. Решение получается с точностью до h^6 включительно. Для получения такой точности необходимо только 3 подстановки. В качестве примера рассмотрено интегрирование дифференциального уравнения $y'=y^2/x$. Для трех значений x приведено: точное решение, решение методом Рунге — Кутта четвертого порядка, методом Рунге — Кутта шестого порядка, а также вновь полученным методом.

Во второй части полученные результаты распространяются на случай уравнения n-го порядка. Выписаны формулы для $n=2$, 3, 4. Новые формулы (по-прежнему необходимо 3 подстановки) доставляют для самого решения точность на 2 степени h, а для производных от решений на одну степень h большую, чем формулы Рунге — Кутта — Цурмюля.

Описанный метод преобразования можно применять лишь в дифференциальных уравнениях с аналитически заданной правой частью, так как в вычислениях фигурируют частные производные правой части.

Ю. А. Шахов

10477. О скорости сходимости метода итерации численного решения уравнения эллиптического типа. Юань Чжао-дин, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 224—231

Рассматриваются две итерационных схемы для решения разностного уравнения

$$L_h u_h(x) + f(x) = 0 \qquad (x \in Q_h); \qquad (1)$$

$$u_h(x) = \varphi_h(x) \qquad (x \in \Gamma_h), \qquad (2)$$

аппроксимирующего краевую задачу для эллиптического уравнения

$$Lu(x) + f(x) = 0 \qquad (x \in Q);$$
$$u(x) = \varphi(x) \qquad (x \in \Gamma).$$

Здесь Q—m-мерная область с границей Γ, а Q_h и Γ_h — соответствующие сеточная область и ее граница. Предполагается, что разностный оператор L_h самосопряженный и определенный, а нижняя (по модулю) Λ_1 и верхняя (по модулю) Λ границы его собственных значений удовлетворяют соотношениям $\Lambda = ah^{-2} + O(1)$, $\Lambda_1 = a_1 + O(h^{-2})$ (эти условия практически почти всегда выполняются).

Первая итерационная схема. За приближенное решение $u_h(x)$ системы (1), (2) принимается функция

$$\bar{u}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_h^{(k)}(x),$$

где функции $u_h^{(k)}$ определяются из соотношения

$$u_h^{(k)}(x) = (2 + \tau^2 L_h)\, u_h^{(k-1)}(x) - u_h^{(k-2)}(x) + \tau^2 f(x)$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n),$$

$u_h^{(0)}(x) = u_h^{(1)}(x)$ — произвольно на Q_h, а $\tau^2 = 4(\Lambda + \Lambda_1)^{-1}$.

Как отмечает автор, более выгодно выбирать $n = n_0 = [e(\Lambda + \Lambda_1)/2\sqrt{\Lambda\Lambda_1}] + 1$ и принимать $\frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n_0} u_h^{(k)}(x)$ за новое $u_h^{(0)}(x)$, повторяя процесс до получения желаемой точности. Чтобы уменьшить по норме начальную погрешность в $1/\varepsilon$ раз, достаточно совершить $\sim e\sqrt{a}\,|\ln\varepsilon|/(2\sqrt{a_1}h)$ элементарных итераций.

Вторая итерационная схема.

$$u_h^{(1)}(x) = (1 + \tfrac{1}{2}\tau^2 L_h) u_h^{(0)}(x) + \tfrac{1}{2}\tau^2 f(x)$$

$u_h^{(0)}$ — произвольно на Q_h.

$$u_h^{(k)}(x) = (1 + \alpha\tau)^{-1}[(2 + \tau^2 L_h)\, u_h^{(k-1)}(x) -$$
$$- (1 - \alpha\tau)\, u_h^{(k-2)}(x) + \tau^2 f(x) \quad (k = 2, \ldots, n),$$

где $\alpha = (1 - c)\,\Lambda\Lambda_1(\Lambda + \Lambda_1)^{-1}$, $(0 < c < 1)$, а c — корень уравнения $2(c - 1) = c(\ln c + 2\ln\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

Число итераций так же, как в случае первой итерационной схемы, $O\left(\frac{1}{h}\right)$ (точнее $\sim\left(\sqrt{(1-c)\,a_1/a}\right)/(2ch)$.

В. К. Саульев

10478. Один пример численного интегрирования дифференциального уравнения упругих колебаний балки переменного сечения. Наерлович (Један пример нумеричког интеграљења диференцијалне једначине осцилација греде променљивог пресека. Наерлович Наталија), Зб. Грађевинског фак. Ун-т Београду, 1958, № 3, 19—24 (сербо-хорв.; рез. русск.)

Разработан один метод для вычисления вынужденных упругих колебаний балки переменного сечения. Этот метод основывается на замене интегрального уравнения колебаний системой линейных алгебраических уравнений упругих колебаний корпуса корабля.

Из резюме автора

10479. Расчет кольцевых сверхзвуковых сопел и диффузоров. Кацкова О. Н., Вычисл. математика, сб. 3, 1958, 111—129

Решается задача истечения газа из кольцевого сопла со звуковой скоростью.

Требуется проинтегрировать систему двух нелинейных уравнений: неразрывности и отсутствия вихря, с соответствующими граничными условиями. В качестве новых искомых функций автор выбирает угол Маха и угол наклона скорости. За независимые переменные выбираются такие z и χ, что $z = \text{const}$ дают линию тока, а $\chi = \text{const}$ — характеристики первого семейства. В окрестности звуковой линии решение ищется в виде степенных рядов, а дальше — методом характеристик.

Приведены графики и таблицы расчетов кольцевых сопел.

Я. И. Алихашкин

10480. Расчет обтекания произвольного профиля и тела вращения в дозвуковом потоке газа (симметричный случай). Чушкин П. И., Вычисл. математика, сб. 3, 1958, 99—110

Рассматривается численный метод расчета дозвукового обтекания произвольного симметричного профиля и тела вращения при нулевом угле атаки. Задача заключается в интегрировании системы двух нелинейных уравнений в частных производных эллиптического типа (уравнение неразрывности и уравнение отсутствия вихря) при краевых условиях на поверхности обтекаемого тела и на бесконечности.

Решение ведется приближениями. Применяются переменные $t = e^{-\xi}$, η, где ξ, η — эллиптические координаты. В N-м приближении в области течения между заданным контуром тела $t = t_1(\xi)$ и бесконечностью $t = 0$ вводятся линии

$$t_n(\xi) = \frac{N + 1 - n}{N}\, t_1(\xi) \quad (n = 2, 3, \ldots, N).$$

Интегрируя систему по t от $t = t_0 = 0$ до $t = t_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$, автор получает систему $2N$ интегральных соотношений. Подынтегральные функции аппроксимируются полиномами по степеням t, причем за узлы интерполяции принимаются указанные выше линии. Тогда задача приближенно сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной η; система численно интегрируется на машине БЭСМ. В приведенных примерах расчетов (обтекание профиля Жуковского и эллипсоида) практически требуемая точность получается уже при $N = 2$.

Я. И. Алихашкин

10481. Расчет обтекания кругового цилиндра с отошедшей ударной волной. Белоцерковский О. М., Вычисл. математика, сб. 3., 1958, 149—185

Задача заключается в интегрировании нелинейной системы уравнений: движения, неразрывности и энергии (условие адиабатичности) с граничными условиями на поверхности цилиндра и на отошедшей ударной волне (форма и положение волны заранее неизвестны, автором решается прямая задача). Расчет течения газа требуется провести в области, ограниченной ударной волной, осью симметрии, поверхностью тела и первой граничной характеристикой, проходящей между волной и телом (в поле).

Используются полярные координаты r и ϑ. Исходная система заменяется аппроксимирующей системой, для чего между телом и волной проводятся $N - 1$ равноотстоящих вдоль r линий, разбивающих область интегрирования на N полос. Интегрируя уравнение движения и уравнение неразрывности от поверхности тела до границы каждой из полос, автор получает $2N$ интегральных соотношений. Подынтегральные функции заменяются интерполяционными полиномами по r, причем за узлы интерполяции берутся границы полос. Автор получает систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной ϑ, которая интегрируется численно.

Все граничные условия задачи выполняются при этом точно. Данная задача относится к задачам смешанного типа, когда по одну сторону от звуковой линии — уравнения эллиптического типа, а по другую —

гиперболического. Это отразилось на аппроксимирующей системе в том, что в окрестности звуковой линии N уравнений системы имеют N подвижных особых точек, и требование непрерывности решения в этих точках поставило N специальных условий, выполнение которых обеспечило единственность решения задачи.

В работе приведены: 1) расчетные схемы для случая обтекания кругового цилиндра, 2) результаты расчетов для чисел Маха $M=2,\ 3,0;\ 4,0;\ 5,0;\ (N=1, 2, 3), 3)$ подробные таблицы основных гидродинамических элементов течения в поле и на ударной волне с интервалами по углу $\Delta\vartheta=3,5°$.

Данные расчетов дают возможность построить картину давления на поверхности и вне тела, звуковую линию, характеристики, положение и форму ударной волны и т. д. Метод показывает хорошую сходимость уже при $N=2$ и $N=3$, что иллюстрируется на графиках. Я. И. Алихашкин

10482. **Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики.** **Дородницын А. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 3, М., АН СССР, 1958, 447—453

В вычислительном центре АН СССР были просчитаны на электронной вычислительной машине ряд аэрогидродинамических задач (реф. 10480, 10481) при помощи метода сведения системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод был применен в следующей форме. „Пусть в некоторой прямоугольной области $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$, которая в частных случаях может обращаться в полосу $(a = -\infty,\ b = +\infty)$ или полуполосу $(b = \infty)$, задана система уравнений „дивергентного" вида

$$\frac{\partial P_i(x,\ y;\ u_1, \ldots, u_m)}{\partial x} + \frac{\partial Q_i(x,\ y;\ u_1, \ldots, u_m)}{\partial y} = F_i(x,\ y;\ u_1, \ldots, u_m) \quad (i = 1,2, \ldots, m). \tag{1}$$

Разобьем область на N полос прямыми $y = y_0 = c,\ y = y_1, \ldots,\ y = y_n, \ldots,\ y = y_N = d$ и проинтегрируем каждое из уравнений системы (1) поперек каждой полосы. Получим при этом систему интегральных соотношений

$$\frac{d}{dx}\int_{y_n}^{y_{n+1}} P_i dy + Q_{i,n+1} - Q_{i,n} = \int_{y_n}^{y_{n+1}} F_i dy \quad (i = 1,2, \ldots, m;\ \ n = 0,1, \ldots, N-1). \tag{2}$$

Здесь $Q_{i,n}$ — значение функции Q_i на линии $y = y_n$. Если теперь к функциям P_i и F_i применить какую-либо интерполяционную формулу, выражающую значение этих функций при любом y через значения их на линиях $y = y_n$, то каждый из интегралов, входящих в систему (2), представляется в виде

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} P_i dy = (d-c)\sum_{k=0}^{N} A_{n,k} P_{i,k}, \tag{3}$$

где $A_{n,k}$ — некоторые константы, зависящие от вида интерполяционной формулы. Подстановка вместо интегралов их приближенных выражений (3) переводит систему интегральных соотношений (2) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $u_{i,n}$. Вместе с граничными условиями

при $y = c\ \varphi_\nu(x, u_1, \ldots, u_m) = 0 \quad (\nu = 1,2, \ldots, \alpha)$,

при $y = d\ \varphi_\nu(x, u_1, \ldots, u_m) = 0 \quad (\nu = \alpha+1, \alpha+2, \ldots, m)$

эта система будет иметь число неизвестных равным как раз числу уравнений". В. К. Саульев

10483. **Линейные вычисления в комплексном поле.** **Шмидтмайер** (Linear computations over a complex field. Schmidtmayer Josef), J. Roy. Aeronaut. Soc., 1958, 62, № 570, 451—455 (англ.)

Рассматриваются две формы записи для решения трех задач линейной алгебры с комплексными коэффициентами: решение систем алгебраических уравнений, обращение матрицы и вычисления определителя.

Первый способ использует приведение системы n уравнений с комплексными коэффициентами и неизвестными к системе $2n$ уравнений с вещественными коэффициентами и неизвестными.

Вторая форма, приспособленная для использования в машинах, основана на записи комплексного числа в виде

$$z = x + iy = \begin{bmatrix} x, & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Обе формы предусматривают обычные контроли методов линейной алгебры. К. Е. Чернин

10484. **О сходимости обобщенного метода Зейделя для решения систем линейных уравнений.** **Фидлер, Птак** (Über die Konvergenz des verallgemeinerten Seidelschen Verfahrens zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen. Fiedler Miroslav, Pták Vlastimil), Math. Nachr., 1956, 15, № 1, 31—38 (нем.)

Систему линейных алгебраических уравнений

$$x = Ax + y \tag{1}$$

авторы записывают в эквивалентной форме. Применяя к последней метод итераций, авторы для решения системы (1) получают следующий „обобщенный метод Зейделя, принадлежащий матрице B"

$$(E - B)\,x^{(n+1)} = (A - B)\,x^{(n)} + y\,. \tag{2}$$

Метод (2) выгодно применять в тех случаях, когда легко определяется обратная матрица $(E - B)^{-1}$.

Авторы подробно исследуют влияние выбора матрицы B на скорость сходимости итерационного процесса (2). При этом оказывается, что итерационные процессы (2) при различных выборах матрицы B в некотором смысле сравнимы. И. Ф. Шелихова

10485. **Численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений.** **Горнштейн М. С.**, Докл. АН СССР, 1957, 115, № 3, 434—437

Пусть простой корень Z уравнения $f(z) = 0$ лежит в области $|z - \zeta| < \rho$, где $f(z)$ — регулярная функция комплексного переменного. Обозначив

$$\frac{f^{(s)}(\zeta)}{s!} = f_s \text{ и } \begin{vmatrix} f_1 & f_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ f_2 & f_1 & f_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & \ldots & & \\ \ldots & & & \ldots & & \\ f_n & f_{n-1} & f_{n-2} & \ldots & f_1 & f_0 \\ f_{n+1} & f_n & f_{n-1} & \ldots & f_2 & f_1 \end{vmatrix} = g_n\,,$$

автор называет z_n, получаемое по известной формуле $z_n = \zeta - \frac{f_0 g_{n-1}}{g_n}$, приближением n-го порядка при исходном приближении ζ (способ Ньютона дает приближение нулевого порядка); рассматривается также приближение к искомому корню с помощью последовательности

$$z_{n_1},\ z_{n_1 n_2},\ z_{n_1 n_2 n_3}, \ldots, \tag{1}$$

где $z_{n_1 n_2 \ldots n_m}$ есть приближение порядка n_m при исходном приближении $z_{n_1 n_2 \ldots n_{m-1}}$.

Даны условия $\left(\left|\frac{f_0}{f_1}\right| < 3 - 2\sqrt{2}\right.$ достаточная ма-

лость ρ, ограниченность последовательности $|f_s|$), обеспечивающие сходимость к искомому корню последовательности z_n (при $z \to \infty$) и последовательности (1), и даны оценки для $|Z - z_n|$ и $|Z - z_{n,n_2,\ldots,n_m}|$.

А. П. Доморяд

10486. Решение уравнений с помощью специального интерполяционного процесса. Опиц (Gleichungsauflösung mittels einer speziellen Interpolation. Opitz Günter), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 7-8, 276—277 (нем.)

Пусть a простой корень уравнения $f(x) = 0$, лежащий в интервале I, где производные функции $f(x)$ достаточно высоких порядков непрерывны и не обращаются в нуль. Вместо $f(x)$ берется функция $\overline{f}(x) = \frac{\overline{a} - x}{P_{n-1}(x)}$, где $\overline{a}$ и коэффициенты многочлена $P_{n-1}(x)$ подчинены условиям

$$\overline{f}(x_k) = f(x_k) \quad (k = \overline{0, n})$$

или

$$P_{n-1}(x) = \frac{\overline{a} - x_k}{f(x_k)} \tag{1}$$

(x_k — некоторые точки интервала I).

Обозначим разделенные разности $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]$ функции $\frac{1}{f(x)}$ через $[j, k]$ $\left([k, k] = \frac{1}{f(x)}\right)$; из (1) имеем $0 = (\overline{a} - x_n)[0, n] - [0, n-1]$, что приводит к рекуррентному соотношению

$$x_{n+1} = x_n + \frac{[0, n-1]}{[0, n]}. \tag{2}$$

При исходных x_0 и x_1 и $n = 1(2)$ соответствует способу линейной интерполяции. Заменяя в соотношении (2) нуль на $n - p$, получим формулу, в которой для вычисления x_{n+1} используются значения функции $\frac{1}{f(x)}$ в $p+1$ предшествующих точках. Рассмотрен пример и отмечена возможность некоторых обобщений описанного способа, в частности, возможность выделения множителей второй и высших степеней. А. П. Доморяд

10487. Три приближенных метода для нахождения корней уравнений с любой точностью. Баучер (Three approximation methods for finding roots of equations to any desired accuracy. Boucher Raymond C.), Mach. Design, 1958, **30**, № 16, 125—127 (англ.)

Кроме двух не отличающихся по существу друг от друга вариантов известного способа линейной интерполяции приближенного решения уравнения

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

даны формулы, соответствующие довольно громоздкому способу приближения к корню уравнения (1), заключенному в интервале (a, b).

Сущность способа (в геометрической форме) такова: сначала ищется точка I пересечения касательных к кривой $y = f(x)$ в точках $A[a, f(a)]$ и $B[b, f(b)]$, а затем абсцисса a_1 точки пересечения секущей AB с прямой, соединяющей I с точкой $C[0, f(b)]$ (совершенно непонятен выбор абсциссы точки C). Исправлять a_1 автор рекомендует дальше по способу Ньютона.

А. П. Доморяд

10488. Теорема Тейлора и метод Ньютона. Паркер (Taylor's theorem and Newton's method. Parker F. D.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 1, 51 (англ.)

Если в разложении функции $f(x)$ в окрестности точки $x = x_1$ в ряд Тейлора оставить только два члена ($f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$), то, полагая $f(x) = 0$, получим хорошо известный метод Ньютона. Автор предлагает оставлять в разложении Тейлора три члена. Это доставляет более точное, чем в случае метода Ньютона, приближение к искомому корню уравнения $f(x) = 0$:

$$x = x_1 - \frac{f'(x_1) \pm \{[f'(x_1)]^2 - 2f(x_1)f''(x_1)\}^{1/2}}{f''(x_1)}$$

В. К. Саульев

10489. Симметрические компоненты для определения корней кубического уравнения. Штир (Symmetrische Komponenten zur Bestimmung der Wurzeln der kubischen Gleichung. Stier F.), Arch. Elektrotechnik, 1958, **44**, № 1, 49—52 (нем.)

Для уравнения $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ выводятся известные формулы

$$x_1 = y_1 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i} + y_2 e^{\frac{2\pi}{3}i} + y_3$$

$$x_2 = y_1 \cdot b^{\frac{2\pi i}{3}} + y_2 e^{-\frac{2\pi i}{3}} + y_3,$$

$$x_3 = y_1 + y_2 + y_3,$$

где корни уравнения зависят от „симметрических компонент" y_1, y_2, y_3 (y_1, y_2 — сложные радикалы, выражающиеся известным образом через коэффициенты уравнения, а $y_3 = -\frac{a_2}{3}$).

А. П. Доморяд

10490. О методе Уиттекера для решения уравнений. Фридман А. А., Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1956, **13**, 324—327

Доказывается теорема, обобщающая метод Уиттекера определения наименьшего по абсолютной величине корня на любую аналитическую функцию. Приводятся рекуррентные соотношения, позволяющие значительно упростить вычисления. К. Е. Чернин

10491. Замечание о решении нелинейных совместных уравнений методом последовательных приближений. Гуди (Note on the solution of non-linear simultaneous equations by successive approximations. Goodey W. J.), J. Roy. Aeronaut. Soc., 1958, **62**, № 572, 603—604 (англ.)

Описывается модифицированный метод Ньютона решения нелинейных совместных уравнений (алгебраических и трансцендентных). Оценки скорости сходимости и интервала существования и единственности решения уравнений отсутствуют. К. Е. Чернин

10492. Некоторые графические методы определения корней алгебраических уравнений. Шмагел (Některé grafické metody stanovení kořenů algebraických rovnic. Šmahel Josef), Slaboproudý obzor, 1958, **19**, № 12, 864—865 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Автор останавливается на методе Рунге для определения комплексных корней алгебраических уравнений в плоскости Гаусса и на его специальном случае определения вещественных корней при помощи ортогона Лилла. Далее автор рассматривает определение вещественных корней уравнения четвертой степени при помощи x-ых координат пересечения неподвижной параболы с окружностью и определение комплексно-сопряженных корней уравнения $z^4 + pz^2 + z + q = 0$ при помощи координат x и y пересечения линий p и q сопряженной номограммы пересечений. Резюме автора

10493. Графики функций Кулона. Шарп, Гов, Пол (Graphs of Coulomb functions. Sharp W. T., Gove H. E., Paul E. B. Rept, Atomic Energy Canada, Ltd, Chalk River, Ont., 1955, № TPI-70 1953, ix, 58 pp.) (англ.)

Авторы полагают

$$A_{L^2} = F_{L^2} + G_{L^2}, \quad B_{L^2} = F_{L'^2} + G_{L'^2},$$

$$\Phi_L = \tan^{-1}\frac{F_L}{G_L}, \qquad \Psi_L = \sum_{m=1}^{L} \tan^{-1}\frac{\eta}{m},$$

где $F_L(\rho, \eta)$ и $G_L(\rho, \eta)$ — волновые функции Кулона, и приводят графики функций A_{L^2}, B_{L^2}, Φ_L и Ψ_L для $L = 0(1)4$, различных значений ρ и $\log\eta = -0{,}8(0{,}1)0{,}6$ с небольшими дополнительными графиками функций, важных в квантовой механике. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 1013.

10494. О графическом решении дифференциальных уравнений с частными производными. Никодемус (Parciális differenciálegyenletek grafikus megoldásáról. Nikodémusz Antal), Nehézipari műsz. egyet. közl., 1957, № 1, 309—316 (венг.)

10495. Решение системы линейных уравнений строительной механики способом графической итерации. Гамбино-Амато (Risolúzione per iterazione grafica dei sistemi di equazioni lineari della scienza delle costruzioni. Gambino Amato R.), Cemento, 1958, 55, № 10, 7—11 (итал.)

Система из n диагональных линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum a_{ij}x_j = K_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. таких, в каждом из которых коэффициент при одном из неизвестных по абсолютной величине не меньше суммы абсолютных величин остальных коэффициентов, решается методом итерации Гаусса — Зейделя, причем необходимые вычисления осуществляются графически при помощи веревочных многоугольников.

Число веревочных многоугольников, которые должны быть построены, равно произведению из числа неизвестных на число итераций, но число полюсов и соответствующих пучков лучей равно числу неизвестных.

Рассмотрен числовой пример решения системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

А. Б. Штыкан

10496. Построение траекторий некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с помощью номографирования. Табуева В. А., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 80—90

Излагается номографический метод расчета траекторий системы линейных дифференциальных уравнений (a и c — постоянные коэффициенты)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ay - cx, \qquad (1)$$

служащей в качестве системы сравнения (при двух значениях c для дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ay - f(x),$$

где $f(x)$ — периодическая, с периодом 2π, функция $f(0) = 0$, $xf(x) > 0$ в окрестности $x = 0$.

Если характеристическое уравнение $k^2 + ak + c = 0$ имеет действительные и различные корни k_1 и k_2, то решение уравнения $\frac{dy}{dx} = -a - \frac{cx}{y}$ запишется в виде

$$\frac{(y - k_1x)^{k_1}}{(y - k_2x)^{k_2}} = c_0, \qquad (2)$$

где c_0 определяется начальными условиями.

Если характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $k_1 = -r + iq$, $k_2 = -r - iq$, где $r > 0$ и $q > 0$, то решение системы (1) запишется в виде

$$x = e^{-rt}(c_1\cos qt + c_2\sin qt), \quad y = e^{-rt}(c_3\cos qt + c_4\sin qt), \qquad (3)$$

где $c_3 = -rc_1 + qc_2$, $c_4 = -qc_1 - rc_2$.

Уравнение (2) после замены

$$n_1 = \frac{\ln c_0}{k_1}, \quad n_2 = \frac{\ln c_0}{k_2}, \quad Y = y + \frac{a}{2}x, \quad m = x\sqrt{\frac{a^2}{4} - c}$$

преобразуется к номографируемому виду

$$\begin{vmatrix} 0 & n_1 & 1 \\ n_2 & 0 & 1 \\ -\ln(Y+m) & \ln(Y-m) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приведена схема номограммы.

Вместо уравнений (3) рассматривается одно уравнение

$$z = e^{-rt}(A\cos qt + B\sin qt).$$

Это уравнение после замены

$$n_1 = \frac{e^{-rt}}{A}, \quad n_2 = \frac{e^{-rt}}{B}, \quad \gamma = qt$$

приводится к номографируемому виду

$$\begin{vmatrix} 0 & n_1 & 1 \\ n_2 & 0 & 1 \\ \dfrac{\sin\gamma}{z} & \dfrac{\cos\gamma}{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приведена схема номограммы.

Указывается на целесообразность номографирования некоторых формул для вспомогательных переменных. В качестве примера приведена оценка сепаратриссы, входящей в $(\pi\ 0)$ на промежутке $(-\pi, \pi)$, для системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -3y - 2\sin x.$$

Библ. 6 назв. Г. С. Хованский

10497. Номографическое изображение некоторых отношений с шестью переменными при помощи комбинированной номограммы с унарным полем. Штепанский (Nomografické zobrazení některých vztahů o šesti proměnných kombinovanými spojnicovými nomogramy s unárním polem. Štěpánský Václav), Sbor. vědec. prací Vysoké školy báňské Ostravě, 1958, **4**, № 5, 441—447 (чешск.; рез. русск., нем.)

Автор указывает на возможность использования его теории номограмм с унарными полями для номографического изображения отношений с шестью переменными, имеющих следующий канонический вид

$$\frac{f_1(x) + f_2(y)}{g_4(t) + g_5(u)} = \frac{f_3(f)}{g_6(v)}.$$

Резюме автора

10498. Об оценке погрешности вычисления по номограммам из выравненных точек и о наилучшем их преобразовании. Пентковский М. В., Тр. Сектора матем. и механ. АН КазССР, 1958, **1**, 62—70

Пусть дана номограмма из выравненных точек для уравнения

$$F(u, v, w) = 0, \qquad (1)$$

построенная в заданной области G изменения переменных u, v и w. Переменное w является ответным. Уравнения шкал номограммы:

$$s = s_1(u), \quad s = s_2(v), \quad s = s_3(w),$$

где s — длина дуги носителя шкалы. Тогда для абсолютной погрешности ответа, найденного по номограмме при значениях u_0 и v_0, имеет место следующая оценка:

$$|\Delta w_0| \leqslant \left[\left|\frac{\partial w_0}{\partial u}\right| \frac{1}{|s_1'(u_0)|} + \left|\frac{\partial w_0}{\partial v}\right| \frac{1}{|s_2'(v_0)|}\right]\varepsilon + \frac{\varepsilon_3}{|s_3'(w_0)|} = \delta(w_0),$$

где ε — геометрическая погрешность в определении положения точек на шкалах заданных величин (вызванная погрешностью интерполяции и погрешностью проведения разрешающей прямой), ε_3 — геометрическая погрешность прочтения ответа (вызванная ошибкой в нахождении точки пересечения разрешающей прямой с носителем ответной шкалы и ошибкой интерполяции). Предполагается, что величины ε и ε_3 не зависят от размеров номограмм и могут быть найдены экспериментальным путем.

Для оценки погрешности, которую может дать номограмма уравнения (1) в области G, находят верхнюю грань $\left|\frac{\delta(w)}{\varphi(w)}\right|$, где вид функции $\varphi(w)$ зависит от принятого способа оценки погрешности (обычно $\varphi(w)=1$ или $\varphi(w)=w$):

$$\delta = \sup\left|\frac{\delta(w)}{\varphi(w)}\right|. \qquad (2)$$

Введены понятия наилучшей и допустимой номограмм. Наилучшей (допустимой) номограммой уравнения (1) в области G при заданном способе оценки погрешности называется та, для которой условие — величина δ по (2) не превышает допустимую погрешность — достигается при меньших (практически приемлемых) размерах чертежа.

Отмечается неточность сделанного ранее утверждения (Пентковский М. В. Номография, ГИТИ, 1949) о том, что ответную шкалу нужно всегда располагать между шкалами заданных величин.

Рассмотрено в качестве примера решение частной задачи о наилучшей номограмме с тремя параллельными шкалами. При решении последней задачи сделано допущение, что $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} > 1$. Г. С. Хованский

10499. Номографический расчет высокочастотных параметров полупроводниковых триодов по методу переходных характеристик. Шеров-Игнатьев Г. П., Радиотехника, 1958, **13**, № 10, 45—50

Дана методика определения параметров аппроксимирующей функции переходных характеристик полупроводниковых триодов. Для расчета по полученным параметрам граничной частоты, фазового сдвига на граничной частоте и высокочастотных параметров эквивалентной схемы триода построены две составные номограммы из выравненных точек с параллельными шкалами. Г. С. Хованский

10500. Номограмма для расчета собственных частот. Макдафф, Фелгар (Nomogramm zur Berechnung von Eigenschwingungszahlen. Macduff J., Felgar R.), Konstruktion, 1958, **10**, № 7, 261—264 **(нем.)**

Таблицы и номограмма из выравненных точек с параллельными шкалами для расчета собственных частот стержней, пластин и мембран. В основу номограммы положены формулы

$$f = C_i/L^2,\ f = Ch/a^2,\ f = Ch/r^2,$$

где f — собственная частота, C — числовой коэффициент, определенный по одной из приведенных таблиц, L — длина стержня, i — радиус инерции, h — толщина пластины или мембраны, a — длина одной из сторон пластины, r — радиус мембраны. Г. С. Хованский

10501. Малые проективные преобразования номограммы. Пентковский М. В., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 5, 805—806

Найдены условия, при которых номограмма из выравненных точек для зависимости с тремя переменными должна быть построена с одинаково растянутыми вдоль рамки чертежа шкалами заданных величин.

Концы одной из шкал номограммы помещаются в точки (0; 0) и (0; 1), концы второй шкалы в точки (1; 0) и (1; 1). Предполагается, что номограмма целиком лежит между прямыми $y=0$ и $y=1$. Далее рассматривается проективное преобразование, при котором точка (1; 1) переходит в точку (1; 1—α), а остальные три точки остаются инвариантными. В предположении, что $\alpha > 0$ и достаточно мало, получено следующее дифференциальное уравнение линий $ds = \text{const}$:

$$xy'^2 + yy' + 2x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Приведен чертеж семейства интегральных линий уравнения (1) внутри единичного квадрата. Линейный элемент ds, взятый на одной из этих линий при выбранном проективном преобразовании не сжимается и не растягивается. Область существования решений уравнения (1) ограничена гиперболой $y^2 - 4x(2x-1) = 0$ (в этом уравнении в статье опечатка). Через каждую точку внутри области проходят две кривые. Если k_1 и k_2 — их угловые коэффициенты, то для направлений с угловым коэффициентом k будет растяжение, если $k_1 > k > k_2$, и будет сжатие, если $k > k_1$ или $k < k_2$. Для точек вне области существования решения в любом направлении будет сжатие.

Если элементы шкал номограммы при выполнении данного преобразования оказываются в областях сжатия, то преобразование ухудшает номограмму. Приведен пример. Г. С. Хованский

10502. Номографический расчет тарельчатых пружин. Хейнце (Die nomographische Berechnung von Tellerfedern. Heinze W.), Konstruktion, 1958, **10**, № 7, 265—269 (нем.)

Расчетные зависимости после преобразований приводятся к виду

$$P_1 = \frac{f}{h}\left[\left(\frac{h}{s}\right)^2\left(1-\frac{f}{h}\right)\left(2-\frac{f}{h}\right)+2\right], \qquad (1)$$

$$P = \frac{Es^4}{3\left(1-\frac{1}{m^2}\right)} \cdot \frac{\frac{h}{s}\cdot\pi\left(\frac{D_a}{D_i}\right)^2 \ln\frac{D_a}{D_i}}{D_a^2\left(\frac{D_a}{D_i}-1\right)^2} \cdot P_1, \qquad (2)$$

$$K_2 = \frac{\frac{(D_a/D_i-1)\cdot\ln(D_a/D_i)}{D_a/D_i-1-\ln(D_a/D_i)} + \frac{h}{s}\left(2-\frac{f}{h}\right)}{2+\left(\frac{h}{s}\right)^2\left(1-\frac{f}{h}\right)\left(2-\frac{f}{h}\right)}, \qquad (3)$$

$$\sigma = \frac{P}{s^2} \cdot \frac{6\left(\frac{D_a}{D_i}-1-\ln\frac{D_a}{D_i}\right)}{\pi\left(\ln\frac{D_a}{D_i}\right)^2} \cdot K_2. \qquad (4)$$

Формула (1) представлена номограммой из выравненных точек прямолинейными шкалами h/s и P_1 и криволинейной шкалой f/h.

Для формулы (2) построена номограмма в виде счетной линейки с двумя движками. На корпусе и движках нанесены шкалы s, D_a, h/s, D_a/D_i, P_1, P. При построении номограммы величины E и m приняты постоянными.

Для формулы (3) построена номограмма из выравненных точек с параллельными шкалами D_a/D_l и K_2 и бинарным полем (f/h, h/s).

Формула (4) представлена номограммой в виде счетной линейки с двумя движками. На корпусе и движках построены шкалы s, D_a/D_l, σ, K_2, P. Детально изложена методика конструирования номограмм. Приведены уравнения элементов номограмм для формул (1) и (3). Г. С. Хованский

10503. Построение областей устойчивости и линий равных запасов по фазе и амплитуде при помощи номограмм для систем автоматического регулирования. Кислов Б. Д., Автоматика и телемеханика, 1955, 16, № 6, 508—529

Имеется серия сетчатых номограмм, состоящих из четырех семейств помеченных линий, для расчетов, указанных в заглавии. Детально рассмотрен вывод подлежащих номографированию формул и приведен метод их номографирования. Номограммы используются для выбора решений и исследования. Ряд задач решается путем нанесения на кальку некоторых характеристик и их последующего наложения на одну из сетчатых номограмм.

Примечание референта. Некоторые из номографированных формул допускают построение номограмм из выравненных точек, например, формулы (12) и (13). Г. С. Хованский

10504 К. Численный анализ с упором на применение численных методов к проблемам исчисления бесконечно малых с одной переменной. Копал (Numerical analysis. With emphasis on the application of numerical techniques to problems of infinitesimal calculus in single variable. Kopal Zdeněk. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1955, xiv, 556 pp., 12.00 doll.) (англ.)

Содержание книги по главам следующее: Интерполяция полиномами; Численное дифференцирование; Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений; Краевые задачи: алгебраические методы; Краевые задачи: вариационные, итерационные и другие методы; Механические квадратуры; Численное решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Из Math. Revs, 1956, 17, № 9, 1007

10505 К. Численный математический анализ. Скарборо (Numerical mathematical analysis. 3rd. ed. Scarborough James B. Baltimore, Johns Hopkins Press: London, Oxford Univ. Press, 1955, xix, 554 pp., 6.00 doll.) (англ.)

10506 Д. Численное интегрирование систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений методом понижения порядка. Козлов Е. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1958

ТАБЛИЦЫ

10507. Таблицы функций в цифровых вычислительных машинах. Шуберт (Function tables in digital control computers. Schubert E. J.), Commun. and Electronics, 1958, № 37, 316—319 (англ.)

Исследуется возможность запоминания таблиц функций в быстродействующих вычислительных машинах. Для интерполирования предлагается удерживать два члена в разложении функции в ряд Тейлора. Автор предлагает вместо обычно принятой в современных машинах нормированной записи числа с мантиссой и порядком ввести запись в виде логарифма при основании 2 (билогарифм), т. е. число $N = 2^s F$, где $1 \leqslant F \leqslant 2$, записывать в машине в форме $\log_2 N = s + \log_2 F$ и с ним производить нужные действия. Как утверждает автор, это приводит к экономии времени счета и программирования для задач большой сложности.

На функциях $\log_2 x$, $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{arctg}(y/x)$ исследуется вопрос об объеме запоминаемых таблиц для получения необходимой точности при условии, что аргумент одновременно является адресом той ячейки, где хранится функция. Приводятся схемы программ для выборки и интерполирования запоминаемых функций. К. Е. Чернин

10508. Универсальные и быстрые вычисления элементов круговых секторов и сегментов. Хубер (Universelle Schnellberechnung an Kreisaus- und Kreisabschnitten. Huber R.), Techn. Rundshau, 1958, 50, № 26, 28—29 (нем.)

Предлагаются простые для пользования и довольно компактные таблицы для вычисления следующих элементов сектора и сегмента: точки приложения силы тяжести, площади сектора, площади сегмента, длины хорды, стягивающей сегмент, высоты сегмента, центрального угла и длины дуги. Таблицы дают возможность по двум из вышеперечисленных величин определять любую третью величину. Д. А. Поспелов

10509. Табулирование f_λ функций, встречающихся в аэродинамической теории колеблющегося крыла в сверхзвуковом потоке. Хаккел (Tabulation of the f_λ functions which occur in the aerodynamic theory of oscillating wings in supersonic flow. Huckel Vera. NACA Techn. Note, 1956, № 3606, 59 pp.) (англ.)

Даны семизначные таблицы вещественной и мнимой частей функции

$$f_\lambda(M, \bar{\omega}) = \int_0^1 u^\lambda e^{-i\bar{\omega}u} I_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) du$$

для следующих значений параметров: $\lambda = 0\,(1)\,11$; $M = 1{,}2\,(0{,}1)\,1{,}6$; $1{,}8$; $2{,}0\,(0{,}5)\,4\,0$; $5{,}0$; $k = 0{,}00\,(0{,}010)\,0{,}150 \times (0{,}010)\,0{,}200\,(0{,}025)\,0{,}350\,(0{,}050)\,1{,}000\,(0{,}010)\,2{,}000$, где $\bar{\omega} = 2kM^2/(M^2 - 1)$. Указаний относительно интерполяции не имеется. Кратко описаны аэродинамические проблемы, в которых встречаются эти функции. L. Fox

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 10, 1140

10510 К. Краткие таблицы целых степеней, предназначенные для работы на вычислительной машине. Монтань (Tables abrégées de puissances entières. Spécialement préparées pour servir d'aide à la machine à calculer. Montagne P. Paris, Dunod, 1958, XLIV, 441 p.) (франц.)

Изданная большим форматом книга содержит таблицы целых степеней x^n, вычисленных с большой точностью. Книга разбита на три части.

1) Малые таблицы, вычисленные с пятнадцатью значащими цифрами:

x	$n \leqslant$	стр.
0,2	600	3—5
0,3	400	5—6
0,4	250	7
0,5 (0,1) 0,9	200	8—11
1,1 (0,1) 2,0	150	12—17
$x = 0{,}10\,(0{,}01)\,1{,}53$	$n \leqslant 78$	18—62.

2) Средние таблицы, вычисленные с пятнадцатью значащими цифрами: $x = 0{,}100\,(0{,}001)\,1{,}260$, $n \leqslant 26$ (стр. 67—157).

3) Большие таблицы, вычисленные с десятью значащими цифрами: $x = 0{,}0000\,(0{,}0001)\,1{,}0000$ (стр. 160—359) и $x = 10000\,(0{,}0001)\,1{,}2600$, $n \leqslant 10$ (стр. 360—411).

В книгу включены дополнительные таблицы: коэффициентов интерполяционной формулы Эверетта; биномиальных коэффициентов $\binom{n}{p}$ для $n \leqslant 50$, $p \leqslant 16$; фак-

ториалов $n!$ до $n=100$; таблицы некоторых часто встречающихся постоянных, вычисленные с двадцатью значащими цифрами, и много других.

В начале книги дается обстоятельное описание таблиц и способа их составления с многими примерами. Книга отпечатана на хорошей бумаге и хорошо сформлена. К. А. Карпов

10511 К. Физико-математические таблицы. Жмигродзкая, Обальский, Грыкаловский (Tablice matematyczno-fizyczne. Wyd. 5. Zmigrodzka Wanda, Obalski Tadeusz, Grykałowski Zbigniew. Warszawa, Państw. Wydawn. Szkoln. Zawod., 1958, 104 s., il., 6.80 zł.), Przew. bibliogr., 1958, 14, № 12, 157 (польск.)

10512 К. Пятизначные математические таблицы логарифмов и других функций. Мюллер (Fünfstellige Logarithmen- und andere mathematische Tafeln Bearb. 6. Aufl. Müller Fritz. Leipzig, Fachbuchverlag, 1958, VII, 206 S., 6. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 42, 3057 (нем.)

10513 К. Шестизначные тригонометрические таблицы и формулы. Атвуд (Six-figure trigonometrical tables and formulae. 4 th ed. Attwood C. London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 67 pp.) (англ.)

10514 К. Шестизначные логарифмы, антилогарифмы и логарифмы тригонометрических функций (Six-figure logarithms, antilogarithms and logarithmic trigonometrical functions. 3rd ed. London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 132 pp.) (англ.)

10515 К. Таблицы тригонометрических функций и таблицы для вычерчивания кривых (железные дороги, автомобильные дороги, каналы). Гонен, Удай, Бернар (Tables trigonométriques et tables pour le tracé des courbes (chemin de fer, routes, canaux). Gaunin J., Houdaille L., Bernard A. Paris, Dunod, 1956, XLIII, 184 p., ill.) (франц.)

10516 К. Пятизначные таблицы логарифмов. Фёльми, Экстерман (Tables numériques et logarithmes à cinq décimales. 3e éd. rev. et augm. Voellmy Erwin, Extermann Jean-Paul. Lausanne, Payot, 1958, 192 p., ill., 7. 80 Sfr.), Schweiz. Buch, 1958, **A**58, № 22, 613 (франц.)

10517 К. Формулы и таблицы математической статистики. Граф, Хеннинг (Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Graf Ulrich, Henning Hans-Joachim. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1958, VII, 104 S., 12.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 44, 3220 (нем.)

10518 К. Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них. Кармазина Л. Н., Чистова Э. А. М., АН СССР, 1958, 329 стр., 37 р. 15 к.

Приведены семизначные таблицы функций $I_0(x)$ и $E_0(x)$ для $x=0\,(0{,}001)\,0{,}150$; $I_1(x)$ и $E_1(x)$ для $x=0(0{,}001)\,0{,}200$; $e^{-x}I_0(x)$, $e^{-x}I_1(x)$, $e^{-x}\int_0^x I_0(u)\,du$, $e^xK_0(x)$, $e^xK_1(x)$, $e^x\int_x^\infty K_0(u)\,du$ и e^x для $x=0(0{.}001)\,5\,(0{,}005)\,15(0{,}01)100$. Ошибка табличных значений не превосходит единицы последнего знака. Для определения промежуточных значений вне непосредственной близости от $x=0$ рекомендуется линейная интерполяция, доставляющая погрешность не больше двух единиц седьмого десятичного знака. Для малых значений x требуется квадратичная интерполяция. Приведены области линейной и квадратичной интерполяции. Отмечаются некоторые свойства табулируемых функций.

Ф. К. Саульев

10519 К. Таблица функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. Чистова Э. А. М., АН СССР, 1958, 524 стр., илл., 45 р.

Книга содержит семизначные таблицы функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ и связанных с ними интегралов $Ji_0(x)$, $Ji_1(x)$, $Yi_0(x)$ и $Yi_1(x)$ для $x=0\,(0{,}001)\,15\,(0{,}01)\,100$. Промежуточные значения с погрешностью, не превосходящей двух единиц последнего табличного знака, в большинстве случаев получаются при помощи линейной интерполяции. В тех же случаях, когда линейная интерполяция не обеспечивает этой точности, автор предлагает использовать квадратичную интерполяцию по формуле Бесселя; в этих случаях в таблицах приведены соответствующие вторые разности. Для облегчения осуществления квадратичной интерполяции к книге приложен вкладыш с таблицей величин $\frac{t(1-t)}{4}$ для $t=0\,(0{,}001)\,1$ и номограмма для определения величины квадратичного члена.

Для вычисления интегралов $Ji_0(x)$ и $Ji_1(x)$ использована квадратурная формула Симсона, а для вычисления $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Yi_0(x)$ и $Yi_1(x)$ использованы ряды Тейлора и асимптотические разложения.

Приведены три примера пользования таблицами и некоторые свойства табулированных функций. Библ. 17 назв. В. К. Саульев

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

10520. Применение матричного исчисления к анализу схем линейных электронных моделирующих вычислительных машин. Натан (Computing and error matrices in linear differential analyzers. Nathan Amos), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, 7, № 1, 32—33 (англ.)

Схема набора задачи на линейной моделирующей вычислительной машине в одной из наиболее общих форм может быть представлена в виде сетки, состоящей из n горизонтальных и m вертикальных шин. В общем случае во всех узлах такой сетки включаются элементы с полной проводимостью y_{ij}, а в основной диагонали — операционные усилители с передаточной функцией $A_i(p)$. Система уравнений для каждого узла сетки в таком случае может быть переписана в матричной форме в виде одного уравнения, которое сокращенно имеет вид:

$$\|y\|\cdot\bar{v}=\|y_\varepsilon\|\cdot\bar{v}',$$

где вектор $\bar{v}$ называется вектором потенциалов, вектор $\bar{v}'$—сокращенным вектором потенциалов, содержащим только n первых членов вектора $\bar{v}$. Матрица $\|y\|$ — вычислительная матрица, а матрица $\|y_\varepsilon\|$ — матрица ошибок. Члены матрицы $\|y_\varepsilon\|$ представляют собой погрешности вычислений, имеющие место из-за того, что коэффициенты усиления операционных усилителей конечны. Структура матрицы $\|y\|$ полностью соответствует структуре сетки. Поэтому подготовка исходно-

го дифференциального уравнения к решению его на моделирующей машине описанным методом сводится к преобразованию этого уравнения в форму „идеализированного" матричного уравнения вида $\| y \| \cdot \bar{v} = 0$. Приводится пример. А. В. Шилейко

10521. Изображение чисел и арифметических операций в системе класса вычетов. Валах (Abbildung der Zahlen und der arithmetischen Operationen im Restklassensystem. Valach Miroslav), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 57—59 (нем.)

Рассматривается вопрос о возможности физической реализации операций сложения и умножения для чисел, представляемых в коде „остатков". Как известно, из системы равенств

$$X \equiv x_i \pmod{P_i}, \quad 0 \leqslant x_i;$$

$$Y \equiv y_i \pmod{P_i}, \quad y_i < P_i$$

следует

$$X + Y \equiv x_i + y_i \pmod{P_i}, \; X - Y \equiv x_i \cdot y_i \pmod{P_i},$$

т. е. сложение и умножение для такой системы кодирования будут поразрядными операциями. Для физической реализации этих операций автор предлагает использовать коммутационную доску. В качестве примера рассматривается физическая реализация вычисления полинома $((4 \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 6) \cdot 10 + 7 = 4567$. См. также РЖМат, 1958, 7257. Д. А. Поспелов

10522. Оптимизированная программа для ИБМ-650. Гордон (An optimizing program for the IBM-650. Gordon Barry), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 1, 3—5 (англ.)

Описывается процесс записи программы на магнитный барабан математической машины ИБМ-650 таким образом, чтобы время выполнения программы было минимальным.

Одна инструкция программы для машины ИБМ-650 содержит 10 десятичных разрядов, 2 из которых отводятся для кода операции, 4 для адреса числа и 4 для адреса следующей инструкции. Сущность оптимизирования программы для каждой инструкции заключается в следующем: 1) Определить свободную ячейку памяти, ближайшую к оптимальной для данной инструкции, и поместить туда число. 2) Определить свободную ячейку памяти, ближайшую к оптимальной с точки зрения выполнения следующей инструкции, и поместить туда следующую инструкцию.

Кратко описываются операции, которые необходимо выполнить для приведения программы к оптимальному виду. Отмечается, что целесообразно задачу оптимизирования программы решать на самой машине.

Указывается, что в результате приведения программы к оптимальному виду можно достигнуть увеличения скорости решения задачи от 1,5 до 3,8 раза в зависимости от содержания задачи. А. Н. Чуйкин

10523. Символическая логика и автоматические вычислительные машины. Часть I. Беркли (Symbolic logic automatic computers. Part I. Berkeley Edmund C.), Computers and Automat., 1958, **7**, № 11, 18—20 (англ.)

В популярной форме определяется предмет символической логики и проводится сравнение ее с математикой. Рассматриваются примеры логических операций. Алгебра Буля определяется в рамках символической логики как алгебра, построенная на операциях И, ИЛИ и НЕТ над высказываниями или классами высказываний. А. В. Шилейко

10524. Системы счисления и методы перевода чисел, применяемые в математических машинах программного управления. Трубников Н. В., Попов Н. Ф., Сб. статей Моск. высш. техн. уч-ща, 1955, 55, 7—25

10525. Простейшая схема перевода из двоичной системы в десятичную. Чулиус (Ein einfaches Umrechnungsschema aus dem dualen ins dezimale System. Czulius W.), Z. Instrumentenkunde, 1958, **66**, № 5, 85—87 (нем.)

Приводятся таблицы, которые позволяют, зная коэффициенты K_i двоичного разложения чисел

$$N_i = K_0 2^0 + K_1 2^1 + \ldots,$$

находить эти числа в десятичной системе.

Перевод согласно предлагаемой схеме легко автоматизируется в самых разнообразных устройствах. Д. А. Поспелов

10526. Двоичное кодирование периодической десятичной системы. Суэканэ (Suekane Ryota), Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1956, **20**, № 7, 494—496, 552—553 (японск; рез. англ.)

10527. Периодическая система *p*-адических чисел. Суэканэ (Suekane Ryota), Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1956, **20**, № 7, 489—493, 552 (японск.; рез. англ.)

10528. Что вы должны знать о цифровых вычислительных машинах. Холлендер, Томпкинс (What you should know about digital computers. Hollander F. H., Tompkins C. B.), Chem. Engng Progr., 1956, **52**, № 11, 451—454 (англ.)

10529. Цифровые средства для простых вычислений. Лунд (Digital techniques for small computations. Lundh Yngvar), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1959, **19**, № 1, 37—44 (англ.)

Описываются схемы вычислительных устройств, работа которых основана на методах цифрового моделирования. В качестве основных элементов этих устройств используются блок цифрового умножения и реверсивный счетчик. Блок цифрового умножения состоит из ряда последовательно включенных триггеров и ряда вентилей. Выход каждого триггера соединен с одним из входов соответствующего вентиля. На вторые входы вентилей подается комбинация напряжений, представляющая параллельное двоичное число. Выходы всех вентилей соединены с выходом блока. Если на вход последовательной цепи триггеров подаются импульсы, следующие с некоторой частотой F, то на выходе каждого триггера будут также иметь место импульсы, следующие с частотой $F/2^n$, где n — порядковый номер триггера, и, следовательно, частота следования импульсов на выходе блока будет равна:

$$f = a_1 \frac{F}{2} + a_2 \frac{F}{4} + \ldots + a_n \frac{F}{2^n},$$

где a_i — значения разрядов двоичного числа:

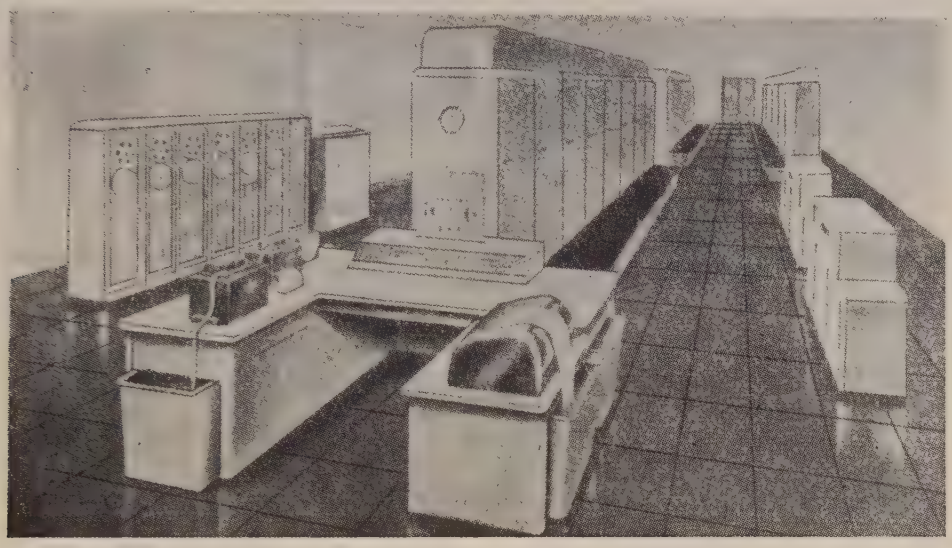
$$x = a_1 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + a_n \frac{1}{2^n} < 1.$$

Следовательно, $f = F \cdot x$. Для реверсивного счетчика используется схема обычного типа. Описываются схемы устройств для выполнения деления, вычисления квадратного корня и образования функции нескольких переменных, использующих 2 описанных блока. Проводится анализ динамики этих устройств и рассматриваются основные классы их ошибок, в числе которых отмечаются ошибки квантования, ошибки, имеющие место за счет начальных состояний триггеров блока цифрового умножения, и ошибки, имеющие место за счет неравномерного распределения выходных импульсов блока умножения во времени. Показывается возможность возникновения в подобных схемах колебаний около точных значений вычисляемой величины. Библ. 6 назв. А. В. Шилейко

10530. Цифровая вычислительная машина «Персей» (Perseus digital computer), Process Control and Au-

tomat., 1958, 5, № 8, 334—335 (англ.)

Сообщение фирмы «Ферранти» о предстоящем выпуске самой большой в Западной Европе вычислительной машины «Персей». Машина «Персей» (см. фото), полностью построенная на стандартных блоках, аналогичных блокам машины «Пегас», разрабатывалась в течение более чем 2 лет. Предполагаемое



время поставки машины 18 месяцев. В настоящее время строится 2 машины, одна для Швеции, вторая для Южно-африканского страхового общества в Кейптауне.

Основными особенностями машины «Персей» являются: возможность прямого ввода в машину букв и цифр в том виде, в котором они выдаются на выходе, возможность автоматической смены в течение 1 мсек. при помощи специального регистра системы счисления машины, например на десятичную или стерлинговую, возможность выделения для обработки лишь части слова, автоматическая проверка запоминающего устройства и всех арифметических операций. Размер самой машины 6,27×0,64×2,36 *м*, пульта управления 2,51×1,36×0,76 *м*, источника питания 4,88×0,635×2,36 *м*. «Персей» — одноадресная машина последовательного действия, работающая на частоте 333,33 *кгц*. Длина слова 72 двоичных знака. Для записи информации слово делится на 12 6-разрядных букв, при записи команд слово делится на 3 24-разрядных группы. Машина выполняет 63 операции сложение или вычитание за 0,234 мсек., модификации адреса за 0,234 мсек. Умножение требует 0,780 мсек. на значащий разряд множителя, деление требует в среднем 11 мсек. Оперативное запоминающее устройство, построенное на никелевых линиях задержки, имеет емкость 1024 числа, разбитых на 32 блока по 32 слова каждый. Время циркуляции информации 3,75 мсек., что дает среднее время выборки 2 мсек. Возможно увеличение емкости устройства до 64 блоков, кроме того, возможна установка магнитного барабана. Основное запоминающее устройство выполнено на магнитной ленте шириной 12,7 *мм*. Каждая катушка содержит 183 *м* ленты, и на ней записывается 6200 блоков слов, имеющих индивидуальные адреса. Длина катушки может быть увеличена до 900 *м*. Время передачи блока чисел в буферную память или обратно 75 мсек. Скорость перемещения информации 21 блок в 1 сек. Входное устройство на перфокартах работает со скоростью 300 карт размером 65 и 80 колонок в 1 сек. Входное устройство на перфоленте читает информацию с перфоленты, имеющей 5 или 7 отверстий, со скоростью 200 букв в 1 сек. Работа входных устройств автоматически проверяется, причем перфокарты читаются дважды.

Выходное устройство печатает информацию с магнитной ленты со скоростью 300 строк в 1 мин., телетайп печатает 7 букв в 1 сек. Стоимость машины 300 000 фунтов стерлингов. О. В. Бачин

10531. Быстродействующая вычислительная машина запоминает 2,5 миллиона двоичных знаков. Папян (High-speed computer stores 2.5 megabits. Papian William N.), Electronics, 1957, **30**, № 10, 162—167 (англ.)

Вычислительная машина «Lincoln TX-2», построенная в Массачусетском технологическом институте, работает на тактовой частоте 5 *мгц*, имеет оперативное запоминающее устройство на 2,5 млн. двоичных знаков, работающее со временем обращения 6 мксек., и быстродействующее запоминающее устройство на 64 регистрах индексов. Машина TX-2 — универсальная одноадресная машина параллельного действия, работающая с двоичными 36-разрядными числами. В случае необходимости каждое число может быть разбито на 9-разрядные части, с каждой из которых могут производиться самостоятельные операции. При работе с 36-разрядными числами машина производит в 1 сек. 150 000 сложений и 80 000 умножений, а при работе с 9-разрядными числами число сложений и умножений в 1 сек. возрастает до 600 000.

Машина может работать с числами длиной 36, 27, 18 и 9 разрядов. Возможна работа в качестве одной 36-разрядной машины, двух 18-разрядных машин или четырех 9-разрядных машин как с прямой, так и с перекрестной связью. Так, например, одновременно в машине могут идти два 18-разрядных умножения. Предусмотрена совместная работа с другими вычислительными машинами.

В машине используется около 22 000 полупроводниковых триодов, несколько сотен диодов и всего 625 вакуумных ламп, из которых в запоминающем устройстве используется 608 двойных триодов. Для осуществления операций умножения, сложения, сдвига, передачи используются схемы на поверхностно-барьерных полупроводниковых триодах. Все основные логические схемы, такие как И, ИЛИ и т. д., комбинируются из двух

стандартных схем на полупроводниковых триодах: схемы насыщенного триода с заземленным эмиттером и насыщенного эмиттерного повторителя. Стандартный триггер машины ТХ-2 содержит 10 полупроводниковых триодов и имеет на каждом входе однокаскадный усилитель, а на каждом выходе трехкаскадный усилитель. Арифметическое устройство построено на вставных блоках с широким использованием печатного монтажа, занимает площадь около 37 $м^2$ и потребляет мощность, меньшую чем 800 *вт*.

Запоминающее устройство на 65 536 чисел построено по принципу совпадающих токов, содержит 36 рабочих разрядов, разряд контроля и резервный разряд. Магнитные сердечники, применяемые в запоминающем устройстве, имеют внешний диаметр 2,03 *мм*, внутренний диаметр 1,27 *мм*, высоту 0,56 *мм* и переключаются током 820 *ма* за 1 мксек., давая выходной сигнал 100 *мв*. Разрядная матрица, содержащая 64 × 64 сердечников, разбита на 16 подматриц размером 16 × 16 сердечников. В каждом разряде имеется 4 усилителя считывания, с каждым из которых последовательно-параллельно связаны выходные провода четырех подматриц, что хотя и снижает величину выходного сигнала вдвое, но увеличивает отношение сигнал — помеха, ибо подматрицы, связанные с входом одного усилителя считывания, расположены так, что в любой момент помеха поступает только с одной из подматриц и отношение сигнал — помеха будет таким же, как и в случае матрицы 16×16, а, кроме того, вследствие уменьшения длины считывающего провода, снижается задержка сигнала на считывающем проводе. Усилитель считывания содержит на входе балластный усилитель, двухполупериодную схему выпрямления на эмиттерных повторителях, усилитель импульсов и усилитель тока. Стробирующий импульс, подаваемый на усилитель считывания, имеет длительность 80 мксек. Формирователи разрядного тока записи содержат полупроводниковые триоды и вакуумные лампы и дают ток 410 *ма*. 512 координатных линий выбираются при помощи двух матричных магнитных дешифраторов 16×16, построенных на ленточных магнитных сердечниках. Предполагается добавление дополнительных блоков запоминающего устройства и доведение его объема до 262144 чисел.

Быстродействующее запоминающее устройство имеет емкость 64 19-разрядных числа, содержит 434 полупроводниковых триода, 8 диодов и 1 вакуумную лампу и обеспечивает считывание за 0,6 мксек. при общем цикле работы 4 мксек. Практически оно представляет собой запоминающее устройство с прямой выборкой (вариант *Z*), использующее два сердечника на двоичный разряд. При считывании по проводу выборки, пронизывающему все пары сердечников числа, подается большой ток, обеспечивающий быструю выборку числа, при записи по этому проводу подается ток, равный $^2/_3$ тока перемагничивания, а по разрядному проводу, проходящему в паре сердечников в противоположных направлениях, подается ток, равный $^1/_3$ тока перемагничивания, складывающийся с током по линии выборки в одном сердечнике и вычитающийся в другом. В зависимости от его полярности записывается «1» или «0» в пару сердечников. Сердечники имеют внешний диаметр 1,2 *мм*, внутренний диаметр 0,69 *мм*, высоту 0,3 *мм*. При считывании от лентода типа 6197 подается импульс тока 117 *ма*, в результате чего при считывании «1» на вход усилителя поступает сигнал амплитудой 0,5 *в* и длительностью 0,3 мксек. Для получения тока записи 18 *ма* и разрядного тока 8 *ма*, а также в усилителях считывания используются триоды № 123 и поверхностно-барьерные триоды. Входные и выходные устройства машины ТХ-2 выполнены на магнитной ленте, бумажной ленте, электронно-лучевых трубках, преобразователях непрерывной формы в дискретную и т. д.

В заключение приводятся некоторые данные о работе элементов машины, так, 8-разрядный регистр сдвига, содержащий 99 поверхностно-барьерных триодов, работал без ошибок и неисправностей 10789 часов. 8-разрядный умножитель, использующий 600 поверхностно-барьерных триодов, работает с августа 1955 г. Ошибки происходят в среднем один раз в два месяца или один раз за $510 \cdot 10''$ при скорости 100 000 умножений в 1 сек. Большинство ошибок произошло из-за дефектов монтажа, а из 8 случаев неисправности триодов 7 явились следствием перегрузки.

Исследования проводились совместно с армией, флотом и военно-воздушными силами. Библ. 6 назв.

О. В. Бачин

10532. Логическое проектирование крупной цифровой вычислительной машины, работающей в истинном масштабе времени. Астрон, Хаусман, Джейкобс, Мейер, Томас (The logical design of a digital computer for a large-scale real-time application. Astrahan M. M., Housman B., Jacobs J. F., Mayer R. P., Thomas W. H.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1956, 70—75 (англ.)

В последние годы Линкольновской лабораторией и фирмой «ИБМ» (США) разрабатывался проект крупной вычислительной машины, входящей в состав системы, характерной чертой которой является обилие источников информации и работа в истинном масштабе времени. Описан подход к проектированию этой машины и обсуждаются ее наиболее важные особенности. Общие соображения привели к выбору универсальной одноадресной параллельной цифровой машины с длиной «слова» в 32 разряда. Память на магнитных сердечниках имеет 270 336 разрядов, размещенных в двух блоках по 33 платы с матрицами 64×64. 33-я плата используется для записи разряда контроля по четности. Для связи с внешним миром служат буферные магнитные барабаны, еще один барабан предусмотрен для вспомогательных целей. Общая емкость их составляет 3 244 032 разряда, размещенных на шести цилиндрах с 6-ю зонами каждый. В каждой зоне имеется место для 2048 чисел. К этому добавляется пять блоков магнитных лент и система отображения на электронно-лучевых трубках. Чтобы достичь такой степени надежности, которая позволила бы обеспечить 24 час. непрерывной работы, все оборудование, за исключением некоторых частей ввода-вывода, дублировано. Круг задач, подлежащих решению на машине, требовал оперативного запоминающего устройства с циклом в 6 мксек. Такое запоминающее устройство было разработано в Массачусетском институте. Дополнительное требование состояло в том, чтобы наибольшая матрица имела число сердечников 64×64. Дальнейшее логическое проектирование машины концентрировалось вокруг цикла запоминающего устройства в 6 мксек. Исходя также из наличия готовых узлов, был выбран магнитный барабан от машины ИБМ-650. Задачей логического расчета, о котором идет речь в статье, явилось требование максимального использования скорости оперативного запоминающего устройства и емкости барабана при минимуме цепей в машине. Техническими средствами решения этой задачи оказываются следующие: 1) Арифметическое устройство, способное производить операции одновременно по осям x и y в связи с большим количеством расчетов в декартовых координатах; выполнять умножение за один цикл работы запоминающего устройства (6 мксек); принимать одновременно оба числа из оперативного запоминающего устройства (в два регистра по 16 разрядов, один из которых является и регистром суммы, получающейся без поразрядного сложения по принципу асинхронного сумматора). 2) Ши-

рокое использование системы признаков, позволяющей без потери времени и лишней загрузки оперативного запоминающего устройства производить модификацию адресов и переход к подпрограммам. 3) Ввод и вывод данных, связанных с оперативной памятью, осуществляемый с помощью счетчика адресов и счетчика количества чисел, сигнализирующих об окончании операций ввода-вывода. 4) Применение в качестве буферных устройств магнитных барабанов — одного для входных данных с отдельными стойками головок считывания и записи и другого для выдачи результатов вычислений. Общее количество ламп в прототипе этой вычислительной машины достигло 12500. Время выполнения операций составило 12 мксек, в том числе для умножения 15.5 мксек и деления 53 мксек. Приводится блок-схема одного разряда арифметического устройства и блока магнитного барабана, а также размещение частей машины в цехе наладки. А. Ф. Смирнов

10533. Цифровое управление процессом (Digital process control), Automat. Control, 1957, **7**, № 3, 70—71 (англ.)

Даны общие сведения по новой вычислительной машине РВ-300 (RW-300) фирмы «Рамо-Вулдридж» (Ramo-Wooldridge), специально рассчитанной на применение в системах управления процессами. Машина построена целиком на транзисторах, имеет основную память на магнитном барабане емкостью в 7936 чисел (62 дорожки по 126 чисел каждая) и быструю память на 16 чисел в виде регистра с циркуляцией кодов. Среднее время выборки из основной памяти 8,3 мсек. Количество входных и выходных каналов — 12, хотя число их может достигать тысячи. Ввод и вывод осуществляется через печатающее устройство — перфоратор «Флексорайтер» (Flexowriter) (шесть отверстий на 1 знак, скорость считывания, печати и пробивки 10 знаков в 1 сек.). Преобразователи непрерывных величин в дискретные составляют неотделимую часть машины так же, как и выходные преобразователи. В машине предусмотрено применение стандартных элементов повышенной надежности для работы в заводских условиях. К особенностям машины относятся возможность неполного умножения и деления для сокращения времени вычислений, блокировка округления при этих операциях для упрощения вычислений с удвоенной точностью, защита программы от случайных помех. Имеется общий вид магнитного барабана и одного из элементов с печатным монтажом. А. Ф. Смирнов

10534. Всеобщая Восточная конференция по вычислительным машинам, Вашингтон, декабрь 1957 г. (Программа, заголовки докладов, краткие аннотации) (Eastern Joint Computer Conference Washington, D. C., Dec. 9—13, 1957. Program, titles, and abstracts), Computers and Automat., 1957, **6**, № 11, 26—28, 30, 33 (англ.)

Общая тема конференции: «Объединение вычислительных машин с исполнительными механизмами». Приводятся краткие аннотации 49 докладов, представленных на конференции. З. Д. Доброхотова

10535. Вычислительная машина ГАММА-60 фирмы «Буль». Дюверже (Le GAMMA 60 Bull. Duverger Lucien), Automatisme, 1958, **3**, № 12, 455—460 (франц.)

Описывается общая структура и отдельные устройства электронной системы для обработки данных ГАММА-60 (GAMMA 60) фирмы «Буль», (Франция). Система состоит из запоминающего устройства, оперативного устройства, устройства управления, входных и выходных устройств. Одной из отличительных особенностей машины является соединение входных и выходных устройств непосредственно с запоминающим устройством. Оперативное устройство машины состоит из отдельных блоков, каждый из которых выполняет определенные операции. В число этих блоков входит блок сравнения, выполняющий операцию классификации, арифметический блок для выполнения вычислений, логический блок для выполнения логических операций, блок магнитного барабана для долговременного хранения данных и т. п. Все эти блоки работают независимо, и это является второй отличительной особенностью машины. Число блоков может изменяться в зависимости от вида выполняемых работ. Центральное устройство машины состоит из центрального запоминающего устройства распределителя материала и распределителя программ. Запоминающее устройство выполнено на магнитных сердечниках. Оно имеет емкость 32768 двоичных слов по 24 разряда. Время выборки одного слова — 11 мксек. Блоки оперативного устройства соединяются с запоминающим устройством посредством двух каналов. Один из этих каналов, называемый распределительным, служит для передачи данных из запоминающего устройства в оперативное, а второй, названный собирающим, служит для передачи данных из оперативного устройства в запоминающее. Так как по каналу может передаваться одновременно не более одного слова, специальное устройство, называемое распределителем материала, задает последовательность передачи слов. Блоки оперативного устройства машины работают независимо, каждый из них запрашивает из запоминающего устройства исходные слова, над которыми будет выполняться операция, и очередную команду общей программы. Последовательность передачи команд передается устройством, названным распределителем программ. А. В. Шилейко

10536. 20 000 операций в секунду. Соммершильд (20.000 laskusuoritusta sekunnissa. Sommerschild F. E.), Voima ja käyttö, 1958, **56**, № 12, 327—330 (финск., шведск.)

Статья общего характера, посвященная машине Facit EDB, функционирующей в настоящее время в Стокгольме. Перечисляется класс задач, которые с успехом решались на этой машине (расчет издержек в жилищном и фабричном строительстве, анализ рынка, проблемы страхового дела, поглощение нейтронов в реакторах и т. п.).

Конструкция машины не описывается. Приводится скорость выполнения операции сложения (20 000 сложений в 1 сек.) и умножения (3300 умножений с 12-разрядными числами в 1 сек.). Отмечается, что в машине наряду с памятью на барабане (8000 чисел) имеется память на ферритах (2048 чисел). Д. А. Поспелов

10537. Прогресс вычислительной техники (Computer progress), Office Mag., 1959, **6**, № 61, 46—48 (англ.)

Фирма «Нэйшнл-Эллиот» (National-Elliott) производит небольшую вычислительную машину «802» (стоимостью 20 000 фунтов стерлингов) последовательного действия, имеющую запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью в 1024 числа, с тактовой частотой 166,5 *кгц* и длиной числа 33 разряда.

Фирма «Эллиот» (Elliott Brothers) выпускает быстродействующее читающее устройство, которое читает 5-, 7- или 8-дорожечную перфоленту со скоростью 1000 букв в 1 сек. с возможностью остановки на каждой букве.

Фирма «ИБМ» выпустила новую большую машину для обработки данных ИБМ-7070. Эта машина, выполненная на полупроводниковых триодах, имеет время сложения меньше 100 мксек. Запоминающее устройство на магнитных сердечниках имеет емкость 5000 или 10000 10-разрядных чисел и время выборки 6 мксек. Машина может работать с 4 блоками запоминающего устройства на магнитных дисках, каждый из которых имеет емкость 6 000 000 двоичных знаков.

В машине возможно перекрывание операции. ИБМ-7070 может одновременно работать с тремя устройствами чтения перфокарт, имеющими скорость работы

400 карт в 1 мин., и с тремя перфораторами, работающими со скоростью 250 карт в 1 сек.

Машина может, не прерывая вычислений, записывать или читать две магнитные ленты одновременно с общей скоростью 125 000 букв в 1 сек.

Сообщается также о десятичной счетной машине ИБМ-632, выходном устройстве ИБМ-381 для системы «Romac», входном устройстве ИБМ-382 и табуляторе ИБМ-407 для машины ИБМ-650.

Новая вычислительная машина фирмы «Ферранти» «Пегас-2», предназначенная для обработки коммерческой информации, имеет запоминающее устройство на магнитном барабане на 7168 тридцатидевятиразрядных чисел против 4096 чисел машины «Пегас-1». Два входных устройства машины работают с частотой 300 *гц*, а выходное печатающее устройство «Крид-75» (Creed-75) работает с частотой 10 *гц*. Стоимость машины «Пегас-2» 55 000 фунтов стерлингов, а стоимость всей системы 180 000 фунтов стерлингов.

Фирма «EMI Electronics» выпустила читающее устройство ФЭД (FRED-Figure Reading Electronic Device). Это устройство читает цифры оптическим или магнитным путем. Магнитный вариант устройства очень хорошо приспособлен для чтения чеков. Логические схемы устройства позволяют читать 15 знаков, напечатанных в определенной конфигурации специальными магнитными чернилами.

Это устройство читает десятичные цифры от 0 до 9, числа 10, 11 и три других знака.

Американская фирма «Берроуз» (Burroughs) разработала электронное печатающее устройство, печатающее со скоростью 3000 слов в 1 мин., причем теоретически эта скорость может быть доведена до 500 000 слов в 1 мин.

В этом устройстве буквы проектируются электронным путем по мере того, как бумага проходит под серией электродных пушек. Затем бумага посыпается порошком, который пристает к наэлектризованным изображениям, а полученная буква закрепляется нагретым валиком.

О. В. Бачин

10538. Малогабаритная универсальная цифровая электронная вычислительная машина М-3. Брук И. С., Матюхин Н. Я., Белынский В. В., Каган Б. М., Иосифьян А. Г., Долкарт В. М., Лопато Г. П., Электричество, 1958, № 1, 49—53

Приводятся основные данные и схемы универсальной малогабаритной цифровой вычислительной машины М-3. Машина М-3 состоит из арифметического узла параллельного типа, запоминающего устройства и устройства управления. Запоминающее устройство на магнитном барабане имеет объем в 2048 чисел.

Скорость работы машины — 30 полных арифметических действий в 1 сек. Ввод и вывод данных производится с помощью стандартной телеграфной аппаратуры со скоростью 7 десятичных цифр в 1 сек.

Машина имеет 770 электронных ламп и 3000 купроксных диодов. Потребляемая мощность равна 10 *квт*.

А. А. Крюков

10539. Цифровая электронная машина ЦЭМ-1. Михайлов Г. А., Шитиков Б. Н., Явлинский Н. А., В сб.: Пробл. кибернетики. Вып. 1. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 190—202

Машина ЦЭМ-1 относится к машинам среднего класса и предназначается для использования в научно-исследовательских организациях. ЦЭМ-1 — двухадресная машина последовательного действия, количество разрядов 30, запятая фиксированная, оперативное запоминающее устройство — на ртутных трубках, внешнее — на магнитном барабане (емкость первого 496 чисел, второго — 4096 чисел или команд), частота внутреннего цикла 512 *кгц*, число сложений 495 операций в 1 сек., умножений или делений 232 операции в 1 сек., количество ламп 1900, потребляемая мощность 14 *квт*. К особенностям машины можно отнести ограниченный состав команд (12 команд), упрощающий управление и программирование, широкое применение непосредственных связей и катодных повторителей, использование признаков для расширения логических возможностей машины. В статье рассмотрены конструкции ртутной трубки и некоторые электронные узлы. Приведена функциональная схема арифметического устройства. Отмечается, что простая замена диодов 6×6 германиевыми сократила бы количество ламп на 30—35% (машина построена в 1953 г.).

А. Ф. Смирнов

10540. Вычислительная машина на полупроводниковых триодах. (A transistor computer), Electr. Rev., 1958, 163, № 23, 1056 (англ.)

Сообщение фирмы «Ферранти» о предполагаемом в 1960 г. выпуске вычислительной машины для автоматического управления производственными процессами ПКТК (PCTC — Process Control Transistor Computer). Машина будет использовать полупроводниковые триоды, и размер ее будет 1,2 *м* × 1,2 *м* × 0,6 *м*.

Экспериментальная модель этой машины управляла установкой, моделирующей производственный процесс, свыше 2000 час. Проведены были также температурные и вибрационные испытания.

Ожидаемая стоимость машины от 22 000 до 50 000 фунтов стерлингов в зависимости от размеров установки

О. В. Бачин

10541. Электронно-вычислительная группа ИБМ 628—421 (Groupe calculateur électronique IBM 628-421), Rev. mécanogr., 1958, 12, № 134, 411—412 (франц.)

Новая электронная вычислительная машина ИБМ-628 с ферритовой памятью выполняет 5500 сложений в 1 сек. и более удобна для программирования нежели существующие модели этого типа. Электронно-вычислительная группа ИБМ 628-421 состоит из трех машин: электронной вычислительной машины 628, табулятора 421 и перфоратора 521, которые могут работать как совместно, так и независимо друг от друга. Электронная машина ИБМ-628 имеет 40 ячеек памяти на 8 цифровых плюс 2 знаковых разряда. Каждая ячейка памяти может хранить одно восьмизначное число со знаком или одно пятизначное и одно трехзначное число с их знаками. При чтении с карт данные могут быть записаны в 28 первых ячейках. Выдача результатов осуществляется с 10 последних ячеек. Имеется шестнадцатиразрядный суммирующий счетчик. Стандартные импульсы, указывающие состояния его, таковы: отрицательное число; переполнение; не нуль. Сложение и вычитание выполняется за 180 мксек. Максимальное время умножения 14,58 мксек; деления 17,46 1 мсек. Табулятор ИБМ-421. Блок печати состоит из 100 буквенноцифровых штанг, или 50 буквенных и 50 цифровых. Скорость печати — 150 строк в 1 сек. Перфоратор ИБМ-421. Скорость работы — 100 карт в 1 мин. Производит перфорирование последовательности констант, выборочное перфорирование результатов, полученных электронной вычислительной машиной из буферной памяти, выборочное перфорирование содержимого счетчиков табулятора.

Х. А. Атакшиев

10542. Обзор вычислительных машин, выпускаемых промышленностью. Макдоналд (Survey of commercial computers. Macdonald Neil), Computers and Automat., 1958, 7, № 11, 8, 10, 12—13 (англ.)

На основании ответов на опросные листы, полученных от 34 различных фирм, приводится обзор выпускаемых в настоящее время аналоговых и цифровых электронных вычислительных машин. Точность аналоговых машин изменяется от 2 до 5 значащих десятичных цифр. Их емкость доходит до 1000 одновременно запоминаемых переменных. Наибольшие из этих ма-

шин содержат до 72 сумматоров, до 64 блоков умножения, до 48 интеграторов и до 22 функциональных блоков. Причем количество блоков может быть легко увеличено. Применяются разнообразные системы ввода и вывода, среди которых отмечается ручная и с помощью лент. Почти во всех машинах применяется автоматический контроль. Полезное время машин колеблется от 95 до 100% общего рабочего времени. Цена аналоговых машин заключается между 400 долл. и 3 млн. долл. Приводятся краткие данные аналоговых машин 7 различных американских фирм. Емкость оперативных запоминающих устройств электронных цифровых вычислительных машин изменяется от четырех регистров до 33 тыс. регистров. Емкость запоминающих устройств на магнитных лентах доходит до 300 млн. слов. Длительность выполнения операции сложения изменяется от 18 мксек. до 1,8 мсек., длительность умножения и деления — от 65 мксек. до 20 мсек. Число различных команд изменяется от 19 до 161, а число стандартных программ, хранящихся в библиотеках, доходит до 500. Скорости ввода и вывода изменяются от 6 слов в 1 сек. примерно до 125 тыс. слов в 1 сек. У 90% машин предусмотрен автоматический или полуавтоматический контроль. Полезное время составляет от 95% до 99% полного машинного времени. Продажная цена изменяется от 50 тыс. долл. до 3,7 млн. долл. Приводятся данные 18 электронных цифровых вычислительных машин различных фирм. Машина АЛЬВАК 111-Е фирмы «El-Tronics, Inc.» (США) предназначена для решения научных задач и задач управления производством. Система счисления двоично-десятичная. Длина слова 8 цифр или 5 букв. Оперативное запоминающее устройство состоит из 128 регистров при времени обращения 4 мсек. Промежуточное запоминающее устройство имеет емкость 8192 слова. 16 блоков магнитной ленты имеют общую емкость 7168 тыс. слов. Умножение выполняется за время от 0,5 до 17 мсек, деление — от 0,5 до 17 мсек и сложение — за 0,5 мсек. В машине могут выполняться 128 различных команд и имеется 50 стандартных подпрограмм. Ввод и вывод осуществляется одновременно с вычислениями со скоростью 603 слова в 1 сек. Имеется автоматический контроль. В среднем по 30 работающим машинам полезное время составляет 96% рабочего времени. В настоящее время продано или сдано в аренду 38 таких машин. Машина КДК-1604 (CDC 1604) фирмы «Control Data Corp.» (США) предназначается для решения научных задач в истинном масштабе времени. Система счисления двоичная, длина слова 48 разрядов. Оперативное запоминающее устройство имеет емкость 16 384 слова при времени обращения 6,5 мксек. Могут использоваться от 4 до 16 блоков с магнитной лентой при емкости каждого блока в 7,5 млн. знаков. Обращение к лентам производится группами при величине группы, изменяющейся от 0 до 4000 знаков. Длительность операции сложения 1,6 мксек., длительности умножения и деления — переменные. В машине могут выполняться 63 различных команды. Скорость ввода и вывода 125 тыс. слов в 1 сек. Ввод и вывод осуществляется одновременно с вычислениями. Первая машина поступит в продажу летом 1959 г. Система для обработки данных ИБМ-709 предназначена для решения научных и промышленных задач в истинном или другом масштабе времени. Длина слова 36 двоичных разрядов. Оперативное запоминающее устройство имеет емкость 8 тыс. или 32 тыс. слов при времени обращения 12 мксек. Имеется магнитный барабан емкостью 16 тыс. слов и 48 блоков магнитных лент. Длительность операции сложения 24 мксек., умножения и деления от 24 до 240 мксек. В машине может выполняться 161 различная инструкция и составлено более 500 стандартных подпрограмм. Операции ввода и вывода осуществляются одновременно с вычислениями со скоростью 2,5 тыс. слов в 1 сек. Имеется автоматический контроль ввода и вывода. На 30 июня 1958 г. фирма «ИБМ» установила более 4200 малых, более 970 средних и более 190 больших систем обработки данных. Машина ЛГП-30 (LGP-30) фирмы «Royal McBee Corp» (Англия) предназначена для решения научных и промышленных задач. Длина слова 5 букв или 9 десятичных цифр. Оперативное запоминающее устройство состоит из трех регистров при времени обращения 260 мксек. Магнитный барабан имеет емкость 4096 слов при времени обращения от 2 до 17 мсек. Длительность операции сложения 260 мксек, умножения и деления — 17 мсек. В машине могут выполняться 16 различных команд, составлено 100 стандартных подпрограмм. Ввод и вывод данных осуществляется одновременно с вычислениями со скоростью 30 слов в 1 сек. Полезное время составляет 99% общего рабочего времени. 160 таких машин продано или сдано в аренду. Система для обработки данных РКА-501 (RCA 501) предназначена для решения промышленных задач. Длина слова не ограничена, один знак состоит из 7 двоичных разрядов. Оперативное запоминающее устройство имеет емкость от 16 384 до 262 144 знака при времени обращения 15 мксек. В состав машины входит 63 блока магнитной ленты. Длительность операции сложения от 0,24 до 0,42 мсек., умножения — от 1,9 до 9,6 мсек., деления — от 1,3 до 2,4 мсек. В машине могут выполняться 49 различных инструкций. Ввод и вывод данных может осуществляться с помощью магнитной ленты со скоростью 33 333 знака в 1 сек. или с помощью перфоленты со скоростью 1000 знаков в 1 сек. Имеется автоматический контроль. Система для обработки данных «Транзак S-2000» фирмы «Филко» (США) выполнена полностью на транзисторах и предназначена для решения научных и промышленных задач, а также для работы в качестве бортового самолетного устройства. Длина слова 48 двоичных разряда. Один буквo-цифровой знак занимает 6 разрядов. Оперативное запоминающее устройство на магнитных сердечниках имеет емкость 32768 слова. Кроме того, в состав машины может входить до 32 регистров индексов и до 256 магнитных барабанов при емкости каждого барабана в 32 768 слов. Длительность выполнения операций с фиксированной запятой: сложения 18 мксек., умножения и деления 65 мксек; с плавающей запятой — сложение 27.5 мксек; умножение и деление — 51 мксек. Могут выполняться 256 различных команд. Операции ввода и вывода могут выполняться одновременно с вычислениями со скоростью 45 тыс. слов в 1 сек. Имеется автоматическое программирование. Полезное время составляет 98,6% от общего рабочего времени. Первый образец был выпущен в октябре 1958 г.

А. В. Шилейко

10543. Применения малых цифровых вычислительных машин в авиационной промышленности. Ливингстон, Лайонс (Applications of small digital computers in the aircraft industry. Livingston H. M., Lyons E. L.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1956, 89—91 (англ.)

С появлением новых малых вычислительных машин машины ИБМ-650, «Дататрон», «Элеком» и другие, ранее считавшиеся малыми, переходят в класс средних машин. Новые малые вычислительные машины делятся на два основных типа. Первый тип представляют машины, использующие двоичную систему счисления, как правило, с запоминанием программы на внутренних запоминающих устройствах. Для этих машин характерны системы команд и техника программирования, применяемые в больших вычислительных машинах.

Во второй тип малых вычислительных машин входят машины с десятичной системой счисления и программой, задаваемой внешними устройствами. Для этих машин

команды задаются не в закодированном виде, а непосредственно. Машинам второго типа и посвящается статья.

К малым вычислительным машинам предъявляются требования простоты схемы, простоты управления и оперирования, простоты программирования, не требующей специальной подготовки и малой стоимости.

В качестве примера дается общее описание малой вычислительной машины «Берроуз-Е 101» фирмы «Берроуз» (Burroughs), нашедшей большое применение для нужд авиационной промышленности (РЖМат, 1955, 4028).

Управление машиной осуществляется с кнопочной панели, а ввод данных с клавиатуры типа настольного электрического арифмометра, а также перфоленты или перфокарт. Программа задается коммутацией с помощью штеккеров на штеккерной панели. Каждая панель рассчитана на набор 16-ти команд или чисел. Восемь таких панелей дают возможность набора полной программы.

Запоминающим устройством машины Е-101 является магнитный барабан на 100 или 220 12-разрядных десятичных чисел плюс знак. Каждая десятичная цифра представляется количеством нужного числа импульсов, например, цифра 7 представляется как семь из девяти возможных импульсов.

Вывод результатов решения задачи осуществляется с помощью печатающего устройства. Скорость печати — 2 12-значных числа в 1 сек.

Потребляемая мощность 2,5 *квт*.

Для характеристики быстродействия машины указывается, что систему 17 алгебраических уравнений со вводом с клавиатуры 8 исходных параметров машина решает за 1 мин. 15 сек.

В авиационной промышленности малые вычислительные машины находят следующее основное применение: 1) составление программ, требующее обычно решения большого количества малых задач, что является неэкономичным для больших вычислительных машин; 2) формулирование задач; 3) проверочные вычисления и проверка программ для больших вычислительных машин; 4) использование малыми предприятиями и отделами больших компаний, которые не могут загрузить работой большие вычислительные машины.

Указывается процентный состав фирм, применяющих малые вычислительные машины: 30% — авиационная промышленность; 10% — коммерческие предприятия; 10 % — банковские предприятия; 8% — химическая и фармацевтическая промышленность; 12%—оптическая промышленность; 12% — машиностроение; 6% — научно-исследовательские учреждения; 2% — нефтяная промышленность. Г. П. Зеленкевич

10544. Автоматическая вычислительная машина из ГДР. Хильдебранд (Vollautomatische Rechenmaschinen aus der DDR. Hildebrand S.), Neue Techn. Büro, 1958, 2, № 10, 227, 229—232 (нем.)

10545. Небольшая вычислительная машина для промышленного применения (A modest «brain» for industrial use), Austral. Factory, 1958, **13**, № 3, 48, 50 (англ.)

Сообщение об установке в Австралии машин «Голлерит-555» и первых результатах эксплуатации.

10546. Электронная вычислительная машина на Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии (Elektronenrechner auf der Genfer Konferenz «Atome für den Frieden»), Industriekurier Wochenausg. Techn. und Forsch., 1959, **12**, № 2, 28 (нем.)

Сообщение о демонстрации в Женеве в сентябре 1958 года на конференции по мирному использованию атомной энергии электронной вычислительной машины ИБМ-650. Перечисляются некоторые задачи в области использования атомной энергии, решаемые на машине. И. Ф. Шелихова

10547. Методика конструктивной проверки. Перзли (Engineering testing techniques. Perzley William), Automat. Control, 1958, **9**, № 3, 24—26 (англ.)

Проверка вычислительных машин дискретного счета и отыскание неисправностей в них затрудняются обычно сравнительно малым объемом их памяти. Описывается метод проверки машины и определения момента проявления неисправности при отработке программы вычислений. Метод разработан для специализированной цифровой машины, устанавливаемой в инерциальной системе управления, и особенно ценен для отыскания перемежающих неисправностей, при которых результаты повторных вычислений, обычно, получаются случайными. Для поверки машины по этому методу к ней подключается специальная схема управления, имеющая комплект дополнительных запоминающих устройств и счетчик циклов вычисления. Машина включается в режим повторяющегося вычисления по той программе, при которой обнаружена неисправность, и оператор по картине на экране электронно-лучевой трубки с длительным послесвечением определяет приближенно момент сбоя. После этого схема включается в режим повторяющихся вычислений на участке вблизи точки сбоя и точно определяется момент сбоя, зная который можно найти неисправный блок. Описанный метод сравнивается с методом поверки включением на синхронную работу с эталонной цифровой машиной и методом сравнения результатов, записанных в процессе вычисления по известной программе, с эталонными. Приводятся блок-схемы включения машины на поверку при 4 различных методах. И. Д. Алимов

10548. Моделирование с помощью цифровых вычислительных машин. Хорафас (Digital computer simulation techniques. Chorafas Dimitris N.), Automat. Control, 1958, **9**, № 5, 61—69 (англ.)

Показывается, что моделирование с помощью электронной цифровой вычислительной машины особенно эффективно в тех случаях, когда необходимо провести изучение работы моделируемого объекта в различных режимах. В качестве примеров подобных задач приводятся моделирование процессов в транзисторе, работающем в различных режимах, разработка вычислительной машины с помощью вычислительной машины и моделирование турбореактивного двигателя. Разработка схемы вычислительной машины, названной X-308, проводилась фирмой «Ремингтон Рэнд» (США) с помощью одной из существующих вычислительных машин в 3 этапа. На первом этапе была проверена система логических соотношений, соответствующая разрабатываемой машине; на втором этапе разрабатываемая машина была промоделирована математически на существующей машине с целью определения ее характеристик. На третьем этапе с помощью вычислительной машины была составлена спецификация деталей. Приводятся основные уравнения и блок-схемы модели турбореактивного двигателя. А. В. Шилейко

10549. Применение полупроводниковых приборов для построения основных элементов цифровых вычислительных машин. Зимарев А. Н., Шарапов Ю. И., В сб.: Применение полупроводников в электротехн. Л., 1958, 45—56

Описываются практические схемы формирователя импульсов и динамического триггера на точечных транзисторах и схемы статического триггера, вентиля и импульсного усилителя на плоскостных транзисторах. Приводятся некоторые соображения по выбору элементов этих схем. Библ. 4 назв. А. В. Шилейко

10550. Качественное изучение различных триггеров на полупроводниковых триодах. Суби-Ками (Étude qualitative des différents types de bascules à transistors rencontrés dans les techniques binaires. Soubi-

es-Camy Henri), Mécanic, 1958, № 4, 87—94 (франц.)
См. РЖМат, 1959, 3295.

10551. Исследования запоминающих устройств и другие усовершенствования в Национальном бюро стандартов. Слуц (Memory studies and other developments at the National Bureau of Standards. Slutz Ralph J.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 271—234. Discuss., 234 (англ.)

10552. Запоминающее устройство на линиях задержки в вычислительной машине «Меркурий». Райт (Mercury delay line storage. Wright M.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 195—199. Discuss., 199 (англ.)

10553. Память на магнитной ленте для цифровой машины САРА. Видин (Magnetband—minne för datamaskinen Sara. Widin Kurt), Tekn. tidskr., 1958, 88, № 44, 1175—1179 (шведск.)

Приводится описание устройства памяти на магнитной ленте для шведской цифровой машины САРА (SARA). Эта память практически эксплуатируется с конца сентября 1958 г. Автор отмечает, что для подобного типа памяти особенно важное значение имеют два требования: быстрота поиска данных в памяти и достоверность хранимой информации. Требование достоверности наиболее важно, так как одна возможная ошибка на 10^7 импульсов, записанных на ленту, это максимальная гарантия, которая может быть принята для стандартных магнитных лент. Из-за износа ленты и головок среднее количество ошибок на стандартный рулон ленты (370 *м*) будет колебаться от 10 до 20. Ликвидировать эти ошибки можно только путем применения самокорректирующего кода.

Вопрос о скорости работы ленточной памяти имеет две стороны: скорость поиска данных на ленте и скорость обработки одной отдельной цифры на ленте. При скорости ленты 1,5 *м/сек* наиболее целесообразной является скорость чтения и записи порядка 15 000—20 000 знаков в 1 сек., что вполне согласуется со скоростью работы магнитного барабана в машине САРА. Для устранения влияния времени поиска информации на ленте на работу машины поиск осуществляется с помощью специального устройства, работающего параллельно с работой машины. Обычный принцип записи и считывания данных с помощью дорожки с временными импульсами не желателен, так как в случае возникновения ошибки во временном канале будет потеряна часть хранимой на ленте информации. Поэтому в машине САРА для временной синхронизации используется отдельное, не связанное с лентой временное устройство.

Лента разбивается на отдельные блоки. Поиски блоков могут производиться либо путем отсчета числа блоков от начала ленты, либо каждый блок необходимо снабдить адресом, стоящим перед началом каждого блока. В описываемой машине принят второй способ местоуказания блоков. На ленте длиной 360 *м* помещается 4096 блоков, каждый из которых заключает в себе 64 слова (одно слово соответствует 10—12 десятичным разрядам). При этом плотность импульсов на ленте составляет 120 импульсов на 1 *см*. В силу того, что $4096 = 2^{12}$, то адрес каждого блока может быть записан с помощью 12 двоичных разрядов. Для указания блоков используются две дорожки ленты, на которых записываются следующие комбинации: 11—начало адреса блока; 10—начало блока; 01—конец блока; 00—блок или адрес блока.

Подсчет общего числа необходимых дорожек на ленте производится следующим образом. Двоичный код любой десятичной цифры, как известно, требует четыре дорожки, две дорожки используются для местоуказания блока. Для самокорректирования этих шести дорожек по одной возможной ошибке надо иметь еще четыре дорожки (это количество определяется по известной формуле теории информации $m \leqslant 2^k - k - 1$, $k = 4$). Для устранения двойной ошибки нужна еще одна дорожка. Итак, общее количество необходимых дорожек равно 11. Ближайший тип стандартной магнитной ленты имеет 12 дорожек при ширине ленты 19,05 *мм*. Двенадцатая дорожка может быть использована для хранения некоторой избыточной информации.

Рассмотрим теперь вопрос о корректировании ошибок.

Автор считает, что примерное количество одинарных ошибок равно примерно 24 ошибкам на рулон ленты.

Для выявления ошибок на 7 дорожках, несущих основную информацию, на 5 контрольных дорожках записываются контрольные числа следующего вида:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \quad i_2 + i_3 + i_4 + \quad + i_6 + i_7 + 1 \pmod 2\\
a_2 &= i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \quad + 1 \pmod 2\\
a_3 &= i_1 + i_2 + \quad + i_5 + i_6 + i_7 + 1 \pmod 2\\
a_4 &= i_1 + \quad + i_3 + \quad + i_5 + i_6 + \quad + 1 \pmod 2\\
a_5 &= \quad i_4 + i_5 + \quad + i_7 + 1 \pmod 2,
\end{aligned}$$

где i_j — двоичная цифра на j-й дорожке.

При считывании с ленты образуется 5 соответствующих контрольных сумм:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \quad i_2 + i_3 + i_4 + \quad + i_6 + i_7 + a_1 \pmod 2\\
s_2 &= t_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \quad + a_2 \pmod 2\\
s_3 &= i_1 + i_2 + \quad + i_5 + i_6 + i_7 + a_3 \pmod 2\\
s_4 &= i_1 + \quad + i_3 + \quad + i_5 + i_6 + \quad + a_4 \pmod 2\\
s_5 &= \quad i_4 + i_5 + \quad + i_7 + a_5 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Возможны следующие три случая:

1. Нет четных $s_i, i = 1,2,3,4,5$. В этом случае информация достоверна и не нуждается в корректировании.

2. Есть нечетное число четных s_i. Возникла ошибка на одной из дорожек.

3. Есть четное число (не нуль) четных s_i. Есть ошибка одновременно в двух дорожках.

Корректирование ошибок состоит в замене нуля на единицу и единицы на нуль. Библ. 8 назв.

Д. А. Поспелов

10554. Выставка электронных вычислительных машин. Новые разработки в области схем цифровых элементов, входного и выходного оборудования (Electronic Computer Exhibition. New developments in digital circuitry and input/output equipment), Wireless World, 1959, 65, № 1, 17—21 (англ.)

Обзор экспонатов выставки электронных вычислительных машин, проходившей в Лондоне в конце 1958 г. Отмечается широкое использование в схемах электронных цифровых вычислительных машин, транзисторов, ферритовых сердечников и панелей с печатным монтажом. Транзисторы типа ОС44 и ОС45 могут работать при частотах следования тактовых импульсов от 100 *кгц* до 1 *мгц*. Транзисторы ОС23 дают возможность формировать импульсы с амплитудой 1*а* при максимальной частоте следования 2,5 *мгц*. Среди входных и выходных устройств отмечается печатающее устройство «Ксероник» (Xeronic), работающее со скоростью 3000 строк в 1 мин. и устройство для автоматического чтения печатных текстов фирмы «Solartron». Запоминающее устройство на магнитной ленте фирмы «EMI Electronics» работает при скорости протяжки ленты порядка 2,5 *мсек*. В одной из моделей устройства скорость достигает 5 *мсек*. Длительность пуска и останова ленты составляет 5 *мсек*., а длительность реверса — 7 *мсек*.

А. В. Шилейко

10555. Простое приспособление быстродействующего печатающего устройства машины УНИВАК для печати выходных данных машины ИБМ-704. Кетчум (Low cost conversion adapts Univac high-speed prin-

ter to IBM-704 outputs. Ketchum Fred), Computers and Automat., 1958, **7**, № 11, 14—16 (англ.)

Описывается использование быстродействующего печатающего устройства машины УНИВАК-I для печати выходных данных вычислительной машины ИБМ-704 в Лаборатории излучений Калифорнийского университета. Печатающее устройство состоит из блока чтения магнитной ленты УНИСЕРВО, запоминающего блока на тиратронах и механического печатающего механизма, печатающего на бумажном листе строки по 120 знаков со скоростью 600 строк в 1 мин. Магнитные ленты машины ИБМ-704 выполняются на нейлоновой основе шириной 12,6 *мм* и наматываются в рулоны по 762 *м* в рулоне. На каждой ленте записывается 7 дорожек, методом без возвращения к нулю, при плотности 8 импульсов на 1 *мм*. Дорожки синхронизирующих импульсов нет. Используется двоично-десятичная система счисления. В машине УНИВАК-I используется металлическая лента шириной 12,6 *мм*, которая наматывается в рулоны по 457 *м* в рулоне. На каждой ленте записывается 8 дорожек, включая дорожку синхронизирующих импульсов; запись методом с возвращением к нулю при плотности 5 импульсов на 1 *мм*. Используется двоично-десятичная система с недостатком 3. Частота следования импульсов при чтении лент машины ИБМ-704 составляет 20 *кгц* и между группами слов оставляется промежуток в 19,1 *мм*. При чтении лент машиной УНИВАК частота следования импульсов составляет 12,8 *кгц*, а между группами слов оставляется промежуток 28,6 *мм*. Работы по приспособлению печатающего устройства для печати данных машины ИБМ-704 заключались в изменении скорости лентопротяжного механизма УНИСЕРВО, добавлении блока магнитных головок для чтения 7 дорожек, в использовании усилителей для чтения записи методом без возвращения к нулю, разработке для машины ИБМ-704 программы перевода из двоично-десятичной системы в двоично-десятичную систему с недостатком 3, введении дополнительного устройства для генерирования синхронизирующих импульсов и ряда операций по приспособлению лентопротяжного механизма к другому типу ленты. А. В. Шилейко

10556. Машина для автоматической регистрации числовой команды. Егер (Machine à pointer automatique à commande numérique. Jaeger J. J.), Mach. mod., 1956, **50**, № 569, 19—25 (франц.)

10557. Электростатическое чтение перфорированных материалов. Любкин (Electrostatic reading of perforated media. Lubkin Samuel), Convent. Rec. IRE 1954, **4**, 106—108 (англ.)

10558. Профилактическая программа обслуживания для больших электронных моделирующих устройств общего назначения. Сайкс (A preventive maintenance program for large general purpose electronic analog computers. Sykes R. P.), IRE Nat. Convent. Rec., 1958, **6**, № 4, 191—205 (англ.)

Описывается методика составления и выполнения регламентных работ для большой электронной вычислительной машины непрерывного действия. Для упорядочения профилактики разработана система технической документации, обеспечивающая учет выполненных работ и имевших место неисправностей, а также произведенных замен блоков. Приводятся фотографии и схемы поверочных устройств и краткие инструкции по поверке основных элементов устройства: электромеханизмов, операционных усилителей и потенциометров. И. Д. Алимов

10559. Обсуждение вопросов точности трансформаторных вычислительных машин. Уайлдфьюэр (A discussion of precission computer transformers. Wildfeuer D.), Electronic Inds and Tele-Tech, 1956, **15**, № 9, 70—72, 127—129 (англ.)

10560. Оптимальная программа для электронных моделирующих устройств. Герман (Optimales Programmieren für elektronische Analogie-Rechenmaschinen. Herrmann H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 160—161 (нем.)

10561. Расчетный стол из линейных элементов для газовых сетей Франции. Брем (La table linéaire du gaz de France. Brem F. R. de), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 443—449 (франц.; рез. англ.)

Для расчетов, связанных с проектированием и эксплуатацией газовых сетей Франции сооружен специализированный расчетный стол, в котором для моделирования газовых сетей используются линейные элементы (сопротивление).

Если выбрать электрический ток в качестве аналога потоку газа и считать, что падение напряжения эквивалентно потере давления и электрическое сопротивление — сопротивлению трубопровода движению газа, то уравнения, дающие связь между потоками газа, падениями давления в трубопроводах и сопротивлениями трубопровода протеканию газа, будут аналогичны уравнениям Кирхгоффа для электрических цепей.

Закон Ома ($\Delta V = IR$) не отражает явлений в трубопроводе, где падение давления, вызываемое потоком газа, равно $\Delta H = K\bar{Q}^{,82}$, где Q — расход газа.

В описываемом расчетном столе применены специально выполненные элементы, состоящие из сопротивлений и трансформаторов с переменным коэффициентом трансформации, позволяющие оператору быстро устанавливать необходимую величину сопротивления, дающую при данном токе такое падение напряжения, которое соответствует искомому падению давления в рассматриваемом участке газовой сети.

Расчетный стол оформлен в виде блоков с элементами и пульта измерений. Суммарная ошибка при расчетах на таком расчетном столе составляет в среднем 0,5—1,2% лишь для отдельных звеньев она достигает 3%. А. А. Крюков

10562. Расчетный стол технического училища штата Иова. Кол (The I. S. C. network analyzer. Cole Don, Jr), Iowa Engr, 1957, **58**, № 2, 30—32 (англ.)

Расчетный стол является моделирующим устройством, предназначенным для решения различных задач, связанных с проектированием и эксплуатацией электрических систем, а также для расчетов гидравлических сетей.

В качестве генераторных единиц, которых в расчетном столе 16 штук, используются электронные устройства, питающиеся от общего источника с номинальной частотой в 10 000 *гц*.

Амплитуда и фаза напряжения каждой генераторной единицы регулируется с панели управления.

Нагрузочные и прочие элементы расчетного стола представляют из себя переменные активные и реактивные сопротивления. Для замеров в расчетной схеме используются два комплекта измерительных приборов, что позволяет одновременно решать на расчетном столе две независимые задачи.

С помощью каждого комплекта измерительных приборов могут быть измерены напряжение и ток — по амплитуде и фазе, активная и реактивная мощность, проекции векторов напряжения или тока в заданной точке расчетной схемы на произвольные оси.

Для соединения различных элементов расчетного стола в заданную схему предусмотрены два независимых коммутационных поля.

Дальнейшее развитие расчетного стола намечено проводить в направлении увеличения числа генераторов до 24 и добавления к части генераторных единиц устройств, автоматически поддерживающих заданный поток активной мощности. А. А. Крюков

10563. Усовершенствованный расчетный стол, выполненный из трансформаторов (An advanced transformer analogue analyser), Electr. Times, 1958, 133, № 3471, 836—838 (англ.)

Основным преимуществом расчетного стола, в котором вместо обычных пассивных элементов *L*, *R* и *C* применены специальные трансформаторы, является возможность воспроизводить любым, практически произвольным элементом электрические характеристики, отвечающие исследуемому объекту. При этом общая погрешность не выходит за пределы 0,1%.

Такое расчетное устройство работает на частоте 50 *гц* и состоит из четырех идентичных блоков, каждый из которых имеет по 52 элемента. При воспроизведении сложной расчетной схемы блоки могут быть объединены; при простых схемах одновременно могут решаться четыре задачи.

Для производства измерений в расчетной схеме применяется комплект измерительных приборов, приключаемых через электронные усилители, чем устраняется влияние собственного потребления приборов на режим в исследуемой схеме, а так же специальное устройство, использующее принцип самобалансирующего измерительного мостика.

Для компенсации токов намагничивания трансформаторов используются специальные дополнительные электронные устройства, которые в комбинации с дополнительными обмотками трансформаторов обеспечивают необходимые ампер-витки намагничивания.

А. А. Крюков

10564. Вычислительное устройство для моделирования процесса передачи тепла. Фурнье, Фруадво (Appareil analogique pour l'étude des régimes thermiques variables. Fournier A., Froidevaux L.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 383—384. Discuss., 384 (франц.; рез. англ.)

Для исследования явлений, связанных с передачей тепла и изменением количества переданного тепла во времени, используется специальный электрический расчетный стол — аналог.

Уравнения, описывающие процесс передачи тепла и изменение потока тепла во времени, аналогичны уравнениям, описывающим изменение тока в длинной линии, образованной из цепочки активных сопротивлений и емкостных проводимостей.

На использовании такой аналогии основана работа описываемого вычислительного устройства. Подбором масштабных множителей устанавливается соотношение между временами протекания электрического процесса в вычислительном устройстве и самого исследуемого явления.

Величины напряжений, замеряемые в расчетной электрической схеме, подаются на экран осциллографа и могут быть сфотографированы.

А. А. Крюков

10565. Малогабаритная аналоговая математическая машина МН-10 на полупроводниках. Петров Г. М., Ушаков В. Б., Приборостроение, 1959, № 1, 10—14

Приведено описание малогабаритной аналоговой математической машины МН-10, построенной полностью на полупроводниках, первый образец которой изготовлен в декабре 1957 г. на 653 полупроводниковых диодах и триодах. На МН-10 могут решаться конкретные задачи с той же точностью, что и на ламповых аналоговых машинах. Ее основные легкосменные узлы: усилитель УПТ-20; блок перемножения БП; нелинейный генератор БН и источник питания ЭСВ-10. Конструктивно машина оформлена в виде двух основных блоков: решающего блока, представляющего собой переносный настольный прибор, размером 570×400×350 *мм* и весом 40 *кг* и переносного блока источника питания весом 15 *кг*. В схему машины входят 24 операционных усилителя, из которых 6 используются для интегрирования, 6 — для суммирования, 6 — для перемены знака и 6 — в схемах нелинейных блоков. Для удобства эксплуатации сеточные цепи суммирующих и интегрирующих операционных усилителей выведены на коммутационное поле. При этом 36 входных сопротивлений можно распределить между этими усилителями в соответствии с видом решаемой задачи. Выполнение всех нелинейных операций в машине МН-10 осуществляется одним общим методом — введением нелинейных сопротивлений на входе и в цепь обратной связи операционного усилителя. Необходимые нелинейные зависимости аппроксимируются кусочно-линейными кривыми, получающимися с помощью диодных нелинейных ячеек. Имеется 8 нелинейных блоков для выполнения четырех операций перемножения или генерирования четырех нелинейных функций от одной зависимой переменной, состоящих из ряда диодных ячеек с потенциально заземленной схемой и делителей опорных натяжений, и 6 нелинейных диодных ячеек для воспроизведения нелинейных зависимостей, имеющих вид петли гистерезиса, характеристики ограничения координат или зоны нечувствительности. На основе потенциально заземленных диодных ячеек легко получают типовые нелинейные зависимости, встречающиеся при моделировании. Все нелинейные блоки имеют хорошие температурные и частотные характеристики. Погрешность перемножения не превышает 1—1,5%. Схема машины может находиться в трех основных режимах: 1) контроль «нулей» усилителей постоянного тока; 2) настройка величин передаточных коэффициентов усилителей и функциональных зависимостей на нелинейных блоках, а также задание начальных условий; 3) интегрирование. Результаты решения задачи при интегрировании можно получать на электронно-лучевом индикаторе с катодной трубкой или на шлейфовом осциллографе. Операционный безламповый усилитель постоянного тока на стандартных полупроводниковых элементах комбинированного типа имеет различные каналы усиления для высокой и низкой частот, питается от безлампового блока питания ЭСВ-10 на полупроводниках. Частота преобразованного сигнала 1 *кгц*. Схемы модулятора и демодулятора построены на полупроводниковом триоде; величина его обратного тока от 0,1 до 1 *мка* и напряжения э. д. с. от 0,2 до 2 *мв*. Коэффициент усиления всего низкочастотного канала в среднем около 500; коэффициент усиления высокочастотного канала в среднем 10 000. Блок ЭСВ-10 питается от однофазной сети переменного тока 220 *в*, 50 *гц*. Его потребление от сети около 100 *ва*. Для экспериментальной проверки первого образца решено 20 задач. Максимальное значение погрешности машины 3—5% по отношению к напряжению 30 *в* (шкала машины).

И. Ф. Шелихова

10566. Простое моделирующее устройство для определения количества газа в газопроводе. Ларберг (Simple analog computer finds line pack. Larberg H. A.), Oil and Gas J., 1958, 56, № 40, 229, 231, 233 (англ.)

Емкость линии газопровода обычно используется в качестве буферного резервуара для компенсации изменений расхода газа у потребителей. Для этого газ в газопроводе поддерживается под определенным давлением с помощью ряда расположенных по его длине компрессорных станций. Для регулирования расхода газа диспетчер должен знать количество его во всех секциях газопровода. Описываемое моделирующее устройство предназначается для вычисления количества газа в секциях газопровода по известным давлениям газа. Устройство представляет собой модель постоянного тока. Величины давления устанавливают-

ся по шкалам двух вольтметров. Коэффициенты, характеризующие линию, вводятся с помощью ключей. Величина резерва газа и приращения этого резерва отсчитывается по шкалам двух амперметров. Устройство рассчитано для определения количества газа в 48 секциях газопровода. Оно имеет размеры 750×900×400 *мм* и питается от источника постоянного тока. А. В. Шилейко

10567. Трансформаторная модель для решения системы линейных алгебраических уравнений. Даубе Я. Я., В сб.: Межвуз. конференция по применению моделирования в электротехн. задачах и матем. моделирования. М., 1957, 183

Сообщается о разработке простого трансформаторного моделирующего устройства для решения систем алгебраических уравнений. Устройство обладает точностью порядка 0,1%. Прибор предназначается для использования на литейных заводах цветной металлургии. А. А. Крюков

10568. Применение усилителей с вибрационной стабилизацией, собранных на печатных схемах, в новом моделирующем устройстве панельного типа (Chopper stabilized pc amplifiers in new desktop analogue computer), Automat. Control, 1958, **8**, № 6, 90 (англ.)

Сообщается о применении в моделирующем устройстве усилителей, собранных на печатных схемах и имеющих вибропреобразователи. Коэффициент усиления таких усилителей свыше $5 \cdot 10^7$, дрейф нуля в варианте инвертирования не более 200 *мкв* в 1 день. За счет их применения построено малогабаритное и дешевое моделирующее устройство. И. Д. Алимов

10569. Разработка широкополосного электронного интегратора: Ходара (High frequency wide band electronic integrator design. Hodara Henri), Electron. Inds, 1958, **17**, № 10, 96—100 (англ.)

Описывается метод компенсации погрешности электронного интегратора с однокаскадным операционным усилителем, имеющей место при частотах порядка 1 *мгц* за счет паразитной выходной емкости усилителя. Метод заключается в шунтировании небольшой емкостью сопротивления, входящего в состав интегрирующей *C*-цепочки. Выводятся расчетные формулы для определения величины этой емкости. А. В. Шилейко

10570. Моделирующее устройство для Британской транспортной комиссии (An analogue computer for the British Transport Commission), Electron. Engng, 1958, **30**, № 366, 505 (англ.)

10571. Моделирующее устройство для автоматического определения системы колебательных кривых. Шэнь, Лиссер (An analogue computer for automatic determination of system swing curves. Shen D. W. C., Lisser S.), Commun. and Electronics, 1954, № 15, 475—483 (англ.)

10572. Моделирование трех функций при помощи пленки переменной плотности (Varaible density film yields three functions), Control Engng, 1956, **3**, № 5, 107 (англ.)

10573. Для решения технических проблем моделирующие устройства предпочитаются цифровым вычислительным машинам. Бридон (Analogue vs digital techniques for engineering design problems. Breedon D. B.), Electr. Engng, 1956, **75**, № 9, 814—816 (англ.)

10574. Вычислительная машина непрерывного действия. Гавилан (Calculador analógico compendiado. Gavilan Eduardo), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1956, **5**, № 13, 36—41 (исп.)

На примере дифференциального анализатора фирмы «Donner Scientific» в популярной форме излагаются принципы построения вычислительных машин непрерывного действия. О. В. Бачин

10575. Преподавание курсов вычислительных машин в университетах Канады. Глинский (Computer education in Canadian universities. Glinski George), Electron. and Communs, 1958, **6**, № 9, 66—68 (англ.)

Исполнилось десять лет со дня основания первого вычислительного центра при университете в Торонто (Канада). Этому событию была посвящена Первая канадская конференция по вычислениям и обработке данных, которая состоялась 9—10 июня 1958 г. в г. Торонто.

Десять лет назад основное внимание университетов в области вычислительной техники было направлено на исследование и развитие узлов и элементов вычислительных машин и систем. Позднее основные усилия были сконцентрированы на развитии более совершенных методов программирования, исследованиях в области численного анализа и изучения возможностей применения вычислительных машин для научных, технических и коммерческих целей.

Основными задачами университетского образования в настоящее время являются, по мнению автора, следующие три:

1) обучать использованию вычислительных машин в качестве инструмента, помогающего решению различных проблем;

2) развивать новые методы использования существующих вычислительных машин;

3) совершенствовать более мощные средства решения задач.

Совершенно необходимым считается практическое обучение студентов работе на вычислительных машинах в университетском вычислительном центре.

Ожидается, что к 1960 г. в Канаде будет находиться в эксплуатации по меньшей мере 100 вычислительных машин средних размеров и 10 больших машин. Поэтому перед Канадскими университетами встает вопрос о создании кадров для работы на этих машинах. Приводится примерный подсчет количества людей, необходимого для этой работы. Предполагается, что в среднем на одну вычислительную машину средних размеров требуется 12 математиков (аналитиков, программистов и кодировщиков), 2 оператора и 2 человека технического обслуживающего персонала. На одну большую машину требуется 60 математиков, 10 операторов и 10 человек для технической эксплуатации. Исходя из этих цифр, для 100 средних и 10 больших машин к 1960 г. потребуется 2400 человек. Кроме того, необходимы лица, занимающиеся научно-исследовательской работой и новыми разработками, а также примерно 100 человек для работы в качестве технических экспертов федерального правительства. Поэтому потребность в кадрах к 1960 г. возрастет до 3000 человек. Предполагается, что 1510 человек из этого числа должны иметь университетское образование.

Автор считает, что ежегодный численный рост кадров в области вычислительной техники составит 10% в ближайшие несколько лет. Поэтому в 1960 г. понадобится 151 специалист с университетским образованием, из которых 84 должны иметь математическую и коммерческую специальность, а 67 — инженерную. Однако, в университете в Торонто слушают курс «Цифровая техника» лишь 20 студентов, а в университете Мак-Гилл тоже 20 студентов слушают курс «Вычислительные машины дискретного и непрерывного типа». В то же время в университете в Торонто курс «Программирование на цифровых вычислительных машинах» слушают 80 студентов, а в университете Мак-Гилл 40 студентов слушают курс «Обработка данных на электронных устройствах». Таким образом, к 1960 г. в Канаде возможно будет недостаточное количество инженеров и

избыточное количество математиков для вычислительных машин.

В настоящее время в некоторых университетах Канады читаются курсы для повышения квалификации инженеров и математиков-программистов. Г. П. Зеленкевич

10576. Отчет о работе вычислительного центра Массачузетского технологического института (Progress Report. Mass Inst. Technol. Comput. Center, 1957, № 1, V, 53 pp.) (англ.)

Центр предполагает издавать такие отчеты 2 раза в год. В отчет включены следующие разделы: 1) история, 2) организация, 3) средства, 4) оборудование, 5) правила для выполнения работ, 6) исследовательская программа, 7) учебная работа и т. д.

10577. Вычислительные машины в колледжах (Colleges and their computers), Technology, 1958, **2**, № 9, 258 (англ.)

10578. Кто чем занят в области вычислительных машин (Who's who in the computer field), Computers and Automat., 1958, **7**, № 11, 27—28 (англ.)

Приводится список специалистов: конструкторов, логиков, математиков и т. д., работающих в области вычислительной техники. Указана фамилия специалиста, его возраст, образование, узкая специальность, стаж работы по данной специальности и место работы. Список включает 45 человек и представляет дополнение к предыдущим. А. В. Шилейко

10579. Цифровые вычислительные машины. Килберн (Digital computing machines. Kilburn T.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1959, **B106**, № 25, 26 (англ.)

Резюме речи, произнесенной в Манчестере 28-го октября 1958 г.

Отмечается существенный рост скорости вычислительных машин. Одна из первых машин, установленная в Манчестерском университете 7½ лет тому назад, проработала за это время около 30 000 час. Новейшая машина может выполнить такое количество вычислений за 1 день. Приводятся примеры применения вычислительных машин к проблемам как прикладного, так и академического характера. А. К. Загорье

10580. Научные и промышленные применения электронных вычислительных машин. Корганов (Applications scientifiques et industrielles des machines à calculer électroniques. Korganoff André), Techn. mod., 1958, **50**, № 12, 515—519, XVIII (франц.; рез. англ.)

Описываются методы программирования электронных цифровых вычислительных машин. Рассматриваются операции условного перехода, циклические программы, использование стандартных подпрограмм и т. д. Математические задачи, решаемые на электронных цифровых вычислительных машинах, разделяются на 2 класса: научные и промышленные. Исследуются отличительные особенности обоих классов. А. В. Шилейко

10581. Обработка информации на электронных вычислительных машинах. Золнер (Data, decision, and EDPM. Zoellner M. Scott), J. Mach. Account., 1958, **9**, № 9, 4—6 (англ.)

Статья общего характера.

10582. Цифровые вычисления в двоичной системе счисления. Грант (Binary digital computing. Grant Philip), Mod. Lithographer, 1958, **54**, № 12, 13—14 (англ.)

В популярной форме описывается двоичная система счисления и основные методы программирования электронных цифровых вычислительных машин. А. В. Шилейко

10583. Математика с миллионами. Хильберт (Matematik med miljoner. Hilbert Erik), Ansvar, 1958, **5**, № 3, 13—20 (шведск.)

Популярная статья, посвященная цифровым машинам. Кратко излагается история развития вычислительной техники. Изложены принципы работы цифровых машин и программирования на них. Д. А. Поспелов

10584. Цифровая автоматика. Клейн, Вильямс, Морган (Digital automation. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1956, **29**, № 6, 1109—1117 (англ.) См. также РЖМат, 1957, 1928, 3641.

10585. Вычислительные машины приобретают новое значение. Платен (Rechenmaschinen gewinnen neue Bedeutung. Platen Jürgen von), Volkswirt, 1958, № 48, Beil., 7 (нем.)

10586. Век вычислительных машин (The computer age), Business Week, 1956, № 1388, 53—56, 59—62 (англ.)

10587. Моделирующие устройства и цифровые вычислительные машины. Бридон (Analog and digital computers. Breedon D. B.), Mach. Design, 1956, **28**, № 25, 140—142, 144 (англ.)

10588. О различии между цифровыми вычислительными машинами и моделирующими устройствами (Über den Unterschied zwischen Digital- und Analogrechner), Schweiz. Maschinenmarkt, 1959, **59**, № 3, 12—16 (нем.)

Популярная статья о принципах действия и применении цифровых вычислительных машин и моделирующих устройств. И. Ф. Шелихова

10589. Новый табулятор «Самастроник» (La nouvelle tabulatrice Samastronic), Annuaire comptabil. et mécanogr., 1957 (франц.)

См. РЖМат, 1958, 9351.

10590. Метод матричного перемножения, матричного обращения и проблемы регулирования при помощи пробивания карт. Краруп, Свейгор (A method for matrix multiplication, matrix inversion, and problems of adjustment by punched card equipment. Krarup T., Svejgaard Bj. Geod. inst. medd., 1956, № 31, 31 pp). (англ.)

10591. Видоизменение планиметра для обработки интегральных кривых. Рандолф (Modification of a planimeter for the construction of integral curves. Randolph M. L.), Rev. Scient. Instrum., 1958, **29**, № 9, 796—797 (англ.)

Сообщается о видоизменении стандартного планиметра с целью повышения его чувствительности и точности. На измерительной планке стандартного прибора делается несколько добавочных шарнирных углублений. В любое из них может быть вставлена дополнительная измерительная планка, причем полученный результат измерения необходимо умножать на соответствующий коэффициент, зависящий от того, какое из добавочных шарнирных соединений используется.

Недостатком стандартного прибора является необходимость сложений или вычитаний результатов нескольких последовательных измерений, причем при каждом считывании возможны субъективные ошибки чтения результатов. В видоизмененном планиметре введена небольшая защелка в виде стальной пружины, в результате чего промежуточные измерения фиксируются автоматически и складываются или вычитаются в зависимости от направления обмеров кривых. Оператор производит считывание лишь окончательного результата. Г. П. Зеленкевич

10592. Кулиса нужна в качестве вычислительного прибора и инструмента для черчения. Калверт (The need for the sector as a computing and drawing instrument. Calvert H. R.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 168—169 (англ.)

10593. Обучаемые машины (Learning Machines.), Wireless World, 1959, **65**, № 1, 8—9 (англ.)

Кратко излагается содержание доклада др. Эндрью (Andrew A. M.), прочитанного на симпозиуме по механизации мыслительных процессов, организованном Национальной физической лабораторией (Англия). Отмечается разница между детерминистическими машинами, т. е. машинами, все действия которых строго определяются наперед заданным набором правил, и вероятностными машинами, действия которых в определенной степени мо-

гут быть случайными. Рассматривается схема системы автоматического регулирования, состоящей также, как и обычная система автоматического регулирования, из измерительных и исполнительных органов, но имеющей также дополнительные органы, случайно изменяющие режим работы системы. Обычно таким случайным изменениям подвергаются соотношения между сигналами измерительных органов и управляющими сигналами. Если в результате одного из таких произвольно выбранных режимов управления измеряемая величина проявляет тенденцию к изменению в нужном направлении, управляющее воздействие усиливается. В противном случае вырабатывается запрещающее воздействие. В качестве примеров обучаемых устройств рассматриваются устройства, следящие за некоторой изменяющейся величиной, и устройства, распознающие знаки. К первым относится модель черепахи, автоматически движущейся вдоль сложной границы между черным и белым и приспосабливающейся к всевозможным изменениям условий. К устройствам второго типа относятся устройства для автоматического чтения печатного текста, устройства для печати с голоса и т. п. Отмечается, что эти устройства при построении их по детерминистическому принципу обладают ограниченными возможностями, так, например, при наличии жесткой программы они не смогут распознать перевернутую букву. Значительно большими возможностями в этом смысле обладают вероятностные машины.

А. В. Шилейко

10594 Об алгоритмизации и программировании игры в домино. Первин Ю. А., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 1, 31—33

Описывается алгоритм, который может быть использован для замены вычислительной машиной от одного до всех четырех участников игры в домино. Алгоритм по выбору камня для хода из нескольких возможностей разбит на 4 логически самостоятельных алгоритма, называемых тактиками. Включением той или иной тактики заведует программный блок переключения тактик. Выбор одной из четырех тактик осуществляется в зависимости от того, кто из четырех игроков обладает в данном случае правом первого хода. Выбор камня для хода из нескольких возможностей начинается до работы тактик. В алгоритме игры предусмотрен ряд проверок, называемых предтактиковыми, которые работают перед каждым выбором хода независимо от того, по какой тактике этот ход совершается (например, проверяется возможность выбора хода). В ряде участков программы приходится «угадывать», какие камни имеют остальные игроки. Для этого факту наличия данного камня у игрока присваивается определенная вероятность. В начале игры эти вероятности равны, а в процессе игры изменяются в зависимости от выставленных камней и поведения игроков. Пересчетом вероятности занимается блок наблюдений. Экспериментальная проверка алгоритма на машине «Стрела» дала хорошие результаты. А. В. Шилейко

10595. Электронная рулетка на вычислительной машине (Electronic roulette demonstrates computers), Computers and Automat., 1957, **6**, № 3, 13 (англ.)

Сообщение об использовании машины «Бендикс G-15» во время одной из выставок машин в США для игры в рулетку. О. В. Бачин

10596. Биологические машины. Мак-Каллок (Biological computers. McCulloch Warren S.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 3, 190—192 (англ.)

Функционирование нервной системы человека сравнивается с работой математической машины. Нервная система человека содержит 10^{10} нервных клеток — нейронов, каждый из которых имеет тело и ведущий ствол — аксон. Разность потенциалов между центральной частью нейрона и его поверхностью составляет 0,07 *в*. Емкостное сопротивление нейрона равно 1 *мкф* на кв. *см*, а активное сопротивление нелинейно возрастает от 0 в середине до большой величины на поверхности. По нейрону проходят импульсы тока, имеющие длительность от 1 до 150 *мсек*., и передний и задний фронты порядка 0,5 *мсек*. Импульсы, проходящие по аксонам одного нейрона, могут воздействовать на соседние нейроны, запрещая или возбуждая в них импульсы. Те места, где происходят такие взаимодействия, называются синапсами. Таким образом, строение нервной системы похоже на схему математической машины, содержащей много реле и работающей по принципу «да», «нет». Кроме того, подобно стабилизированной следящей системе нервная система содержит огромное число отрицательных обратных связей, обеспечивающих динамическую устойчивость всех частей тела человека. Действие нервной системы рассматривается на примере работы мозжечка, управляющего движениями человека.

Информация передается по нейронам в двух формах: параллельным кодом и последовательным кодом. Для передачи информации параллельным кодом характерно наличие очень большого числа каналов, соединяющих чувствительный орган с управляющим центром головного мозга (например, от глаза в мозг идет около миллиона аксонов), поэтому ошибка в нескольких каналах не влияет на верность передачи информации. Если информация передается последовательным кодом, то по нейрону проходят импульсы, частота которых пропорциональна логарифму интенсивности возбуждения, логарифму 1-й производной и иногда 2-й производной интенсивности возбуждения. В некоторых случаях при отсутствии информации по нейрону передаются импульсы фиксированной частоты, которая изменяется в ту или другую сторону в зависимости от появляющейся информации.

А. Н. Чуйкин

10597. Преобразование устной английской речи в написанные слова. Беркли (Translating spoken english into written words. Berkeley Edmund C.), Computers and Automat., 1956, **5**, № 3, 9 (англ.)

Сообщается о работах, проводимых в США, по вопросам преобразования математическими машинами устной речи в печатный текст.

В 1954 г. была разработана машина, которая могла отличать согласные звуки от гласных, причем результат был верным в 90% случаев.

В январе 1956 г. в Институте физики в Нью-Йорке была сконструирована электронная установка, различающая согласные *F*, *Sh* и *S*. Принцип действия установки основан на различии звуковой частоты при произношении различных звуков. Проводятся работы над прибором, который сможет различать звуки *P*, *T* и *K*.

Аналогичные работы проводятся в лабораториях фирмы «Бэлл» (Bell Telephone). Принципиальное отличие работ, проводимых в Массачусетском технологическом институте заключается в том, что при распознавании звуков основой является не сравнение с образцом, а различимая разница при произношении звуков. А. Н. Чуйкин

10598. Использование электронной машины для анализа и синтеза в языкознании. Агрикола (Elektronische Analyse und Synthese in der Sprachwissenschaft. Agricola Erhard), Forsch. und Fortschr., 1958, **32**, № 4, 110—115 (нем.)

Рассматриваются два метода анализа немецкого предложения для машинного перевода: метод Освальда—Флетчера (Oswald V. A., Fletcher St. L., Mod. Lang. Forum, 1951, **36**, № 3-4, 81—104) и метод Ингве (V. H. Ingve, в книге Лока, Бута (реф. 10602К). Отмечается, что эти методы рассчитаны лишь на «нормальный» порядок слов в немецком языке, который не вполне отражает стиль современных немецких текстов, и потому нуждаются в значительном усовершенствовании. Высказываются некоторые предположения относительно возможности анализа текста с помощью машины, причем большое внимание уделяется вопросам стиля. Намечаются проблемы, с которых следует начать немецким

ученым работу над машинным переводом. Предлагается начать с тщательного анализа большого количества текстов. Подчеркивается, что сами методы анализа не следует «механизировать», они должны оставаться лингвистическими. Анализ для машинного перевода позволит по-новому взглянуть на языкознание, тем не менее не следует забывать, что конечной целью лингвистических изысканий в этой области является, по мнению автора, дальнейшее развитие языкознания, изучение структуры и содержания языка. И. К. Бельская

10599 К. Электронные вычислительные машины. (Электронаин ашвич мекенанер). Лебедев С. А., Ереван, Айпетрат, 1957, 52 стр., илл., 65 к. (арм.)

10600 К. Вычислительная машина 602-А (Calculatrice, type 602-A. Paris, Cie I. B. M. France, 1958, 99 p., ill.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 5, 105 (франц.)

10601 К. Электронная вычислительная машина 626 (Calculatrice électronique, type 626. Paris, Cie I. B. M. France, 1958, 93 p., ill.) Bibliogr. France, 1959, **148**, № 5, 105 (франц.)

10602 К. Машинный перевод с одного языка на другой. Лок, Бут (Machine translation of languages, Locke William N., Booth A., Donald. Eds. 2nd print. S. l., Technol, Press Massachusetts Inst. Technol.; New York, John Wiley and Sons, Inc; London Chapman and Hall, Ltd; 1957, xii, 243 pp.) (англ.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

10603. Некоторые современные проблемы вычислительной математики. Лаасонен (Eräitä numeerisen matematiikan nykyisiä ongelmia. Laasonen Pentti), Arkhimedes, 1958, № 2, 36—40 (финск.)

Краткое описание некоторых типов задач, решаемых современными быстродействующими вычислительными машинами. А. И. Попов

10604. Применение автоматических вычислительных машин для получения данных при лечении облучением. Цзянь (The application of automatic computing machines to radiation treatment planning. Tsien K. C.), British. J. Radiol., 1955, **28**, № 332, 432—439 (англ.)

Рассматривается задача определения в любой точке исследуемой области дозы радиации, получающейся в результате действия нескольких облучающих полей рентгеновских лучей, направленных под различными углами к области. Эта задача возникает в рентгенотерапии при лечении опухолей облучением.

Для решения задачи составляется система таблиц, в которых приводятся значения дозы радиации в ограниченной области от действия рентгеновского излучения, имеющего различные направления. В таблицах указаны величины доз излучения от поля каждого направления для выбранного и фиксированного числа точек. При составлении таблиц значения доз радиации для каждой точки определяются либо экспериментально, либо вычисляются по методу Мередита и Ниари. Затем таблицы наносятся на перфокарты и закладываются в табулятор. Если в машину ввести координаты действующих на данную опухоль полей излучения и координаты тех точек, дозу излучения в которых необходимо узнать, табулятор выберет необходимые перфокарты, просуммирует дозы радиации от действующих полей излучения в указанных точках и выдаст требуемые результаты.

А. Н. Чуйкин

10605. Ежедневный автоматический контроль состояния и распределения заданий электронным вычислительным устройством. Крёйцер (Tägliche vollautomatische Bestandsüberwachung und Auftragsdisposition mit einer elektronischen Rechenanlage. Kreuzer Klaus), Maschinenmarkt, 1958, **64**, № 16-17, 27—30 (нем.)

Описывается система обработки данных и управления производственными процессами с целью их полной автоматизации. Указывается, что рентабельность больших электронных машин, применяемых для бухгалтерских расчетов и управления производственными процессами, определяется в основном экономией, получаемой за счет их быстродействия и возможности их эксплуатации в течение продолжительного времени под наблюдением небольшого числа высококвалифицированных специалистов; поэтому задачу внедрения новых схем управления следует решать, в первую очередь, для тех процессов, которые немедленно дадут максимальный экономический которые немедленно дадут максимальный экономический эффект. Указывается, что большие электронные вычислительные машины более экономичны в том случае, если их нагрузка состоит из ограниченного числа различных заданий и программы используется много раз.

Подробно описано машинное оборудование и техника обработки информации при так называемом учете заказов «по точкам». Оборудование состоит из четырех специализированных перфорационных устройств для ввода и вывода данных и цифровой вычислительной машины с оперативной памятью на магнитном барабане, а также трех блоков с магнитной лентой для запоминания многочисленных данных о заказах и их выполнении, так как обработке подвергается одновременно большое количество информации. Блоки с магнитной лентой управляются специальным устройством. Для вывода результатов вычислений применены перфолента и печатающее устройство. Исходные данные пробиваются на перфокарты заказов для проводки по бухгалтерским и инвентарным книгам, на перфокарты статистики, инвентаризации, прихода, сбыта. На первый блок с магнитной лентой записываются старые запасы, на второй — новое наличие, на третий — программы машинной загрузки. На магнитном барабане хранится программа вычислений и логических действий. Перед началом обработки все данные, характерные для детали или изделия определенного номера, переносятся на ленту в виде «инвентарной описи», которая занимает на ленте 1,75 *см*. При длине ленты 732 *см* можно записать с интервалом 2 *см* 19280 таких «описей». Все данные, относящиеся к каждой детали, изготовленной на производстве, наносятся на ленту программы счета для каждого рабочего хода машины в виде так называемого «комплекта», который занимает 1,25 *см* на ленте. При длине 732 *см* можно хранить на ленте 22246 таких «комплектов». Если для каждой детали в среднем требуется 10 рабочих ходов, то на блок с магнитной лентой может быть записано 2200 программ. Предусмотрена возможность внесения в процесс обработки исправлений данных, которые нигде более не встречаются. Группа из трех человек за 8 дней разрабатывает трехнедельную точную технологию управления производством с точной формулировкой всех организационных особенностей в блок-схеме программы и выполняет непосредственное программирование. Соответствующие вычислительные операции для многих тысяч деталей и проводки по бухгалтерским книгам выполняются машиной в короткое время. Обработка 1000 карт при наличии 15 000 деталей и 2500 программ производится машиной, включая печать и пробивку, за 1 час. В заключение автор замечает, что применение метода учета заказов «по точкам» дает большую степень автоматизации, однако, наиболее ответственная работа выполняется человеком, который должен иметь очень высокую квалификацию. Приводятся фото, установки и схема программы. И. Ф. Шелихова

10606. Использование электронных вычислительных машин в процессе подготовки работы на предприятии.

Беккер (Arbeitsvorbereitung mit elektronischen Rechenmaschinen. Becker Horst), Maschinenmarkt, 1958, **64**, № 103-104, 79—80 (нем.)

В популярной форме освещается работа электронных вычислительных машин вообще. Рассматривается пример использования машины ИБМ-650 в производстве для координирования поставок, заказов, взаимных расчетов, учета потребностей в сырье и т. п. А. К. Загорье

10607. Дискуссия по использованию электронного оборудования для обработки данных. Мерриман, Каминер, Барман, Эванс, Дьюрант (A discussion on the use of electronic data processing equipment. Merriman J. H. H., Caminer D. T., Barman H. L., Evans D., Durant H.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, A120, № 3, 291—307 (англ.)

10608. Применение автоматических вычислительных машин в статистике. Токер (The application of automatic computing machines to statistics. Tocher K. D.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 166—177. Discuss., 177—178 (англ.)

10609. Перспективы использования вычислительных машин в технике. Хелуэг (The perspective of computers in engineering. Helweg T. W.), Louisiana Engr, 1958, **44**, № 2, 88, 90—92, 94, 96—98 (англ.)

Статья общего характера.

10610. Как мы используем электронные вычислительные машины в технике. Гриффитс (How we use our electronic computer for engineering design. Griffiths Geoffrey B.), Process Control and Automat., 1958, **5**, № 11, 476—479 (англ.)

Статья общего характера.

10611. Вычислительные машины в управлении производством. Ганнинг (Computers in process industry control. Gunning William F.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, **7**, № 2, 129—133, Discuss., 150—155 (англ.)

Статья общего характера.

10612. Некоторые применения электронных цифровых вычислительных машин к основным исследованиям в нефтяной промышленности. Барнетт (Some applications of electronic digital computers to fundamental research in the petroleum industry. Barnett M. P.), J. Inst. Petrol., 1957, **43**, № 400, 108—111 (англ.)

10613. Практические применения электронных вычислительных машин. Мерриман (Business applications of electronic computers. Merriman J. H. H.), Process Control and Automat., 1958, **5**, № 11, 472—475, 479 (англ.)

Статья общего характера.

10614. Быстродействующая вычислительная машина применяется для определения сопротивления моста ударам. Луни (High-speed computer applied to bridge pimact. Looney Charles T. G.), J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1958, **84**, № 5, Part 1, 1759/1—1759/41 (англ.)

10615. Тенденции в области вычислительных машин для управления производственными процессами в СССР. Ушаков (Soviet trends in computers for control of manufacturing processes. Ushakov V. B.), Instrum. and Automat., 1958, **31**, № 11, 1810—1813 (англ.)

Приводятся данные советских моделирующих машин МН-10, МН-11 и МН-12, машины для решения уравнений в частных производных ЭИ-12 и машины для решения гидравлических задач ЭИС. А. В. Шилейко

10616. Области применения электродинамической модели. Робер (Le «Microréseau». Études qu'il permet d'entreprendre. Perfectionnements récents. Robert R.), Onde électrique, 1956, **36**, № 353-354, 787—790, 44, (франц.; рез. англ.)

См. РЖМат, 1958, 4322.

10617. Применение моделирующего устройства к асинхронному двигателю. (Analoque computer applied to induction-motor design), Engineering, 1958, **186**, № 4822, 188 (англ.)

10618. Применение моделирующего устройства в изучении дикамического процесса. Каули (The application of an analog computer to the measurement of process dynamics. Cowley P. E. A. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1956, № IRD-20, 14 pp., ill.) (англ.)

10619. Решение нелинейных колебательных систем с двумя степенями свободы на электронном моделирующем устройстве. Аткинсон (Electronic analog computer solutions of nonlinear vibratory systems of two degrees of freedom. Atkinson C. P.), J. Appl. Mech., 1956, **23**, № 4, 629—634 (англ.)

См. также: 10507, 10510 К.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Азбелев Н. В. 10475
Александров А. Д. 9995, 10467
Аменздде Ю. А. 9935
Антонюк Г. К. 9932
Аракелян О. А. 9661
Арнольд Г. А. 9886
Арутюнян В. М. 10139
Арутюнян Н. Х. 10095
Афанасиадис 10255

Б

Бабаев Г. 9728
Бабакова О. И. 9934
Баблоян А. А. 10063
Балуев А. Н. 10175
Банах С. 10121 К
Баскаков В. А. 9885
Батков А. М. 10098
Башев В. А. 9849
Бейтмен Г. 10086 К
Белинский В. А. 10118 К
Белоцерковский О. М. 10481
Белынский В. В. 10538
Беляев Ю. К. 10207
Бермант А. Ф. 10117 К
Билимович Ан. Д. 9635
Блекуэлл Д. 10292 К
Бондаренко Л. И. 10052
Бородин Л. Ф. 10210
Бояринов В. С. 10041
Бредихина Е. А. 9907
Бродский М. С. 10161
Брук И. С. 10538
Брумберг В. А. 10028

В

Вакарчук Б. С. 10358, 10360
Ван Юань 9729
Ведерников В. И. 10416
Векленко Б. А. 10078
Вишик М. И. 9986
Волков В. И. 9911—9913
Волков Ю. А. 10467
Волнина Н. 9779
Воробьев О. С. 10043

Г

Габададзе Н. 10362
Ганзбург И. М. 9908
Гершик М. А. 10292 К
Глазунова Н. Т. 10087 Д
Голоскоков Е. Г. 9985
Голубев В. А. 9756
Гольдберг Ю. И. 9656
Гордеев К. Н. 1033 К
Горнштейн М. С. 10485
Гребенюк Д. Г. 9746
Грекулова А. Г. 9659
Гуляев М. П. 10033
Гурвич М. А. 10091
Гу Чао-хао 10432

Д

Данилюк И. И. 9962
Даубе Я. Я. 10567
Дезин А. А. 10012
Демидович Б. П. 10122 К
Димитров Д. 9940
Диткин В. А. 10145
Добрушин Р. Л. 10212, 10213
Долкарт В. М. 10538
Дородницын А. А. 10482
Дундученко Л. Е. 9927
Дюбюк А. Ф. 10076

Е

Евграфов М. А. 10152
Ерохин В. 9881, 9920
Ешуков Л. Н. 9979

Ж

Жидков Г. В. 9888
Житомирский Я. И. 10020

З

Загускин В. Л. 10459
Зайцева М. И. 9800
Зарецкая К. А. 10359
Зеликин М. И. 9988
Зимарев А.Н. 10549

И

Ивницкий Т. Г. 10373
Иосифьян А. Г. 10538
Исаева Л. С. 10032

К

Каган Б. М. 10538
Калужнин Л. А. 9799
Каляев А. В. 9965, 10037
Каменский Н. П. 10427
Канторович Л. В. 10290
Карапетян А. Х. 10294
Кармазина Л. Н. 10518 К
Картошкин Л. И. 10056
Катаев И. И. 10339
Кауфман Р.Н. 10059
Кашкаров В. П. 10049
Кацкова О. Н. 10479
Кильчевский Н. А. 10099
Кірєєва С. В. 10067
Кислов Б. Д. 10503
Клёпов В. Д. 10354 К
Козлов Е. М. 10506 Д
Коровкин П. П. 9904
Королев И. Д. 9809—9811
Крамар Ф. Д. 10330 К
Красносельский М. А. 9991, 10171
Крейн С. Г. 9991
Крейцер Г. П. 10415
Кропачев В. Ф. 10019
Круг Е. М. 10066
Кручкович Г. И. 10422
Кузнецова Д. С. 10143
Куликовский А. Г. 10074
Купрадзе В. Д. 10058

Л

Лабутин Д. Н. 10109
Лебедев С. А. 10599 К
Леонов Н. Н. 10041
Леонтович—Андронова Е. А. 9990
Лившиц М. С. 10163
Лидский В. Б. 10003
Линьков Е. И. 10090
Ли Янь 9627
Лобачев С. В. 10093, 10094
Ломсадзе Ю. М. 10187
Лопато Г. П. 10538
Лумисте Ю. Г. 10425
Лупейкис З. И. 10405
Лу Ци-кэн 10002
Лэн Шэн-мин 10092
Люстерник Л. А. 9986, 10171
Лянце В. Э. 10165

М

Магсудов Ф. Г. 10004
Майер М. Э. 10079
Манабэ 10223
Манукян М. М. 10095
Мартинов Н. 10353
Марчевский М. Н. 9633
Маслов В. П. 10072
Матюхин Н. Я. 10538
Мэммэдбэйли (Мамедбейли) Г. Д. 9649 К
Мерман Г. А. 9637
Минасян Р. С. 10064
Мино М. 10222, 10224
Михайлов Г. А. 10539
Михайловський В.М. 10305
Михов Ив. 9939
Мишагин В. Н. 10371
Могилевский Ш. И. 10001
Молотков И. А. 10131
Молчанов Ф. И. 9657
Морозов Э. Н. 9906
Мурадян Р. М. 10139
Муратов Л. М. 9964

Н

Наерловић Н. 10478
Нечаев В. И. 9727
Никитин Е. А. 10029
Николов Ал. 9655
Никольский В. Н. 10178
Никулин Н. А. 10399
Норден А. П. 10424

О

Оболашвили Е. И. 9936
Обрешков Н. 9650 К
Очан Ю. С. 9883

П

Пентковский М. В. 10498, 10501
Первин Ю. А. 10594
Перепелова Р. А. 10076
Песин И. Н. 9960
Петрашень Г. И. 10131
Петров Г. М. 10565
Петров И. М. 9903
Петров П. И. 10429
Писаренко Г. С. 9982
Плисс В. А. 9992 К
Погодин Ю. Я. 10046
Погорелов А. В. 10377 К, 10460
Позин Н. В. 10306
Полосуев А. М. 9730
Полубаринова—Кочина П. Я. 9631, 9632
Понизовский И. С. 9801
Пономарев В. 9858
Попов Н. Ф. 10524
Пулатов А. И. 9902
Пухов Г. Е. 10037

Р

Розанов Ю. А. 10208
Романчук Н. А. 9770
Рубинштейн
Рупасов К. А. 9652, 9654
Рыжков В. В. 10414
Рязанов Е. В. 10044

С

Сабишев Д. М. 9951
Самарский А. А. 10155
Самуль В. И. 10068
Сахнович Л. А. 10162
Светланов А. В. 10106
Севастьянов Н. Б. 10314
Севрук И. Г. 10054
Семенов Е. Т. 10403
Скопец З. А. 10361
Скрипкин В. А. 10336
Смирнов Г. А. 9905
Собчук В. С. 10419
Соколов А. А. 10139
Соловьев А. Ф. 9914
Соловьев Ю. И. 9933
Соловьева О. И. 9915 К
Солодовников В. В. 10098
Спивак М. А. 10450
Су Бу-цин 10410, 10411
Судзуки 10324
Сучков В. А. 10046
Сушкевич А. К. 9634
Суэканэ 10526, 10527
Ся Дао-син 9925

Т

Табуева В. А. 10496
Тарапов И. Е. 10052
Тиман А. Ф. 9908
Тихонов А. Н. 10155
Томашев Б. И 9658
Топоногов В. А. 10473
Трахтенброт Б. А. 9690
Трубников Н. В. 10524

У

Улчар Ј. 9847, 10376 К
Ушаков В. Б. 10565

Ф

Фаге М. К. 9973
Филиппов А. П. 9985
Фомин Г. А. 9885
Фридман А. А. 10490

Х

Хазанов М. Б. 10357
Хатиашвили Г. М. 10062
Хаттори 9822
Хираока 10324
Хосокава М. 10222, 10224
Хуа Ло-гэн 10002

Ц

Цалюк З. Б. 10475
Цандеков М. 10055
Цзи Минь-и (в подл. Чи Минь-ю) 10006
Цхадая Т. 10128

Ч

Черненко А. П. 10039
Чжан Кай-мин 9925
Чжан Сюэ-мин 9987
Чистова Э. А. 10518 К, 10519 К
Чистяков В. Д. 9653
Чуб А. Т. 10399
Чушкин П. И. 10480
Чэн Пин (в подл. Чэнь Пинь) 10239
Чэнь Цин-и (в подл. Чэнь Чин-и) 10018

Ш

Шанин Н. А. 9678, 9679
Шао Да-чуан 10040
Шарапов Ю. И. 10549
Шемякин Е. И. 10070
Шеров-Игнатьев Г. П. 10499
Шилькрут Д. И. 10009
Ширков Д. В. 10079
Ширшов А. И. 9827
Шитиков Б. Н. 10539
Шноль Э. Э. 10021
Шпак Г. С. 9931
Шпурре Э. Ф. 10341
Штраус А. В. 10160

Щ

Щегольков Е. А. 9894

Э

Эстеркес Р. И. 9664

Ю

Юань Чжао-дин 10477
Ю Чжао-чжэнь 10368

Я

Яблонский С. В. 9704
Явлинский Н. А. 10539
Яненко Н. Н. 10046
Янов Ю. И. 9684, 9686
Ярошенко Н. С. 9882
Яхнин Б. М. 9909

A

Abrol M. L. 10435
Achieser N.I. 10193K
Adorisio I. 10271
Agricola E. 10598
Alder H. L. 9768
Allamigeon A. C. 10417
Allen H. S. 10150
Altman M. 10172, 10173
Ambrose W. 10423
Amitsur S. A. 9819
Anderson J. L. 10443
Anderson R. D. 9861
Anderson T. W. 10227
André J. 10458
Ansoff H. I. 10250
Arbenz K. 10088
Arrow K. J. 10254
Arzeliès. H. 10340
Asral B. 10011
Astrahan M. M. 10532
Atkinson C. P. 10619
Attwood C. 10513 K

B

Babuška I. 9638
Backes F. 10413
Baidaff B. I. 9644
Bailey H. R. 9978
Balakrishnan A. V. 9993
Ballabh R. 10051
Barbenson W. 10103
Barcus W. D. 9873
Baret J. 9776 K
Barman H. L. 10607
Barner M. 10412
Barnett M. P. 10612
Barton D. E. 10226
Beaufays O. 10327
Becker H. 10606
Begle E. G. 9672 K
Bel L. 10442
Bellman R. 9828
Berencz F. 10188, 10189, 10190
Berg L. 10111, 10112
Berger M. 10421
Berkeley E. C. 10523, 10597
Bernard A. 10515 K
Bernard D. 10453
Bernardi S. D. 9921
Bernstein B. 9968
Bers L. 10085 K
Beth E. W. 9720, 9723
Beyer G. 9813
Bhate D. H. 10243
Bhattacharyya M. N. 10230
Bielecki A. 10322
Biernacki M. 9916
Bilinski S. 10461
Bing K. 9699
Bing R. H. 9848
Birkhoff G. 9837
Bishop A. B. 10269
Blanuša D. 10462
Blodgett R. B. 10268
Blondel J-M. 9997
Blum R. 10372
Boclé J. 10186
Bogdan-Teodorescu G. 10015
Bolinder E. F. 10333
Boone W. W. 9680
Booth A. D. (Ed.) 10602 K
Boothby W. M. 10446
Booton R. C. Jr 10310
Borbély S. 10038
Borneas M. 10014
Borwein D. 10126
Bose P. K. 10219
Bott R. 9868
Bottema O. 9639, 10356
Boucher R. C. 10487
Bradley R. A. 10236
Brainerd B. 10180, 10181
Bratina M. 10301
Breedon D. B. 10573, 10587
Brem F. R. de 10561
Brennan J. G. 10382
Brousse P. 9884
Browder F. E. 10185
Brown R. G. 10286
Bruck R. H. 9806
Bruhat F. 9896
Bucur I. 9875, 9878
Burau W. 10395
Businger J. A. 10320

C

Cahen G. 9787 K
Calabi E. 10451
Calvert H. R. 10592
Cominer D. T. 10507
Campbell J. G. 9748
Campbell L. L. 10303
Campopiano C. N. 10214
Carlitz L. 9743, 9762
Carmichael R. D. 9808 K
Cartan H. 9896
Casley D. J. 10226

Castro Brzezicki A. de 10030
Cattaneo C. 10438
Catunda O. 10119 K
Cecioni F. 9710
Certaine J. 9772
Cesari L. 9978
Chang C. C. 9706, 9709
Chang H.m. 9987
Chang-Kai-ming 9925
Cheney L. K. 10273
Chen Kuo-Tsai 10430
Chihara T. S. 10135
Chin Yuan-shun 9980
Chorafas D. N. 10548
Choudhury P. 10071
Chover J. 10159
Churchman C.W. 10247
Cohen A. C., Jr 10221
Cohen L. W. 9853
Cole D., Jr 10562
Collatz L. 10177
Collingwood E. F. 9942
Conner P. E. 9876
Conway H. D. 10061
Copping J. 10125
Cowley P. E. A. 10618
Cox D. R. 10240
Coxeter H. S. M. 10457
Crane R. R. 10262
Croisot R. 9829—9833
Czulius W. 10525

D

Davenport H. 9736, 9740, 9742
David S. T. 10241
Deaux R. 10346, 10369
Degert G. 9744
Dekker J. C. E. 9691
Delachet A. 10375 K
Delcourte M. 9750
Denjoy A. 9624 K
Derman C. 10279
Derwidué L. 9782
Deskins W. E. 9790
Devinatz A. 10104
Dirac G. A. 9843
Doetsch G. 10115
Dolaptschiew B. 9970
Dolcher M. 9857
Dörrie H. 9647 K
Dragilă P. 10406
Dressel F. G. 9961
Dugundji J. 9852, 9869, 10148
Dujčev J. 9780
Durant H. 10607
Duren W. L., Jr 9901
Durieu M. 10385
Duverger L. 10535

E

Ede J. D. 10326
Ehrhart E. 10108
Elianu J. 10449
English J. A. 10287
Ericksen J. L. 10335
Errera A. 9731
Ertel H. 10077
Evans D. 10607
Extermann J.-P. 10516 K

F

Fadell E. 9851
Farias S. de 9775 K
Fehlberg E. 10476
Feldman J. 10159
Felgar R. 10500
Fenchel W. 10471
Feys R. 9724
Fiedler M. 10484
Finetti B. de 10260
Fisz M. 10196
Fitch F. B. 9700—9703, 9717
Flamm L. 10081
Floyd E. E. 9872, 9876
Ford L. R. 9900
Forti U. 9955
Foster D. M. E. 9741
Fourès-Bruhat Y. 10441
Fourier J. 10027 K
Fournier A. 10564
Fournier P.-M. 9675 K
Fraser D.A.S. 10232
Freud G. 10023 K
Friedman A. 10114
Froidevaux L. 10564
Fulton G. E. 9754

G

Gádor E. 9662
Gambino Amato R. 10495
Gani J. 10242
Gann Dan-yen 9864
Gans D. 10325
Garnir H. G. 10024 K
Gass S. I. 10293 K
Gaunin J. 10515 K
Gavilan E. 10574
Gazzano A. 10275
Georges J. S. 10100
Georgewich R. 10334
Gergen J. J. 9961
Gerrish F. 10370
Gheorghiu O. E. 10013
Ghurye S. G. 10200
Gillis P. 10022
Girard R. 9675 K
Glasmann I. M. 10193 K
Gleason A. M. 9862
Glinski G. 10575
Goblirsch R. P. 9893
Godeaux L. 10387
Gödel K. 9721
Godwin H. J. 9745
Goldberg R. R. 10142
Gönenç S. 10338
Gonseth F. 9719
Goodeve C. F. 10266
Goodey W. J. 10491
Goodman A. W. 9926, 9928, 9930
Goodstein R. L. 9692, 10455
Goormaghtigh R. 10343, 10365, 10409
Gordon B. 10522
Gouwens C. 9641
Gove H. E. 10493
Graf U. 10517 K
Grant P. 10582
Grätzer G. 9835, 9838
Grauert H. 9866, 9870
Green H. A. J. 10253
Green H. F. 10151
Green J. W. 10116
Gregg C. V. 10107
Griffiths G. B. 10610
Grindei I. 10031
Grothendieck A. 9867, 10381
Grykałowski Z. 10511 K
Grzegorczyk A. 9688
Gumbel E. J. 10295
Gundelach E. 9671 K
Gunning W. F. 10611
Gupta D. P. 9910
Gupta H. 9751, 9752
Guterman H. E. 10299

H

Haimovici A. 9963
Haimovici M. 10418
Halmos P. R. 9788 K
Hanner O. 10323
Harary F. 9844
Harrop R. 9693
Hartman P. 9974
Haselgrove C. B. 9732
Hassan H. A. 10048
Hayman W. K. 9946
Heaton R. 9781
Hecquet J. 10348
Heinze W. 10502
Helweg T. W. 10609
Henning H. J. 10517 K
Heppes A. 10454
Herrmann H. 10560
Hertz D. B. 10259
Hervé R.-M. 9998
Hieke M. 10057
Higman G. 9766
Hilbert E. 10583
Hildebrand S. 10544
Hinrichsen J. J. L. 9641
Hiraguchi T. 9898
Hirschfeld R. A. 10176
Hitch C. 10277
Hlavatý V. 10434
Hodara H. 10569
Hodges J. H. 9784
Hódi E. 9662
Hofmann J. E. 9645 K, 9646 K
Hollander F. H. 10528
Honda N. 10302
Hörmander L. 10017
Horne J. G., Jr 9802
Horne R. C. 10285
Horrocks G. 10444
Houdaille L. 10515 K
Housman B. 10532
Hronec J 10035
Hsiung Chuan—Chih 10445
Hua L. k. 10002
Huber R. 10508
Huckel V. 10509
Hull L. W. H. 9977
Hustý Z. 9969
Hu Sze-Tsen 9863
Huzurbazar V. S. 10228
Hypher R. P. 10263

I

Iacob C. 9999
Ianov Iu. I. 9683, 9685
Ingelstam L. 9769
Inoue Y. 9871
Irimiciuc N. 10034
Isiwata T. 10157, 10158
Italiani M. 10426

J

Jacobs J. F. 10532
Jaeger J. J. 10556
James I. M. 9865
Jans J. P. 9826
Jelínek M. 9651
Jenner W. E. 9785
Jerome E. A. 10287
Johler J. R. 10146
Johnson G. W. 10309
Joos G. 9670 K
Jung H. P. 9922 K

K

Kähler E. 9674 K
Kaluza T. 9670 K
Kaplansky I. 9824
Kasahara S. 9825
Katsurada Y. 10428
Kattsoff L. O. 9798
Kauderer H. 10084 K
Kawakami Y. 9959
Kerr R. P. 10433
Kervaire M. A. 9874
Kessler A. 10075
Ketchum F. 10555
Kilburn T. 10579
Kimura H. 10257
Kinokuniya Y. 10216
Kitagawa T. 10201
Klein F. 10329 K
Klein M. L. 10584
Klein-Barmen F. 9807
Klingst A. 10278
Klug 10355 K
Kneser H. 9953
Knopp K. 9677 K
Kobayashi S. 10431
Kok J. C. 9767
Koosis P. 9941
Kopal Z. 10504 K
Korganoff A. 10580
Kosiński A. 10464
Kovács L. 9821
Kowalsky H.-J. 9854
Koźniewska I. 10220
Král J. 9891
Krarup T. 10590
Kreuzer K. 10605
Krishna Iyer P. V. 10230
Królikowski W. 10082
Krzywoblocki M. Z. 10048
Kudo A. 10229
Kulik S. 10134
Kundt W. 10156
Kuratowski K. 9616, 9856
Kurepa G. 9897
Kurepa S. 10168—10170
Kůst J. 10120 K
Kwiek M. 10050

L

Laasonen P. 10603
Lacaz Netto F. A. 9786 K
Lacombe D. 9689
Lamprecht E. 9814, 9815
Landenna G. 10225
Larberg H. A. 10566
Larsson R. D. 10344
Lasota A. 10105
Lavis A. 10388, 10389
Lefschetz S. 9622
Lehmann E. L. 10234
Lehto O. 9943—9945
Lekkerkerker C. G. 10463
Lelong P. 9952
Leng Sen-ming 10092
Lenstra H. W. 9767
Leopoldt H.-W. 9758
Lepage Th. 9996
Leray J. 10026 K

Lesieur L. 9829—9832
Levenson M. E. 10110
Levine J. 9765
Levy P. 10217 K
Levy-Bruhl P. 10379
Lewis H. 9669 K
Lindberger A. 10274
Lint J. H. van 9733
Lions J. L. 10005
Lisser S. 10571
Littman W. 10000
Livingston H. M. 10543
Löb M. H. 9697
Locke W. N. Ed. 10602 K
Lockett F. J. 10069
Lohne J. 9763
Lomnicki Z. A. 10197
Longuet-Higgins M. S. 10206, 10312
Look K. h. 10002
Looney C. T. G. 10614
Łopuszański J. 10318
Lorch L. 10124
Lorenzen P. 10113
Lubkin S. 10557
Ludwig W. 9642
Lundh Y. 10529
Lyche R. T. 9764
Lyndon R. C. 9716
Lyons E. L. 10543

M

McArthur C. W. 10153
McCarthy P. J. 9734
McCord H. L. 10304
McCulloch W. S. 10596
Macdonald N. 10542
Macduff J. 10500
McFadden J. A. 10209
McFarland J. E. 10179
McKeon A. J. 10299
Mackie A. G. 10042
McLeod R. M. 9961
Madden E. H. 9621
Makar R. H. 9793—9795
Mall J. 10367
Manabe 10223
Mangeron D. 10337
Mangoldt H. von 9677 K
Mann H. B. 9773 K
Manteuffel K. 9778
Marcus F. 10404
Marczewski E. 9722
Margenau H. 9676 K
Mariot L. 9796
Marmion A. 10342, 10351
Martinek J. 10053
Maruyama S. 10183
Maruyama T. 10452
Matlis E. 9823
Mattuck A. 10380, 10396
Matusita K. 9643
Matuszewski T. I. 10283
Mau J. 9628
Maurer-Tison F. 10440
May K. O. 10252
Mayer R. P. 10532
Mazkewitsch D. 9753
Medhi J. 10244
Meligy A. S. 9917
Melzak Z. A. 10096, 10097, 10469
Meredith C. A. 9708
Merriman J. H. H. 10607, 10613
Meschkowski H. 9687
Methée P.-D. 9976
Metzger R. W. 10291 K
Meyer H. 10364
Meyer J.-P. 9873
Michael E. 9852
Mihăilescu T. 10407
Mihailović D. 10374 K
Milnor J. 9877
Mishra R. S. 10435
Missiha S. A. 9794
Mitchner M. 10284
Mjøsund A. 10267
Moessner A. 9755
Molnár J. 10470
Montagne P. 10510 K
Monteiro A. A. 9842 K
Moran P. A. P. 10316
Morand M. 10328
Mordell L. J. 9737
Morgan H. C. 10584
Morikawa H. 9791
Morimura H. 10195
Morita K. 9950
Morris W. T. 10248
Morrison S. J. 10296
Morse P. M. 10281, 10311
Morton G. 10276
Mosch A. D. du 10215
Mostowski A. 9695, 9713, 9789 K
Müller F. 10512 K
Müller K. 9797
Müller M. 9749
Munteanu O. 10147
Murakami H. 10007, 10008
Murphy G. M. 9676 K
Murre J. P. 10391
Myhill J. 9691
Myrberg P. J. 9956

N

Nahon F. 10313
Naimark M. A. 10191 K, 101 2 K
Nakae T. 10448
Nakamura M. 10132
Narain R. 10140
Narayana T. V. 9754
Nathan A. 10520
Naylor D. 10047
Nelson E. 10203
Nerlove M. 10254
Newman D. J. 9845
Newman M. 9735
Neyman J. 10319
Nikodémusz A. 10494
Nikol F. 10355 K
Nitto S. 9725 K
Noble B. 10025 K
Nocilla S. 10016
Nollet L. 9850
Novák J. 9880
Novak Gál L. 9714
Numakura K. 9803

O

Obalski T. 10511 K
Obrechkoff N. 10123, 10136, 10137
Ohmann D. 10465
Ohshio S. 10468
Onicescu O. 10439
Opial Z. 9630
Opitz G. 10486
Oravas G.-A. 10065
Osborn J. M. 9805
Ostle B. 10300

P

Palman D. 10383
Panella G. 9811
Pap A. 9718
Papian W. N. 10531
Papuc D. 10420
Parker F. D. 10488
Parodi M. 10036
Patterson E. M. 9816
Paul E. B. 10493
Pauncz R. 10188
Pearson E. S. 10218
Penfield R. H. 10436
Pereli J. 10130
Perzley W. 10547
Peter R. 9625 K, 9682
Peterson R. P. 10284
Pickard T. B. 10308
Platen J. von 10585
Pleijel A. 10466
Poenaru V. 9890
Pogorzelski W. 10045
Poincaré H. 9636
Porcelli P. 10102
Porcu L. 10378
Pozzi G. 10275
Preisendorfer R. W. 10080
Prékopa A. 10202
Prior A. N. 9694
Proriol J. 10133
Pták V. 10484
Puig Adam P. 10101

R

Raimi R. A. 10182
Rajagopal A. K. 9967
Ramachandran K. V. 10233
Ramasubban T. A. 10194
Randolph M. L. 10591
Randolph P. H. 10272
Ransom W. R. 10366
Rao C. R. 10237
Rao V. V. L. N. 10144
Rapoport A. 10315
Rauch H. E. 9949
Reichardt H. 9747
Reichbach M. 9855
Reiersøl O. 10235
Remmert R. 9866
Rényi A. 9923, 10317
Richardson W. 10297
Richmond A. E. 9626 K
Riesel H. 9759
Riguet J. 9681
Robert R. 10616
Robinson R. M. 9760
Rockwell T. H. 10269
Rogers C. A. 9738
Rolf H. L. 9840
Rosander A. C. 10299
Roşculeţ M. N. 9817
Rose A. 9705, 9707
Rose H. 10282
Rosenberg R. R. 9669 K
Rosenlicht M. 10393, 10394
Rosina B. A. 10386
Rosser J. B. 9707
Rossier P. 10352
Roth K. F. 9736
Rothberger F. 9895
Rothe R. 9665 K — 9668 K
Roy J. 10231
Rózsa P. 9783
Rubin H. 10198
Rudin W. 9919
Rybarski A. 10089
Rýdl L. 9660

S

Saban G. 10402, 10408
Šaginyan A. L. 9948
Saito T. 9975
Saksena K. M. 10141
Samet P. A. 9745
Samuel P. 9879
Sankaranarayanan G. 10199
Satake I. 9954
Scarborough J. B. 10505 K
Schaafsma A. H. 10264
Schinzel A. 9761
Schmidt E. T. 9835, 9838
Schmidtmayer J. 10483
Schrödinger E. 9648 K
Schubart H. 9947, 9983
Schubert E. J. 10507
Scott E. L. 10319
Seki S. 9698
Şemin F. 10401
Sen P. K. 1026
Serre J.—P. 10392
Shah Tao-shing 9924, 9925
Shanks M. E. 9812
Sharp W. T. 10493
Shen D. W. C. 10571
Sherman S. 10205
Sibuya Y. 9972
Siebert W. M. 10307
Sierpinski W. 9899
Silverman E. 10184
Singer I. 10154
Singer I. M. 10423
Sion M. 10245
Sittig J. 10265
Skolem Th. 9696
Ślebodziński W. 9640
Slepian P. 9892
Słomiński J. 9715
Słowikowski W. 10149
Slutz R. J. 10 51
Šmahel J. 10492
Smith D. N. 10298
Solomon H. 10279
Sommerschild F. E. 10536
Soubies—Camy H. 10550
Specker E. 9712
Srivastava P. 10129
Stamatis E. 9629
Stark M. 9789 K
Stéger F. 9663
Stein C. M. 10234
Sen P. K. 10269
Štěpánský V. 10384, 10497
Steppes O. 9671 K
Sternberg S. 10174
Stier F. 10489
Stoll A. 10332
Stolt B. 9804
Strother W. 9859, 9860
Su Buchin 10410, 10411
Suekane R. 10526, 10527
Suguri T. 10447
Suomi V. E. 10320
Svejgaard B. 10590
Swaine K. B. 9673 K
Sykes R. P. 10558
Szász G. 9836
Szegö G. 9777

T

Taišl J. 10120 K
Takano K. 10204

Takenouchi O. 10167
Takesaki M. 10164, 10166
Tate J. 10380
Teller O. 10355 K
Thébault V. 10345, 10348—10350
Thielman H. P. 9641
Thomas W. H. 10532
Tinbergen J. 10289
Tits J. 10397
Tobin J. 10249
Tocher K. D. 10608
Tolsted E. 9957
Tomić B. S. 9757
Tompkins C. B. 10528
Toscano L. 10138
Trautman A. 10437
Trèves F. 10010
Truesdell C. 9968, 10083, 10335
Tschobanow I. 9970
Tsien K. C. 10604
Tsuji M. 9958, 10472
Tutte W. T. 10456

U

Unkelbach H. 9929
Urabe M. 9981
Ushakov V. B. 10615
Utumi Y. 9820
Uzawa H. 10246

V

Valach M. 10521
Valiron G. 9937
Vidale M. L. 10280
Villamayor O. E. 9818
Villers R. 10251
Vincensini P. 10400
Vincze I. 9938
Viola T. 10347
Virtanen K. I. 9943, 9944
Voellmy E. 10516 K

W

Wallace A. D. 9839
Wallace D. A. T. 10474
Wang Hao 9711
Wang H. C. 10446
Wang Yuan 9729
Ward L. E., Jr 9860
Watanabe Y. 10132
Weinberg L. 9846
Weiner L. M. 10102
Weinwurm E. H. 10261
Weldkamp G. R. 9771
Wermer J. 9918
Whaples G. 9781
Whitehead J. H. C. 9865
Widin K. 10553
Wiesen J. M. 10300
Wildfeuer D 10559
Williams F. K. 10584
Wilson E. M. 10390
Winding P. 10258
Wintner A. 9971, 9974, 9984
Wirsing E. 10398
Wittenberg A. 9623
Wittich H. 9947
Wolfe H. B. 10280
Wolff K.-H. 10321
Wolk E. S. 9834
Wong Y. K. 10256
Woods A. C. 9739
Wright M. 10552
Wussing H. 9792
Wyatt J. K. 10270

Z

Zaalberg J. 10238
Zahorska H. 9887
Zamfirescu I. 9966
Zaremba S. K. 10197
Zatzkis H. 10436
Zeuli T. 10060
Zimmer H.—G. 10363
Zin G. 10073
Żmigrodzka W. 10511 K
Zoellner M. S. 10581
Zorn H. 10053
Zschekel H. 10211
Zwerger 10355 K

Y

Yamaguti M. 9994
Yano K. 10127
Yeh G. C.K. 10053
Yottani T. 9889
Yzeren J. van 10288

Технический редактор *Г. А. Шевченко*